Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1990 г., вып. 30

УДК 519.8

О ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫХ ОТСЕЧЕНИЯХ ДЛЯ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Р.Ю.Симанчёв

В [1-6, 9] и других работах, посвященных анализу задач и методов целочисленного программирования (ЦП), развивается метод разбиения допустимого множества релаксационной задачи. Наиболее изученным является L -разбиение. Важным направлением в указанных работах является выделение и исследование различных классов отсечений. Для изучения проблем конечности алгоритмов и построения оценок числа итераций был введен класс регулярных отсечений. Регулярное отсечение в отличие от правильного исключает не только точку непрерывного оптимума, но и содержащий ее элемент разбиения допустимой области релаксационной задачи.

Вполне регулярные отсечения образуют подкласс в классе регулярных отсечений и характеризуются более сильными условиями отсечения и сохранения целочисленных точек. Они строятся на основе некоторого параллелепипеда, содержащего допустимую область задачи ЦП, что делает возможным их применение к весьма широкому классу задач. Любое вполне регулярное отсечение является P-отсечением [2], и его глубина, оцененная с помощью L -разбиения, не превышает размерности пространства. Вполне регулярными являются, например, отсечения B -алгоритма Ю.Ю.Финкельштейна [8] и отсечения Ю.Ю.Червака [7].

В данной статье получены необходимые и достаточные условия принадлежности линейного неравенства классу вполне регулярных отсечений, что обобщает аналогичные результаты, доказанные в [6] для задач булева программирования; установлены некоторые свойства порождающих этот класс неравенств.

§ 1. Необходимые определения и постановка задачи

Пусть R^n - n -мерное вещественное пространство, Z^n- множество его целочисленных точек (векторов). Определим L -разбиение R^n/L пространства R^n следующим образом: точки $x, y \in R^n$, $x \succ y$, принадлежат одному классу, если не существует такого $z \in Z^n$, что $x \succcurlyeq z \succcurlyeq y$ (" $\succ$ ", " $\succcurlyeq$ " - знаки лексикографического сравнения). Элементы этого разбиения называются L -классами. Если S - произвольное множество из R^n, то его L-разбиение S/L естественным образом индуцируется L -разбиением пространства R^n.

Отметим некоторые свойства L -разбиения.

1) Всякая целочисленная точка образует отдельный класс; все остальные L -классы состоят только из нецелочисленных точек и называются дробными.

2) Любой дробный L -класс V имеет вид

$$V = \{ x \in R^n \mid x_i = a_i ,\ i = 1, \dots, r-1 ,\ a_r < x_r < a_r + 1 \},$$

где $a_1, a_2, \dots, a_r$ - целые числа и $r \in \{1, \dots, n\}$.

Через $V_x(S)$ обозначим L -класс фактор-множества S/L, содержащий данную точку x.

Пусть теперь $\Omega \subset R^n$ и существует $\bar{x} = \operatorname{lexmax} \Omega$, причем $\bar{x} \notin Z^n$. Рассмотрим задачу ЦП в лексикографической постановке:

$$\text{найти} \quad z^* = \operatorname{lexmax} (\Omega \cap Z^n) . \tag{1.1}$$

При исследовании алгоритмов отсечения применительно к задаче (1.1) особый интерес представляет множество $\Omega_* = \{ x \in \Omega \mid x \succ z$ для всех $z \in \Omega \cap Z^n \}$, точки которого должны быть непременно исключены в процессе решения задачи. Множество Ω_* назовем дробным накрытием, а Ω_*/L - L -накрытием задачи (1.1).

Рассмотрим линейное неравенство вида $(\gamma, x) \le \gamma_0$, где

$$\gamma_0 \in R, \quad (\gamma, x) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k x_k .$$

Вектор $(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma_0)$ и само неравенство будем обозначать через $\bar{\gamma}$. Оно называется регулярным отсечением (для задачи (1.1), если

а) $(\gamma, x) > \gamma_0$ для всех $x \in V_{\bar{x}}(\Omega)$,

б) $(\gamma, z) \le \gamma_0$ для всех $z \in \Omega \cap Z^n$.

Глубиной неравенства $\bar{\gamma}$ назовем количество $h(\bar{\gamma})$ элементов L -накрытия задачи (1.1), целиком исключаемых этим неравенством. Ясно, что глубина регулярного отсечения не меньше единицы. Пусть $I(\Omega)$ - число итераций дробного двойственного процесса отсечения, $H_L(\Omega)$ - верхняя оценка глубины используемых в нем отсечений. Имеют место следующие оценки [1, 3]:

$$\frac{1}{H_L(\Omega)} \, |\Omega_*/L| \le I(\Omega) \le |\Omega_*/L| , \tag{1.2}$$

где $|\Omega_*/L|$ - мощность L -накрытия задачи (1.1).

Пусть в R^n задан параллелепипед

$$P = \{ x \in R^n \mid a_i \le x_i \le b_i ,\ i = 1, 2, \dots, n \}, \tag{1.3}$$

где $a_i \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, b_i \in \mathbb{Z}, a_i \leq b_i$. Рассмотрим класс задач типа (1.1), у которых $\Omega \subset P$. Регулярное отсечение $\bar{\gamma}$ называется P-отсечением [2], если оно удовлетворяет условию:

$$(\gamma, z) \leq \gamma_0 \quad \text{для всех } z \in P \cap Z^n \text{ таких, что } z \prec \bar{x}.$$

В [2] показано, что если $\bar{\gamma}$ является P-отсечением, то $h(\bar{\gamma}) \leq n$.

Назовем P-отсечение $\bar{\gamma}$ вполне регулярным относительно точки $\bar{x}$ и параллелепипеда P, если выполняется условие:

$$(\gamma, x) > \gamma_0 \qquad \text{для всех} \quad x \in V_{\bar{x}}(P).$$

Класс вполне регулярных отсечений обозначим через $\mathcal{T}(\bar{x}, P)$.

Замечание. Так как вполне регулярное отсечение $\bar{\gamma}$ является P-отсечением, то $h(\bar{\gamma}) \leq n$. Это верно и для совокупности вполне регулярных отсечений (см. [2]). Нетрудно указать примеры задач, для которых существуют такие $\bar{\gamma} \in \mathcal{T}(\bar{x}, P)$, что $h(\bar{\gamma}) = n$.

Отметим несколько свойств отсечений класса $\mathcal{T}(\bar{x}, P)$.

1) Алгоритмы, основанные на таких отсечениях, применимы к широкому классу задач ЦП, включая задачи с невыпуклыми и даже несвязными Ω.

2) Как будет показано в следующем параграфе, вполне регулярные отсечения естественным образом строятся в исходных переменных задачи, что оказывается полезным в теоретических исследованиях и при реализации на ЭВМ.

3) Вычислительный эксперимент показал [4], что для задач упаковки глубина вполне регулярных отсечений близка к глубине регулярных отсечений первого алгоритма Гомори [8].

Полное описание класса вполне регулярных отсечений для задач булева программирования, т.е. при $P = B^n = \{x \in R^n \mid 0 \leq x_i \leq 1, i=1,\dots,n\}$, содержится в [6]. Там, в частности, доказаны необходимые и достаточные условия принадлежности линейного неравенства классу $\mathcal{T}(\bar{x}, B^n)$. В настоящей статье эти результаты обобщены на случай произвольного параллелепипеда вида (1.3), установлен ряд свойств неравенств, порождающих класс $\mathcal{T}(\bar{x}, P)$.

§ 2. Основные результаты

Пусть P - параллелепипед вида (1.3). Введем обозначения: $\varphi(x) = \min\{ i \mid x_i \neq \lfloor x_i \rfloor, i=1,\dots,n\}$ для $x \notin Z^n$, - первая дробная координата точки x ($\lfloor \alpha \rfloor$ - целая часть действительного числа α);
$\eta(x,y) = \min\{ i \mid x_i \neq y_i, i=1,\dots,n\}$ для $x, y \in R^n$, $x \neq y$, - координата различия точек x и y;

для $x \in P \cap (R^n \setminus Z^n)$ положим $J_-(x,P) = \{ j \mid x_j = a_j, 1 \leq j \leq \varphi(x)-1\}$, $J_0(x,P) = \{ j \mid a_j < x_j < b_j, 1 \leq j \leq \varphi(x)-1\}$,

$J_+(x,P)=\{j \mid x_j=b_j,\ 1\le j\le \varphi(x)-1\}$, $J_x^K(x,P)=\{j\in J_x(x,P) \mid j>K\}$, $\bar J_x^K(x,P)=\{j\in J_x(x,P) \mid j<K\}$, где x принимает значения символов $-$, 0, $+$.

Условимся также считать, что если множество индексов I пусто, то

$$\sum_{i\in I}\alpha_i=0 \quad \text{и} \quad \prod_{i\in I}\alpha_i=1.$$

Пусть теперь $\Omega\subset P$, $\bar x=\operatorname{lexmax}\Omega$, $\bar x\notin Z^n$.

Т е о р е м а 1. Линейное неравенство $\bar\gamma$ является вполне регулярным отсечением (относительно точки $\bar x$ и параллелепипеда P) тогда и только тогда, когда его коэффициенты удовлетворяют условиям:

1) $\gamma_{\varphi(\bar x)}>0$;

2) $\gamma_K=0$ для всех $K>\varphi(\bar x)$;

3) $$\gamma_K \geqslant \sum_{j\in J_0^K(\bar x,P)}\gamma_j(b_j-\bar x_j)+$$

$$+\sum_{\substack{j\in J_-^K(\bar x,P)\\ \gamma_j>0}}\gamma_j(b_j-\bar x_j)+\gamma_{\varphi(\bar x)}(b_{\varphi(\bar x)}-\lfloor\bar x_{\varphi(\bar x)}\rfloor)$$

для всех $K\in J_0(\bar x,P)\cup J_+(\bar x,P)$;

4) $\gamma_0=(\gamma,\lfloor\bar x\rfloor)$, где $\lfloor\bar x\rfloor=(\lfloor\bar x_1\rfloor,\dots,\lfloor\bar x_n\rfloor)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для простоты условимся обозначать $\varphi(\bar x)$, через r, а множества $J_x(\bar x,P)$, $J_x^K(\bar x,P)$, $\bar J_x^K(\bar x,P)$, $x\in\{-,0,+\}$,- через J_x, J_x^K, $\bar J_x^K$ соответственно.

<u>Необходимость.</u> Выделим в P подмножество $G=\{x\in P \mid x_i=\bar x_i,\ i=1,\dots,r-1,\ x_r=\lfloor\bar x_r\rfloor\}$. Покажем, что если $x'\in G$, то $(\gamma,x')\geqslant\gamma_0$. Так как $x'\in G$, то в L_1 -классе $V_{\bar x}(P)$ можно выделить последовательность $\{x^i\}_{i=1}^{\infty}$, сходящуюся к точке x'. Например, $x^i=(\bar x_1,\dots,\bar x_{r-1},\lfloor\bar x_r\rfloor+1/(i+1),x'_{r+1},\dots,x'_n)$. Очевидно, что $x^i\in V_{\bar x}(P)$ для любого i и $\lim_{i\to\infty}x^i=x'$ покомпонентно. Так как $x^i\in V_{\bar x}(P)$, то $(\gamma,x^i)>\gamma_0$, и, в силу непрерывности линейной функции $f(x)=(\gamma,x)$, имеем $(\gamma,x')\geqslant\gamma_0$.

Теперь докажем требуемые условия. Очевидно, что $\lfloor\bar x\rfloor\in G$. Следовательно, $(\gamma,\lfloor\bar x\rfloor)\geqslant\gamma_0$. Но так как $\lfloor\bar x\rfloor\in P\cap Z^n$ и $\lfloor\bar x\rfloor\prec\bar x$, то $(\gamma,\lfloor\bar x\rfloor)\leqslant\gamma_0$. Значит, $(\gamma,\lfloor\bar x\rfloor)=\gamma_0$. Пусть $K>r$. Рассмотрим точки:

$$u^K=(\bar x_1,\dots,\bar x_{r-1},\lfloor\bar x_r\rfloor,\dots,\lfloor\bar x_{K-1}\rfloor,\alpha_K,\lfloor\bar x_{K+1}\rfloor,\dots,\lfloor\bar x_n\rfloor)$$

и

$$v^K=(\bar x_1,\dots,\bar x_{r-1},\lfloor\bar x_r\rfloor,\dots,\lfloor\bar x_{K-1}\rfloor,b_K,\lfloor\bar x_{K+1}\rfloor,\dots,\lfloor\bar x_n\rfloor),$$

где $a_k \le d_k < b_k$, d_k - целое. Ясно, что $u^k, v^k \in P \cap Z^n$, $u^k \prec \bar{x}$, $v^k \prec \bar{x}$. Значит, $(\gamma, u^k) \le \gamma_0$ и $(\gamma, v^k) \le \gamma_0$. Кроме того, $u^k, v^k \in G$, откуда следует, что $(\gamma, u^k) \ge \gamma_0$, $(\gamma, v^k) \ge \gamma_0$. Значит, $(\gamma, u^k) = (\gamma, v^k) = \gamma_0$. Поэтому $0 = (\gamma, v^k) - (\gamma, u^k) = (\gamma, v^k - u^k) = \gamma_k(b_k - d_k)$. Так как $b_k - d_k \ne 0$, то $\gamma_k = 0$. Отметим также, что из доказанного вытекает $(\gamma, \bar{x}) - \gamma_0 = \gamma_r(\bar{x}_r - \lfloor \bar{x}_r \rfloor) > 0$. Следовательно, $\gamma_r > 0$.

Осталось проверить условие 3. Пусть $k \in J_0 \cup J_+$. Выберем точку $z \in P \cap Z^n$ следующим образом: $z_j = \bar{x}_j$ при $j < k$; $z_k = \bar{x}_k - 1$, $z_j = \bar{x}_j$ при $j \in (J_-^k \cap \{j \mid \gamma_j \le 0\}) \cup J_+^k$; $z_j = b_j$ при $j \in (J_-^k \cap \{j \mid \gamma_j > 0\}) \cup J_0^k \cup \{r\}$, $z_j \in (a_j, b_j] \cap Z$ при $j > r$. Ясно, что $z \prec \bar{x}$. Значит,

$$0 \ge (\gamma, z) - \gamma_0 = (\gamma, z - \lfloor \bar{x} \rfloor) = \sum_{j=1}^{r-1} \gamma_j (z_j - \bar{x}_j) +$$

$$+ \gamma_r (z_r - \lfloor \bar{x}_r \rfloor) = -\gamma_k + \sum_{j \in J_0^k} \gamma_j (b_j - \bar{x}_j) +$$

$$+ \sum_{\substack{j \in J_-^k \\ \gamma_j > 0}} \gamma_j (b_j - \bar{x}_j) + \gamma_r (b_r - \lfloor \bar{x}_r \rfloor).$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Если $x \in V_{\bar{x}}(P)$, то $x_j = \bar{x}_j$ при $j < r$ и $\lfloor \bar{x}_r \rfloor < x_r < \lfloor \bar{x}_r \rfloor + 1$. Поэтому $(\gamma, x) - \gamma_0 = \gamma_r (x_r - \lfloor \bar{x}_r \rfloor) > 0$, т.е. L -класс $V_{\bar{x}}(P)$ исключается.

Пусть теперь $z \in P \cap Z^n$, $z \prec \bar{x}$ и $q = h(z, \bar{x})$. Ясно, что $q \le r$ (в противном случае $z \notin Z^n$). Если $q = r$, то $(\gamma, z) - \gamma_0 = \gamma_r (z_r - \lfloor \bar{x}_r \rfloor) \le 0$, так как $z \prec \bar{x}$. Пусть $q < r$. Так как $z \in P$ и $z \prec \bar{x}$, то $q \in J_0 \cup J_+$. Кроме того, отметим, что $z_j - \bar{x}_j \ge 0$ при $j \in J_-$ и $\gamma_j > 0$ при $j \in J_0 \cup J_+$. Последнее легко установить с помощью индукции из условия 3. Оценим разность

$$(\gamma, z) - \gamma_0 = (\gamma, z - \lfloor \bar{x} \rfloor) = \gamma_q (z_q - \bar{x}_q) + \sum_{j \in J_-^q} \gamma_j (z_j - \bar{x}_j) +$$

$$+ \sum_{j \in J_0^q} \gamma_j (z_j - \bar{x}_j) + \sum_{j \in J_+^q} \gamma_j (z_j - \bar{x}_j) + \gamma_r (z_r - \lfloor \bar{x}_r \rfloor) \le$$

$$\le -\gamma_q + \sum_{\substack{j \in J_-^q \\ \gamma_j > 0}} \gamma_j (b_j - \bar{x}_j) + \sum_{j \in J_0^q} \gamma_j (b_j - \bar{x}_j) + \gamma_r (b_r - \lfloor \bar{x}_r \rfloor) \le 0$$

в силу условия 3. Теорема доказана.

Введем следующие неравенства:

$$x_j \le b_j, \quad j \in J_+(\bar{x}, P); \tag{2.1}$$

$$-x_j \leq -a_j \ , \qquad j \in J_-(\bar{x},P); \tag{2.2}$$

$$\sum_{k\in \bar{J}_0^j \cup \bar{J}_+^j} \{ (b_j-\bar{x}_j) \prod_{\ell \in J_0^k \cap \bar{J}_0^j} (b_\ell - \bar{x}_\ell + 1) \} x_k + x_j \leq$$

$$\leq \sum_{k\in \bar{J}_0^j \cup \bar{J}_+^j} \{ (b_j-\bar{x}_j) \prod_{\ell \in J_0^k \cap \bar{J}_0^j} (b_\ell - \bar{x}_\ell + 1) \} \bar{x}_k + \bar{x}_j,$$

$$j \in J_-(\bar{x},P) \cup J_0(\bar{x},P); \tag{2.3}$$

$$\sum_{k\in J_0 \cup J_+} \{ (b_r - \lfloor \bar{x}_r \rfloor) \prod_{\ell \in J_0^k} (b_\ell - \bar{x}_\ell + 1) \} x_k + x_r \leq$$

$$\leq \sum_{k\in J_0 \cup J_+} \{ (b_r - \lfloor \bar{x}_r \rfloor) \prod_{\ell \in J_0^k} (b_\ell - \bar{x}_\ell + 1) \} \bar{x}_k + \lfloor \bar{x}_r \rfloor, \tag{2.4}$$

где $r = \varphi(\bar{x})$. Обозначим векторы коэффициентов и сами неравенства (2.1) и (2.2) через $\bar{R}^j(\bar{x},P)$, $j \in J_-(\bar{x},P) \cup J_+(\bar{x},P)$; (2.3) – через $\bar{Y}^j(\bar{x},P)$, $j \in J_-(\bar{x},P) \cup J_0(\bar{x},P)$; (2.4) – через $\bar{S}(\bar{x},P)$. Кроме того, будем для простоты использовать обозначения $\bar{R}^j$, $\bar{Y}^j$, $\bar{S}$ соответственно. При этом $\bar{R}^j = (R_1^j, R_2^j, \ldots, R_n^j, R_0^j)$ и т.д.

Т е о р е м а 2. Класс вполне регулярных отсечений $\mathcal{T}(\bar{x},P)$ совпадает с множеством неотрицательных линейных комбинаций всех неравенств $\bar{R}^j(\bar{x},P)$, $\bar{Y}^j(\bar{x},P)$ и $\bar{S}(\bar{x},P)$, причем последнее входит в эти комбинации с положительным коэффициентом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы равносильно следующему: $\bar{\gamma} \in \mathcal{T}(\bar{x},P)$ тогда и только тогда, когда

$$\bar{\gamma} = \sum_{j\in J_- \cup J_+} \alpha_j \bar{R}^j(\bar{x},P) + \sum_{j \in J_- \cup J_0} \beta_j \bar{Y}^j(\bar{x},P) + \delta \bar{S}(\bar{x},P), \tag{2.5}$$

причем $\alpha_j, \beta_j \geq 0$, $\delta > 0$.

Покомпонентно равенство (2.5) можно переписать так:

$$\gamma_k = -\alpha_k + \beta_k \ , \qquad k \in J_-(\bar{x},P); \tag{2.6}$$

$$\gamma_k = \alpha_k + \sum_{j \in J_-^k \cup J_0^k} \beta_j (b_j - \bar{x}_j) \prod_{\ell \in J_0^k \cap \bar{J}_0^j} (b_\ell - \bar{x}_\ell + 1) +$$

$$+ \delta (b_r - \lfloor \bar{x}_r \rfloor) \prod_{\ell \in J_0^k} (b_\ell - \bar{x}_\ell + 1), \quad k \in J_+(\bar{x},P); \tag{2.7}$$

$$\gamma_k = \beta_k + \sum_{j\in J_-^k \cup J_0^k} \beta_j (b_j - \bar{x}_j) \prod_{\ell \in J_0^k \cap \bar{J}_0^j} (b_\ell - \bar{x}_\ell + 1) +$$

$$+ \delta(b_r - \lfloor \bar{x}_r \rfloor) \prod_{\ell \in J_0^k} (b_\ell - \bar{x}_\ell + 1), \quad k \in J_0(\bar{x}, P); \tag{2.8}$$

$$\gamma_r = \delta; \tag{2.9}$$

$$\gamma_0 = \sum_{j\in J_+} \alpha_j b_j - \sum_{j\in J_-} \alpha_j a_j + \sum_{j\in J_- \cup J_0} \beta_j \Big\{ \sum_{k\in \bar{J}_0^j \cup \bar{J}_+^j} (b_j - \bar{x}_j) \times$$

$$\times \prod_{\ell \in J_0^k \cap \bar{J}_0^j} (b_\ell - \bar{x}_\ell + 1) \bar{x}_k + \bar{x}_j \Big\} + \delta \Big\{ \sum_{k \in J_0 \cup J_+} (b_r - \lfloor \bar{x}_r \rfloor) \times$$

$$\times \prod_{\ell \in J_0^k} (b_\ell - \bar{x}_\ell + 1) \bar{x}_k + \lfloor \bar{x}_r \rfloor. \tag{2.10}$$

<u>Достаточность</u>. В силу (2.9) и $\delta > 0$, выполняется условие $\gamma_r > 0$. Так как для всех $j < r$ и всех $s > r$ имеет место $R_s^j = Y_s^j = S_s = 0$, то $\gamma_s = 0$ при $s > r$. Условие 4 теоремы 1 легко проверить, умножив равенства (2.6)-(2.9) на соответствующие $\lfloor \bar{x}_k \rfloor$, $k = 1, \dots, r$.

Докажем выполнимость условия 3 теоремы 1. Пусть $J_0(\bar{x}, P) = \{j_1, j_2, \dots j_p\}$. Покажем по индукции, что

$$\gamma_{j_k} - \beta_{j_k} \geq \sum_{\substack{j\in J_-^{j_k} \\ \gamma_j > 0}} \gamma_j (b_j - \bar{x}_j) + \sum_{j \in J_0^{j_k}} \gamma_j (b_j - \bar{x}_j) + \gamma_r (b_r - \lfloor \bar{x}_r \rfloor), \tag{2.11}$$

$$k = 1, 2, \dots, p.$$

В силу (2.6) имеем $\gamma_j + \alpha_j = \beta_j \geq 0$ при $j \in J_-(\bar{x}, P)$. Поэтому из (2.8) и (2.9) вытекает

$$\gamma_{j_p} - \beta_{j_p} = \sum_{j\in J_-^{j_p}} \beta_j (b_j - \bar{x}_j) + \delta(b_r - \lfloor \bar{x}_r \rfloor) \geq$$

$$\geq \sum_{\substack{j\in J_-^{j_p} \\ \gamma_j > 0}} \gamma_j (b_j - \bar{x}_j) + \gamma_r (b_r - \lfloor \bar{x}_r \rfloor).$$

База индукции установлена. Предположим, что для j_k неравенство (2.11) справедливо. Тогда для j_{k-1} из (2.6), (2.8), (2.9) следует

$$\gamma_{j_{k-1}} - \beta_{j_{k-1}} = \sum_{j \in J_-^{j_{k-1}} \setminus J_-^{j_k}} \beta_j (b_j - \bar{x}_j) + \beta_{j_k} (b_{j_k} - \bar{x}_{j_k}) + (b_{j_k} - \bar{x}_{j_k} + 1) \times$$

$$\times \Big\{ \sum_{j\in J_-^{jk} \cup J_0^{jk}} \beta_j(b_j-\bar{x}_j) \prod_{\ell\in J_0^{jk}\cap \bar{J}_0^j} (b_\ell-\bar{x}_\ell+1)+$$

$$+\delta(b_\tau-\lfloor\bar{x}_\tau\rfloor)\prod_{\ell\in J_0^{jk}}(b_\ell-\bar{x}_\ell+1)\Big\}=$$

$$=\sum_{j\in J_-^{j_{k-1}}\setminus J_-^{j_k}}(\gamma_j+\alpha_j)(b_j-\bar{x}_j)+\gamma_{j_k}(b_{j_k}-\bar{x}_{j_k})+\gamma_{j_k}-\beta_{j_k}\geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\substack{j\in J_-^{j_{k-1}}\\ \gamma_j>0}}\gamma_j(b_j-\bar{x}_j)+\sum_{j\in J_0^{j_{k-1}}}\gamma_j(b_j-\bar{x}_j)+\gamma_\tau(b_\tau-\lfloor\bar{x}_\tau\rfloor).$$

Неравенство (2.11) доказано. Из него очевидно следует условие 3 теоремы 1 для $k\in J_0(\bar{x},P)$. Пусть теперь $k\in J_+(\bar{x},P)$. Если $J_0^k(\bar{x},P)=\emptyset$, то из (2.7) и неотрицательности α_k имеем

$$\gamma_k=\alpha_k+\sum_{j\in J_-^k}\beta_j(b_j-\bar{x}_j)+\delta(b_\tau-\lfloor\bar{x}_\tau\rfloor)\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{\substack{j\in J_-^k\\ \gamma_j>0}}\gamma_j(b_j-\bar{x}_j)+\gamma_\tau(b_\tau-\lfloor\bar{x}_\tau\rfloor).$$

Если же $J_0^k(\bar{x},P)\neq\emptyset$, то пусть q - первый элемент этого множества. Из (2.7) и (2.8), как легко заметить, следует, что

$$\gamma_k=\alpha_k+\sum_{j\in J_-^k\setminus J_-^q}\beta_j(b_j-\bar{x}_j)+\gamma_q(b_q-\bar{x}_q)+\gamma_q-\beta_q\geqslant$$

$$\geqslant\alpha_k+\sum_{\substack{j\in J_-^k\setminus J_-^q\\ \gamma_j>0}}\gamma_j(b_j-\bar{x}_j)+\gamma_q(b_q-\bar{x}_q)+\gamma_q-\beta_q.$$

Поэтому на основании неравенства (2.11) можно утверждать, что условие 3 теоремы 1 выполняется и для $k\in J_+(\bar{x},P)$.

<u>Необходимость</u>. Покажем, что система (2.6) - (2.10) относительно α_k, β_k, δ имеет неотрицательное решение.

Из (2.9) заключаем, что $\delta>0$. Для $k\in J_-(\bar{x},P)$ положим $\beta_k=\max\{\gamma_k,0\}$. В силу (2.6) $\alpha_k=\beta_k-\gamma_k$ при $k\in J_-(\bar{x},P)$. Таким образом, определены неотрицательные α_k, β_k при $k\in J_-(\bar{x},P)$.

Пусть $J_0(\bar{x},P)=\{j_1,\dots,j_p\}$. Пользуясь (2.8), определим β_{j_k}, $k=1,\dots,p$, по индукции, полагая

$$\beta_{j_p}=\gamma_{j_p}-\Big\{\sum_{i\in J_-^{j_p}}\beta_i(b_i-\bar{x}_i)+\delta(b_\tau-L\bar{x}_\tau\rfloor)\Big\}$$

и при известных $\beta_{j_p},\beta_{j_{p-1}},\dots,\beta_{j_{k+1}}$,

$$\beta_{j_k}=\gamma_{j_k}-\Big\{\sum_{i\in J_-^{j_k}\cup J_0^{j_k}}\beta_i(b_i-\bar{x}_i)\prod_{l\in J_0^{j_k}\cap \bar{J}_0^{i}}(b_l-\bar{x}_l+1)+$$

$$+\delta(b_\tau-L\bar{x}_\tau\rfloor)\prod_{l\in J_0^{k}}(b_l-\bar{x}_l+1)\Big\}.$$

Покажем, что при таких β_{j_k}, $k=1,2,\dots,p$, имеет место равенство

$$\sum_{i\in J_-^{j_k}\cup J_0^{j_k}}\beta_i(b_i-\bar{x}_i)\prod_{l\in J_0^{j_k}\cap\bar{J}_0^{i}}(b_l-\bar{x}_l+1)+\delta(b_\tau-L\bar{x}_\tau\rfloor)\times$$

$$\times\prod_{l\in J_0^{j_k}}(b_l-\bar{x}_l+1)=\sum_{i\in J_0^{j_k}}\gamma_i(b_i-\bar{x}_i)+$$

$$+\sum_{\substack{i\in J_-^{j_k}\\ \gamma_i>0}}\gamma_i(b_i-\bar{x}_i)+\gamma_\tau(b_\tau-L\bar{x}_\tau\rfloor),\ k=1,\dots,p. \qquad (2.12)$$

При $k=p$ (2.12) справедливо в силу того, что $\beta_j=\max\{\gamma_j,0\}$ для всех $j\in J_-(\bar{x},P)$. Пусть (2.12) справедливо для j_k. Тогда

$$\sum_{i\in J_-^{j_{k-1}}\cup J_0^{j_{k-1}}}\beta_i(b_i-\bar{x}_i)\prod_{l\in J_0^{j_{k-1}}\cap\bar{J}_0^{i}}(b_l-\bar{x}_l+1)+$$

$$+\delta(b_\tau-L\bar{x}_\tau\rfloor)\prod_{l\in J_0^{j_{k-1}}}(b_l-\bar{x}_l+1)=$$

$$=\sum_{i\in J_-^{j_{k-1}}\setminus J_-^{j_k}}\beta_i(b_i-\bar{x}_i)+\beta_{j_k}(b_{j_k}-\bar{x}_{j_k})+$$

$$+(b_{j_k}-\bar{x}_{j_k}+1)(\gamma_{j_k}-\beta_{j_k})=$$

$$=\sum_{\substack{i\in J_-^{j_{k-1}}\setminus J_-^{j_k}\\ \gamma_i>0}}\gamma_i(b_i-\bar{x}_i)+\gamma_{j_k}(b_{j_k}-\bar{x}_{j_k})+\gamma_{j_k}-\beta_{j_k}-$$

$$= \sum_{\substack{i\in J_-^{j_{k-1}}\setminus J_-^{j_k}\\ \gamma_i>0}} \gamma_i(b_i-\bar{x}_i)+\gamma_{j_k}(b_{j_k}-\bar{x}_{j_k})+\sum_{\substack{i\in J_-^{j_k}\\ x_i>0}}\gamma_i(b_i-\bar{x}_i)+$$

$$+\sum_{i\in J_0^{j_k}}\gamma_i(b_i-\bar{x}_i)+\gamma_r(b_r-\lfloor\bar{x}_r\rfloor).$$

Равенство (2.12) доказано. Из условия 3 теоремы 1 и (2.12) следует, что $\beta_k \geqslant 0$ при $k\in J_0(\bar{x},P)$. Теперь определим α_k при $k\in J_+(\bar{x},P)$. Положим

$$\alpha_k=\gamma_k-\Big\{\sum_{j\in J_-^k\cup J_0^k}\beta_j(b_j-\bar{x}_j)\prod_{\ell\in J_0^k\cap \bar{J}_0^j}(b_\ell-\bar{x}_\ell+1)+$$

$$+\delta(b_r-\lfloor\bar{x}_r\rfloor)\prod_{\ell\in J_0^k}(b_\ell-\bar{x}_\ell+1)\Big\}.$$

Рассматривая так же, как при доказательстве достаточности, случаи $J_0^k(\bar{x},P)=\varnothing$ и $J_0^k(\bar{x},P)\neq\varnothing$, нетрудно получить, что равенство (2.12) и условие 3 теоремы 1 влекут $\alpha_k\geqslant 0$.

И наконец, заметим, что уравнение (2.10) является линейной комбинацией уравнений (2.6) - (2.9) с коэффициентами a_k - для (2.6), b_k - для (2.7), $\bar{x}_k$ - для (2.8) и $\lfloor\bar{x}_r\rfloor$ - для (2.9).

Теорема доказана.

Отметим, что в случае $P=B^n$ класс $\mathcal{T}(\bar{x},B^n)$ содержит отсечения B-алгоритма Ю.Ю.Финкельштейна [6, 8], а если $J_-(\bar{x},P)=\varnothing$, то неравенство $S(\bar{x},P)$ совпадает с отсечением Ю.Ю.Червака [7, 9].

Нетрудно доказать следующие свойства неравенств (2.1) - (2.4), которые могут быть использованы при анализе отсечений класса $\mathcal{T}(\bar{x},P)$ и основанных на них алгоритмов:

1) если $x\in P$ удовлетворяет неравенствам (2.3) - (2.4), то $x\prec\bar{x}$; если при этом x целочисленна, то верно и обратное;

2) всякое неравенство, разложимое в сумму (2.5) при $\delta=0$, является правильным для любого $\Omega\subset P$.

Поступила в ред.-изд. отдел
27 августа 1990 г.

Литература

1. Колоколов А.А. Регулярные отсечения при решении задач целочисленной оптимизации. // Управляемые системы. - Новосибирск, 1981. - Вып. 21. - С. 18-25.

2. Колоколов А.А. Методы дискретной оптимизации. // Учебное пособие. - Омск, 1984. - 75 с.

3. Колоколов А.А. Метод оценочных разбиений в целочисленном программировании. // Теория и программная реализация методов дискретной оптимизации. - Киев, 1989. - С. 44-47.

4. Заикина Г.М., Колоколов А.А. Экспериментальные исследования задач и алгоритмов целочисленного программирования с применением L-разбиения.// Дискретная оптимизация и анализ сложных систем. - Новосибирск, 1989. - С. 26-55.

5. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. - Киев: Наукова думка, 1988. - 471 с.

6. Заблоцкая О.А., Колоколов А.А. Вполне регулярные отсечения в булевом программировании. // Управляемые системы. - Новосибирск, 1983.- Вып. 23. - С. 55-63.

7. Червак Ю.Ю. Поиск лексикографически максимальной дискретно определенной точки выпуклого множества. // Математические методы решения экономических задач. - М. 1979, № 8. - С. 69-75.

8. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. - М.: Наука, 1969. - 368 с.

9. Симанчев Р.Ю. Построение L-регулярных отсечений для задач выпуклого целочисленного программирования. // Дискретная оптимизация и анализ сложных систем. - Новосибирск, 1989. - С. 108-123.