Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1990 г., вып. 30

УДК 517.911

# ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ВИДА $\dot{x} \in ex\, F(x)$ В $R^n$

С.И.Суслов

Недавно Брессан и Коломбо [1] разработали новый метод доказательства теорем существования для дифференциальных включений. Он основан на использовании обобщенной теоремы Бэра о категориях и был ими применен к дифференциальным включениям в рефлексивных банаховых пространствах. Однако, поскольку основная конструкция в [1], зародившаяся, как пишут авторы, под влиянием работы А.Ф.Филиппова ([2] см. также [3, стр. 112]) - так называемые дифференциальные включения с памятью - по существу конечномерна, то, на наш взгляд, метод Брессана - Коломбо органически присущ конечномерному случаю. И в настоящей работе он применяется для получения решения включения $\dot{x} \in ex\, F(x)$, $x(0)=0$, в $R^n$, где непрерывная в метрике Хаусдорфа функция $F: R^n \to 2^{R^n}$ принимает выпуклые компактные значения.

Ранее аналогичный результат был получен в [4] с дополнительным предположением $int\, F(x) \neq \emptyset$, в [5] - с липшицевой, а не с непрерывной функцией $F$ и в [6] - с $cl\, ex\, F$ вместо $ex\, F$ в правой части включения. В [6] решение получается как неподвижная точка некоторого специальным образом построенного отображения. В [4, 5] применяется обычная теорема Бэра о категориях. О применении этой теоремы к дифференциальным включениям см. также [7 - 9].

Работа построена следующим образом. В первом параграфе приводятся основные обозначения и определения. Во втором - описываются вспомогательные конструкции из [1, 5] и излагается общая схема доказательства. Наконец, в третьем - доказывается теорема существования.

## § 1. Предварительные сведения

Пусть $R^d$ - $d$-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot , \cdot \rangle$, нормой $|\cdot|$ и нулем $0$; $2^{R^d}$ и $\mathcal{K}(R^d)$ - множества всех непустых и всех непустых выпуклых компактных подмножеств $R^d$ соответственно; $\mu$ - мера Лебега на $R \equiv R^1$.

Решением дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) , \qquad x(0) = 0 , \tag{1}$$

на отрезке $[0,T] \subset R$, где $F: R^d \to 2^{R^d}$, называется абсолютно непрерывная функция $x:[0,T] \to R^d$, $x(0)=0$, удовлетворяющая (1) почти всюду (п.в.) на $[0,T]$. Множество решений включения (1) обозначается через $\mathcal{T}(F)$.

Мы также обозначаем через $cl\, A$, $int\, A$, $co\, A$, $ex\, A$ замыкание, внутренность, выпуклую оболочку и множество крайних точек $A$ соответственно; $C([0,T], R^d)$ - пространство непрерывных функций из $[0,T]$ в $R^d$; $B(A,\varepsilon)=\{x \in X : inf\{|x-y| : y \in A\} \leq \varepsilon\}$ - замкнутая $\varepsilon$ -оболочка подмножества $A$ нормированного пространства $(X, |\cdot|)$, причем $B(0,\varepsilon) \equiv B(\varepsilon)$; $\mathring{B}(A,\varepsilon)=int\, B(A,\varepsilon)$; $\mathring{B}(\varepsilon) \equiv \mathring{B}(0,\varepsilon)$; $a \wedge b = min\{a,b\}$ - меньшее из чисел $a, b \in R$; $dom f$ - область определения функции $f$.

Для подмножеств $A, \mathcal{D}$ нормированного пространства $(X, |\cdot|)$ число $\rho(A,\mathcal{D})= inf\{\lambda \geq 0 : A \subseteq B(\mathcal{D},\lambda),\ \mathcal{D} \subseteq B(A,\lambda)\}$ называется расстоянием Хаусдорфа между ними. Известно, что расстояние $\rho$ превращает множество $\mathcal{K}(R^d)$ в полное метрическое пространство.

Предположим, что

П.1) функция $F: B(2a) \to \mathcal{K}(R^d)$, $a>0$ непрерывна в метрике Хаусдорфа.

Нас будет интересовать вопрос: существует ли решение включения $\dot{x}(t) \in ex\, F(x(t))$, $x(0)=0$, на каком-либо отрезке $[0,T]$ ? В настоящей работе дается положительный ответ на этот вопрос, причем правый конец $T$ интервала существования выбирается следующим образом: в силу непрерывности функции $F$ можно считать, что

П.2) $\exists c>0 : F(x) \subseteq \mathring{B}(c)$, $\forall x \in B(2a)$. Выберем тогда $T$ таким, что

П.3) $0<T<a/c$. Это условие гарантирует, что за время $T$ решение не выйдет за пределы шара $B(a)$.

Итак, в дальнейшем мы всегда предполагаем справедливость П.1.-П.3.

## § 2. Вспомогательные результаты

В этом параграфе описаны основные вспомогательные объекты и сформулированы некоторые их свойства, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Для $u \in K \in \mathcal{K}(R^d)$, $e \in R^d$ положим

$$er(K,u)= max\{\langle e, y-z \rangle : y,z \in K,\ u=(y+z)/2\}.$$

Отметим, что $er\, K(u)$, корректно определенное в силу компактности $K$, всегда неотрицательно.

Л е м м а 1 [5]. а) Функция $u \to er(K,u)$ вогнута;

б) функция $er(K,u)=0$ при $u\in ex\,K$. Если же $e_i$, $i=1,\dots,d$, образует базис пространства $R^d$, то из $e_i r(K,u)=0$, $i=1,\dots,d$, следует, что $u\in ex\,K$;

в) если $\rho(K_m,K)\to 0$, $u\in K$, $u_m\in K_m\in\mathcal{K}(R^d)$, $m\in N$, и $|u_m-u|\to 0$, то $\lim\limits_{m\to\infty}\sup er(K_m,u_m)\le er(K,u)$.

Введем следующее обозначение:

$$\mathcal{T}(e,\delta)=\{x\in\mathcal{T}(F):\int_0^T er(F(x(t)),\dot{x}(t))\ge\delta\},$$
$$\delta\ge 0,\ e\in R^d.$$

Лемма 2 [5]. Для всех $\delta\ge 0$, $e\in R^d$ множества $\mathcal{T}(e,\delta)$ замкнуты в $C([0,T],R^d)$.

Перейдем теперь к определению дифференциальных включений с памятью.

Назовем $n$-уровневой системой $S$ на $[0,T]\times R^d$ тройку $\{\mathcal{P},\mathcal{C},\mathcal{F}\}$, состоящую из

1) $n+1$ конечного разбиения отрезка $[0,T]$,

$$\mathcal{P}_k=\{t_0^k,t_1^k,\dots,t_{p_k}^k\},\quad k=1,\dots,n+1,$$

где $t_i^k=iT/p_k$, а $p_{k+1}/p_k$ - целое число для всех $k\le n$;

2) $n$ конечных открытых покрытий шара $B(a)$

$$\mathcal{C}_k=\{V_1^k,\dots,V_{q_k}^k\}\quad k=1,\dots,n;$$

3) конечного множества $\mathcal{F}$ непрерывных $R^d$-значных функций $x\to f(i_1,\dots,i_n,j)(x)$, $i_k\in\{1,\dots,q_k\}$, $1\le k\le n$, $j\in\{0,\dots,p_{n+1}-1\}$, каждая из которых определена на некотором открытом подмножестве $R^d$.

Для $t\in[0,T]$, $1\le k\le n$, положим

$$\tau^k(t)=\max\{t_i^k:0\le i\le p_k,\ t_i^k\le t\},\qquad (2)$$

$$\sigma_{n+1}(t)=\max\{m:0\le m\le p_{n+1},\ t_m^{n+1}\le t\}.\qquad (3)$$

Абсолютно непрерывная функция $y:[0,T]\to R^d$, $y(0)=0$, называется $\delta$-решением $n$-уровневой системы $S$, если существуют $n$ функций

$$\sigma_k:\{t_0^k,t_1^k,\dots,t_{p_k-1}^k\}\to\{1,\dots,q_k\},\quad 1\le k\le n,$$

такие, что

$$y(t_i^k) \in cl\, V_{\sigma_k}^k(t_i^k) \quad , \forall\, i,k \, ; \tag{4}$$

$$\dot{y}(t) \in f[\sigma_1(\tau^1(t)), \sigma_2(\tau^2(t)), \dots, \sigma_n(\tau^n(t)), \sigma_{n+1}(t)] + \\ + B(\delta) \quad \text{п.в. на } [0,T]. \tag{5}$$

Множество $\delta$ -решений системы $S$ обозначается через $\mathcal{T}_\delta(S)$, причем множество $\mathcal{T}_0(S)$ $0$-решений обозначается через $\mathcal{T}(S)$, а $0$-решения называются просто решениями.

Таким образом, на каждом интервале $[t_i^{n+1}, t_{i+1}^{n+1}]$, $i = 0, \dots, p_{n+1}-1$, в правой части включения (5) с памятью стоит одна и та же функция из $\mathcal{F}$. Замена одной функции из $\mathcal{F}$ на другую в правой части (5) может произойти только после перехода через узел разбиения $\mathcal{P}_{n+1}$, причем изменение $k$-го элемента мультииндекса $(i_1, \dots, i_n, j)$, которым занумерованы функции из $\mathcal{F}$, стоящие в правой части (5), может произойти только после перехода через узел разбиения $\mathcal{P}_k$, $k = 1, \dots, n$.

Назовем $n$ -уровневую систему допустимой для включения (1), если для любого мультииндекса $(i_1, \dots, i_n, j)$ справедливы:

1) $f(i_1, \dots, i_n, j) \in F(x), \forall x \in dom\, f(i_1, \dots, i_n, j)$;

2) $B(V_{i_n}^n, cT/p_n) \cap B(a) \subset dom\, f(i_1, \dots, i_n, j)$.

Заметим, что множество допустимых систем непусто. Действительно, для того чтобы получить допустимую $1$-уровневую систему, достаточно взять $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \{0, T\}$, $\mathcal{C}_1 = \{V_1^1\}$, где $V_1^1$ - любая открытая окрестность шара $B(a)$, $\mathcal{F} = \{f(1,0)\}$, где $f(1,0)$ - любой непрерывный селектор функции $F : B(2a) \to \mathcal{K}(R^d)$. Такой селектор всегда существует [3].

Л е м м а 3 [1]. Для любой допустимой $n$-уровневой, $n \in N$, системы $S$ множество $\mathcal{T}(S)$ ее решений непусто и компактно в $C([0,T], R^d)$. Более того, многозначное отображение $\delta \to \mathcal{T}_\delta(S)$ из $[0,1]$ в $C([0,T], R^d)$ полунепрерывно сверху в метрике Хаусдорфа, т.е. для любых $\delta \in [0,1]$, $\varepsilon > 0$ найдется такое $\gamma(\delta, \varepsilon) > 0$, что $\mathcal{T}_{\delta'}(S) \subseteq B(\mathcal{T}_\delta(S), \varepsilon)$, как только $|\delta - \delta'| \le \gamma(\delta, \varepsilon)$.

Следующая теорема - обобщенная теорема Бэра - является основой метода Брессана-Коломбо. Для того чтобы ее сформулировать, нам потребуется несколько определений.

Пусть $\mathcal{O}$ - семейство непустых компактов полного метрического пространства $M$. Множество $P \subseteq M$ называется нигде не плотным относительно $\mathcal{O}$, если для любых $K \in \mathcal{O}$, $\varepsilon > 0$ найдется такой $K' \in \mathcal{O}$, что

$K' \subset B(K,\varepsilon)\setminus cl P$, и называется $\mathcal{O}$-тонким, если оно является не более чем счетным объединением нигде не плотных относительно $\mathcal{O}$ множеств.

Заметим, что если $\mathcal{O} = \{ \{x\} : x \in M \}$ - семейство всех синглетонов, то нигде не плотность относительно $\mathcal{O}$ есть ничто иное, как обычная нигде не плотность. Это и дает основание назвать теорему 1 обобщенной теоремой Бэра о категориях.

Т е о р е м а 1 [1]. Дополнение $\mathcal{O}$-тонкого множества $P$ в $M$ непусто. Более точно, $cl(M\setminus P)\cap K \neq \emptyset$, $\forall k \in \mathcal{O}$.

Дальнейший план наших действий, который будет реализован в следующем параграфе, таков:

1) фиксируем семейство $\mathcal{O}$ непустых компактов пространства $C([0,T], R^d)$, а именно: под семейством $\mathcal{O}$ будем понимать совокупность множеств $\mathcal{T}(S)$ решений всевозможных допустимых систем $S$ всех уровней $n \in N$;

2) доказываем, что для всех $e \in R^d$, $\delta > 0$ множества $\mathcal{T}(e, \delta)$ нигде не плотны в $\mathcal{T}(F)$ относительно $\mathcal{O}$;

3) применяем теорему 1 к $\mathcal{O}$-тонкому множеству

$$\bigcup_{i=1}^{d} \bigcup_{k\in N} \mathcal{T}(e_i, k^{-1}),$$

где $e_i$, $i=1,\dots,d$, образуют базис пространства $R^d$, и получаем существование решения.

## § 3. Существование решения

Итак, в этом параграфе $\mathcal{O} = \{\mathcal{T}(S) : S$ - допустимая система$\}$. Мы начинаем доказывать нигде не плотность $\mathcal{T}(e, \delta)$ в $\mathcal{T}(F)$ относительно $\mathcal{O}$ со следующей леммы о разложении, которая является упрощенным аналогом леммы 9.6 [1].

Л е м м а 4. Возьмем некоторые $e \in R^d$, $\varepsilon > 0$, $\xi \in \mathring{B}(2a)$, $v \in F(\xi)$. Тогда существуют окрестность $V$ точки $\xi$, набор из $d+1$ непрерывной функции $g_1, \dots, g_{d+1} : V \to R^d$ и рациональные коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1} \geq 0$ со следующими свойствами:

1) $\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1$;

2) $g_i(x) \in F(x)$;

3) $| v - \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i g_i(x_i) | < \varepsilon$;

4) $\rho(F(x), g_i(x)) < \varepsilon$ -

для всех $x, x_1, \dots, x_{d+1} \in V$, $i=1,\dots,d+1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$v = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i' v_i$$

для некоторых $v_i \in ex\, F(\xi), \lambda_i' \geq 0, \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i' = 1$ (см. [10]), то найдутся такие рациональные числа $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, d+1$, что

$$\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1 , \quad | v - \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i v_i | \leq \varepsilon / 2 .$$

Тогда лемма 1в, в силу непрерывности функции $F$, дает нам существование такой окрестности $V$ точки $\xi$ и такого $0 < \delta < \varepsilon / 2$, что

$$B_i(\xi') \equiv B(v_i, \delta) \cap F(\xi') \neq \emptyset , \forall \xi' \in V,$$

$$er(F(\xi'), v') < \varepsilon , \forall \xi' \in V, \forall v' \in B_i(\xi'), \; i = 1, \ldots, d+1.$$

Рассмотрим теперь многозначные функции $\xi' \to B_i(\xi'), i = 1, \ldots, d+1$, из $V$ в $\mathcal{K}(R^d)$. Так как функция $F$ непрерывна и $int B(v_i, \delta) \neq \emptyset$, то они полунепрерывны снизу [ 3]. Следовательно, по теореме Майкла [ 3], у них есть непрерывные селекторы $g_i : V \to R^d$, $i = 1, \ldots, d+1$.

Нетрудно видеть, что выбранные таким образом $V$, $\lambda_i$, $g_i$ удовлетворяют свойствам 1 - 4, что и доказывает лемму.

Следующая лемма - об аппроксимации - ключевая для получения нигде не плотности относительно семейства $\mathcal{O}$. Она является аналогом теоремы 10.1 [1] и приводится здесь с подобным доказательством в надежде, что адаптированное к более простому случаю оно окажется легче для восприятия, чем в оригинале.

Л е м м а 5. Пусть $S = (\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ - допустимая $n$ -уровневая система. Для любых $e \in R^d$, $\delta > 0$ существует $(n+1)$-уровневая система $\hat{S} = (\hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{C}}, \hat{\mathcal{F}})$ такая, что

$$\mathcal{T}(\hat{S}) \subseteq B(\mathcal{T}_{\delta}(S), \delta) \setminus \mathcal{T}(e, \delta T).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. <u>Шаг 1</u>. Будем обозначать мультииндекс $(k_1, \ldots, k_n)$ через $\bar{k}$, а множество тех $\bar{k}$, что

$$\xi \in B(V_{k_n}^n, cT/p_n),$$

через $\Gamma(\xi)$. Таким образом, по определению допустимой системы, $\bar{k} \in \Gamma(\xi)$ означает, что для всех $j$ область определения функции $f(\bar{k}, j)$ является открытой окрестностью точки $\xi$.

<u>Шаг 2</u>. Для каждого $\xi \in B(a)$ применим лемму 4 с $v = f[\bar{k}, j](\xi)$, где $[\bar{k}, j]$ пробегает все такие значения, что $\bar{k} \in \Gamma(\xi)$. Пользуясь дополнительно непрерывностью $f[\bar{k}, j]$, открытостью $dom\, f[\bar{k}, j]$ и компактностью $B(V_i^n, cT/p_n)$, получим, что существуют радиус

$b_\xi > 0$, конечный набор функций $g_1, \dots, g_{d+1} : \mathring{B}(\xi, b_\xi) \to R^d$ и рациональные коэффициенты $\lambda_1[\bar{k}, j], \dots, \lambda_{d+1}[\bar{k}, j] \geq 0$ такие, что

P.1. $B(\xi, b_\xi) \subset dom\, f[\bar{k}, j]$ ;

P.2. $| f[\bar{k}, j](x) - f[\bar{k}, j](\xi) | < \delta/2$ ;

P.3. $\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i [\bar{k}, j] = 1$;

P.4. $| f[\bar{k}, j](\xi) - \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i [\bar{k}, j] g_i(x_i) | < \delta/2$;

P.5. $g_i(x) \in F(x)$ ;

P.6. $er(F(x), g_i(x)) < \delta$ ;

для всех $x, x_1, \dots, x_{d+1} \in \mathring{B}(\xi, b_\xi)$, $\bar{k} \in \Gamma(\xi)$, $i = 1, \dots, d+1$ , и

P.7. $\forall i \in \{1, \dots, q_n\}$ , если $B(\xi, b_\xi) \cap B(V_i^n, cT/p_n) \neq \emptyset$, то $\xi \in B(V_i^n, cT/p_n)$ .

<u>Шаг 3</u>. Семейство $\{ \mathring{B}(\xi, b_\xi/2) : \xi \in B(a) \}$ образует открытое покрытие компакта $B(a)$ . Возьмем его конечное подпокрытие $\{ \mathring{B}(\xi_z, b_z/2) \}_{z=1}^{q_{n+1}}$ и обозначим через $g_i^z$, $\lambda_i^z[\bar{k}, j]$, $i = 1, \dots, d+1$, соответственно функции и рациональные коэффициенты, которые были построены на шаге 2 для точек $\xi_z$ , $z = 1, \dots, q_{n+1}$ .

<u>Шаг 4</u>. Построение разбиений $\hat{\mathcal{P}}$ . Для $1 \leq i \leq n$ новые разбиения совпадают со старыми, т.е. $\hat{\mathcal{P}}_i = \mathcal{P}_i$ . Чтобы построить разбиения $\hat{\mathcal{P}}_{n+1}$ и $\hat{\mathcal{P}}_{n+2}$, выберем такое $\ell \in N$ , что

$$T/\ell \cdot p_{n+1} < \min\{ b_i/2c : i = 1, \dots, q_{n+1} \} \wedge \delta/2c, \quad (6)$$

и такое $p \in N$ , что для любых $\bar{k}, j, i, z$ числа $p \cdot \lambda_i^z[\bar{k}, j]$ - целые. Последний выбор возможен, так как все коэффициенты $\lambda_i^z[\bar{k}, j]$ рациональны. Теперь положим $\hat{p}_{n+1} = \ell \cdot p_{n+1}$ , $\hat{p}_{n+2} = p \cdot \hat{p}_{n+1}$,

$\hat{\mathcal{P}}_{n+1} = \{ \hat{t}_i^{n+1} : i = 0, \dots, \hat{p}_{n+1} \}$, где $\hat{t}_i^{n+1} = iT/\hat{p}_{n+1}$ ,

$\hat{\mathcal{P}}_{n+2} = \{ \hat{t}_i^{n+2} : i = 0, \dots, \hat{p}_{n+2} \}$ , где $\hat{t}_i^{n+2} = iT/\hat{p}_{n+2}$ .

<u>Шаг 5</u>. Построение покрытий $\hat{\mathcal{C}}$ . Для $1 \leq i \leq n$ положим $\hat{\mathcal{C}}_i = \mathcal{C}_i$ . Последнее покрытие $\hat{\mathcal{C}}_{n+1}$ образуют шары $\mathring{B}(\xi_z, b_z/2)$, $z = 1, \dots q_{n+1}$.

<u>Шаг 6</u>. Построение функций $\hat{\mathcal{F}}$ . Так же, как в (2), положим

$$\hat{\tau}^k(t) = \max\{ \hat{t}_i^k : 0 \leq i \leq \hat{p}_k, \hat{t}_i^k \leq t \},$$

и обозначим через $\omega_1$ и $\omega_2$ длины $T/\hat{p}_{n+1}$ и $T/\hat{p}_{n+2}$ интервалов разбиений $\hat{\mathcal{P}}_{n+1}$ и $\hat{\mathcal{P}}_{n+2}$ соответственно. Наша задача - для всех

$\bar{k}=(k_1,\dots,k_n)$, $z\in\{1,\dots,\hat{q}_{n+1}\}$, $s\in\{0,\dots,\hat{p}_{n+2}-1\}$ определить функции $\hat{f}[\bar{k},z,s]$. Рассмотрим два случая:

А. $\bar{k}\in\Gamma(\xi_z)$, т.е. $\xi_z\in B(V_{i_n}^n, cT/p_n)$. Так как новое разбиение $\hat{\mathcal{P}}_{n+1}$ мельче, чем старое $\mathcal{P}_{n+1}$, то существует единственное $j=j(s)\in\{0,\dots,p_{n+1}-1\}$ такое, что

$$I\equiv[\hat{\tau}^{n+1}(s\omega_2),\ \hat{\tau}^{n+1}(s\omega_2)+\omega_1)\subseteq[t_j^{n+1},t_{j+1}^{n+1}],$$

т.е. $t_j^{n+1}=\tau^{n+1}(s\omega_2)$.

В силу Р.1, Р.4, на шаре $B(\xi_z, b_z)$ функция $f[\bar{k},j]$ может быть приближена выпуклой комбинацией функций $g_i^z$ с коэффициентами $\lambda_i^k[\bar{k},j]$, $i=1,\dots,d+1$. Чтобы идти вдоль траектории дифференциального уравнения $\dot{x}(t)=f[\bar{k},j](x(t))$ на интервале $I$, решение $y$ новой системы $\hat{S}$ должно удовлетворять уравнениям $\dot{y}(t)=$ $=g_i^z(y(t))$ на подынтервалах $I_k\subseteq I$, длины которых пропорциональны $\lambda_i^z[\bar{k},j]$. Имея это в виду, положим $\hat{f}[\bar{k},z,s]=g_i^z$, если $[s\omega_z,(s+1)\omega_z)\subseteq I_i$, где

$$I_i=[\hat{\tau}^{n+1}(s\omega_2)+\omega_1\cdot\sum_{m=1}^{i-1}\lambda_m^z[\bar{k},j(s)],$$
$$\hat{\tau}^{n+1}(s\omega_2)+\omega_1\sum_{m=1}^{i}\lambda_m^z[\bar{k},j(s)]) . \qquad (7)$$

Б. $\bar{k}\,\bar{\in}\,\Gamma(\xi_z)$. Тогда положим $\hat{f}[\bar{k},z,s]$ равной любому непрерывному селектору функции $F:B(2a)\to\mathcal{K}(R^d)$.

Шаг 7. Система $\hat{S}=(\hat{\mathcal{P}},\hat{\mathcal{C}},\hat{\mathcal{F}})$ допустима для включения (1). Действительно, включение $\hat{f}[\bar{k},z,s](x)\in F(x)$ сразу следует из построения множества $\hat{\mathcal{F}}$ как в случае А, так и в случае Б. А то, что $dom\hat{f}[\bar{k},z,s]$ является окрестностью множества $B(V_z^{n+1}, cT/\hat{p}_{n+1})\cap$ $\cap B(a)$ в случае Б очевидно и следует из того, что, в силу (6),

$$dom\, g_i^z=\mathring{B}(\xi_z,b_z)\supset B(\mathring{B}(\xi_z,b_z/2),cT/\hat{p}_{n+1})$$

в случае А, если вспомнить, что $V_z^{n+1}=\mathring{B}(\xi_z,b_z/2)$.

Шаг 8. Так как система $\hat{S}$ допустима, то по лемме 3 множество $\mathcal{T}(\hat{S})$ непусто. Возьмем некий $y\in\mathcal{T}(\hat{S})$ и так же, как и в (3), положим $\sigma_{n+2}(t)=max\{i:\hat{t}_i^{n+2}\le t\}$. По определению решения системы $\hat{S}$ существуют такие отображения

$$\sigma_k:\{\hat{t}_0^k,\dots,\hat{t}_{p_k-1}^k\}\to\{1,\dots,\hat{q}_k\},\ k=1,\dots,n+1,$$

что

$$y(\hat{t}_i^k)\in cl\,\hat{V}^k_{\sigma_k(\hat{t}_i^k)}\ ,\quad 1\le k\le n+1,\ 0\le i\le\hat{p}_k-1, \qquad (8)$$

$$\dot{y}(t) = \hat{f}[\sigma_1(\hat{\tau}^1(t)), \ldots, \sigma_{n+1}(\hat{\tau}^{n+1}(t)), \sigma_{n+2}(t)](y(t)). \quad (9)$$

Шаг 9. На самом деле при формировании правой части в (9) всегда реализуется случай А, т.е.

$$\xi_{\sigma_{n+1}}(t) \in B(\hat{V}^n_{\sigma_n}(t), cT/\hat{p}_n), \ \forall t \in [0,T], \quad (10)$$

где для краткости $\sigma_k(t)$ обозначает $\sigma_k(\hat{\tau}^k(t))$. Действительно, в силу (8) имеем

$$y(\hat{\tau}^{n+1}(t)) \in cl\, \hat{V}^{n+1}_{\sigma_{n+1}(t)} = B(\xi_{\sigma_{n+1}}(t), b_{\sigma_{n+1}(t)}/2), \quad (11)$$

$$y(\hat{\tau}^n(t)) \in cl\, \hat{V}^n_{\sigma_n(t)}. \quad (12)$$

Так как в силу П.2 решение $y$ удовлетворяет условию Липшица с константой $c > 0$, то из (12) следует

$$y(\hat{\tau}^{n+1}(t)) \in B(\hat{V}^n_{\sigma_n}(t), cT/\hat{p}_n). \quad (13)$$

Сравнивая (11) и (13), получаем

$$B(\xi_{\sigma_{n+1}}(t), b_{\sigma_{n+1}(t)}/2) \cap B(\hat{V}^n_{\sigma_n}(t), cT/\hat{p}_n) \neq \emptyset,$$

что по свойству Р.7 влечет (10).

Шаг 10. Так как всегда реализуется случай А, то $\dot{y}(t) = g_i^z(y(t))$ п.в. на $[0,T]$ для некоторых зависящих от $t$ номеров $i, z$. Тогда по свойству Р.6 имеем

$$\int_0^T er(F(y(t)), \dot{y}(t)) = \int_0^T er(F(y(t)), g_{i(t)}^{z(t)}(y(t))) \leq \delta T. \quad (14)$$

Шаг 11. В силу (14) для завершения доказательства достаточно показать, что $y \in B(\mathcal{T}_\delta(S), \delta)$. Определим функцию $z$ следующим образом: она совпадает с $y$ в узлах $t_i^{n+1}$ разбиения $\hat{\mathcal{P}}_{n+1}$ и линейна на каждом интервале $[\hat{t}_i^{n+1}, \hat{t}_{i+1}^{n+1}]$, $i = 0, \ldots, \hat{p}_{n+1} - 1$. Тогда (6) влечет

$$|y(t) - z(t)| \leq \delta, \ \forall t \in [0,T], \quad (15)$$

поскольку в силу П.2 функция $y$ удовлетворяет условию Липшица с константой $c > 0$.

Шаг 12. Докажем, что $z \in \mathcal{T}_\delta(S)$. Возьмем в качестве функций $\sigma_k$, $k = 1, \ldots, n$, участвующих в определении $\delta$-решений, первые $n$ функций $\hat{\sigma}_k$, $k = 1, \ldots, n$, участвующие в определении решения $y$. Тогда (4) очевидно выполнено. Чтобы доказать (5), возьмем некоторый интервал $\mathcal{J}=[\hat{t}^{n+1}_m, \hat{t}^{n+1}_{m+1})$ разбиения $\hat{\mathcal{P}}_{n+1}$ и для $t\in\mathcal{J}$ положим

$$[\bar{k},j]\equiv[k_1,\dots,k_n,j]=$$
$$=[\sigma_1(\tau^1(t)),\dots,\sigma_n(\tau^n(t)),\sigma_{n+1}(t)],$$
$$[\bar{k},\tau,\sigma_{n+2}(t)]=[\hat{\sigma}_1(\vec{\tau}^{\,1}(t)),\dots$$
$$\dots,\hat{\sigma}_n(\vec{\tau}^{\,n}(t)),\hat{\sigma}_{n+1}(\vec{\tau}^{\,n+1}(t)),\sigma_{n+2}(t)].$$

По определению функций $y$, $z$ п.в. на $\mathcal{J}$, справедливо

$$\dot{y}(t)=\hat{f}[\bar{k},\tau,\sigma_{n+2}(t)](y(t)),$$
$$\dot{z}(t)=\frac{\hat{P}_{n+1}}{T}\int_{\mathcal{J}} f[\bar{k},\tau,\sigma_{n+2}(s)](y(s))=$$
$$=\sum_{i=1}^{d+1}\lambda_i^{\tau}[\bar{k},j]\Big(\frac{1}{\mu I_i}\int_{I_i} g_i^{\tau}(y(s))\Big),$$

где отрезки $I_i$ определены формулой (7).

Более того, поскольку из (6) и П.2 следует, что $y(t)$, $z(t)\in$ $\in B(\xi_\tau, b_\tau)$, $t\in\mathcal{J}$, то в силу Р.2, Р.4 имеем

$$|f[\bar{k},j](z(t))-\dot{z}(t)|\le|f[\bar{k},j](z(t))-f[\bar{k},j](\xi_\tau)|+$$
$$+|f[\bar{k},j](\xi_\tau)-\sum_{i=1}^{d+1}\lambda_i^{\tau}[\bar{k},j]\Big(\frac{1}{\mu I_i}\int_{I_i} g_i^{\tau}(y(s))\Big)|\le$$
$$\le\delta/2+\delta/2=\delta,$$

что доказывает (5). Но справедливость (5) и (15) как раз и означает, что $y\in B(\mathcal{T}_\delta(S),\delta)$. Лемма доказана.

Следствие 1. Для любых $e\in R^d$, $\delta>0$ множество $\mathcal{T}(e,\delta)$ нигде не плотно в $\mathcal{T}(F)$ относительно $\mathcal{O}$.

Доказательство. Возьмем некоторые $\mathcal{T}(S)\in\mathcal{O}$, $\varepsilon>0$. По лемме 3 существует такое $0<\beta\le\varepsilon/2$, что $\mathcal{T}_\beta(S)\subseteq B(\mathcal{T}(S),$ $\varepsilon/2)$, а по лемме 5 найдется такая система $\hat{S}$, что $\mathcal{T}(\hat{S})\subseteq B(\mathcal{T}_\beta(S),\beta)$. Следовательно, учитывая, что $\beta\le\varepsilon/2$, имеем

$$\mathcal{T}(\hat{S})\subseteq B(\mathcal{T}_\beta(S),\beta)\subseteq B(B(\mathcal{T}(S),\varepsilon/2),\beta)\subseteq$$
$$\subseteq B(\mathcal{T}(S),\varepsilon).$$

Но поскольку, кроме того, $\mathcal{T}(\hat{S})\subseteq\mathcal{T}(F)\setminus\mathcal{T}(e,\delta)$ по той же лемме 5, а по лемме 2 множество $\mathcal{T}(e,\delta)$ замкнуто, то по определению $\mathcal{T}(e,\delta)$ нигде не плотно относительно $\mathcal{O}$.

Т е о р е м а 2. Множество $\mathcal{T}(ex\,F)$ непусто.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По следствию 1 множество $\mathcal{D}=\bigcup_{i=1}^{d}\bigcup_{k\in N}\mathcal{T}(e_i,k^{-1})$, где $e_i, i=1,\dots,d$, образуют базис пространства $R^d$, является $\mathcal{O}$-тонким. По лемме 2 (случай $\delta=0$), множество $\mathcal{T}(F)$ замкнуто в полном пространстве $C([0,T],R^d)$ и, следовательно, полно. Тогда $\mathcal{T}(F)\setminus\mathcal{D}\neq\emptyset$ по теореме 1. Остается заметить, что если $x\in\mathcal{T}(F)\setminus\mathcal{D}$, то $e_i z(F(x(t)),\dot{x}(t))=0$ п.в. на $[0,T]$, что, по лемме 1 б, означает $\dot{x}(t)\in ex\,F(x(t))$ п.в. на $[0,T]$.

С л е д с т в и е. Пусть функция $F:R^d\to 2^{R^d}$ такова, что функция $co\,F:\,x\to co\,F(x)$ принимает компактные значения и непрерывна в метрике Хаусдорфа. Тогда включение $\dot{x}(t)\in F(x(t)),\ x(0)=0$, имеет локальное решение.

Результаты этой работы были анонсированы в [5, § 4].

Поступила в ред.-изд. отдел
16 ноября 1989 г.

Л и т е р а т у р а

1. Bressan A., Colombo G. Generalized Baire category and differential inclusions in Banach spaces // J. different. equat. - 1988. - V. 76, N 1. - P. 135-158.

2. Филиппов А.Ф. О существовании решений многозначных дифференциальных уравнений // Мат. заметки.- 1971.- Т.10, № 3.- С. 307-313.

3. Aubin J.P., Cellina A. Differential inclusions.- Berlin etc.: Springer, 1984. - 342 p.

4. Phan Van Chuong. A result on the existence of solutions for multivalued differential equations // Comp. Rend. Paris Acad. sci. - 1985. - T. 301. - P. 399-402.

5. Суслов С.И. Нелинейный бэнг-бэнг принцип в $R^n$. - Новосибирск, 1989.- 14 с.- (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние,Ин-т математики,№ 11).

6. Bressan A. On differential relations with lower continuous right-hand side. An existence theorem // J. different.equat.- 1980. - V. 37, N 1. - P. 89-97.

7. Cellina A. On the differential inclusion $\dot{x}\in[-1, 1]$ //Atti. Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fys., mat. e natur. Ser. VIII. - 1980. - V. 69. - P. 1-6.

8. De Blasi F., Pianigiani G. A Baire category approach to the existence of solutions of multivalued differential equations in Banach spaces // Func. ekvacioj. - 1982. - V. 25. - P. 153-162.

9. De Blasi F., Pianigiani G. Differential inclusions in Banach spaces // J. different. equat. - 1987. - V. 66. - P. 208-229.

10. Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ. - М.: Мир, 1973. - 469 с.