Управляемые системы, ИМ СО РАН, 1993 г., вып. 31

УДК 519.1

ЗАДАЧА СИНТЕЗА НАДЕЖНОЙ СЕТИ СВЯЗИ ОГРАНИЧЕННОГО ВЕСА

А.И.Ерзин, Г.Г.Паршин

Работа посвящена задаче синтеза надежной сети связи с ограничением на вес. Рассматриваются двуполюсные сигнальные стохастические сети, т.е. сети, для которых, во-первых, потребность в связи сводится к необходимости иметь хотя бы один путь передачи сигнала из источника в сток, во-вторых, с неабсолютно надежными элементами сети. Надежностью связи между источником сигнала и его приемником в сетях такого типа называют вероятность исправного состояния хотя бы одного пути из источника в сток [1,2]. Впервые проблема создания надежной сети из ненадежных элементов рассмотрена Дж.Нейманом в [3], затем Мур и Шеннон посвятили этому вопросу работу [4]. В [5-10] предлагались различные подходы к решению рассматриваемой задачи для сетей специального вида (последовательно-параллельных сетей).

В данной работе вводится понятие сети элементарной T-структуры и предлагается псевдоэффективный алгоритм A нахождения точного решения задачи для сети данного типа. Далее вводится понятие сети многоуровневой T-структуры и предлагается для нее псевдоэффективный точный алгоритм B. Приводятся оценки качества данных алгоритмов.

1. Постановка задачи

Задана сеть $G=(V,E)$, где E - множество дуг, а $V=\{s,1,\dots,N,t\}$ - множество вершин (s-источник, t-сток). Работа каждой дуги $(i,j)\in E$ характеризуется вероятностью ее срабатывания $p_{ij}(r_{ij})$ в зависимости от затраченного ресурса $r_{ij}=0,\dots,R$.

Пусть $P(S)$ - вероятность передачи сигнала из источника s в сток t по подсети $S\subset G$. Требуется решить задачу:

$$P(S) \longrightarrow \max_{S\subset G}, \tag{1}$$

$$\sum_{(i,j)\in S} r_{ij} \le R, \tag{2}$$

где R - заданное положительное число.

Если, кроме того, каждая вершина $k\in V\setminus\{s,t\}$ также неабсолютно надежна, т.е. имеет вероятность срабатывания $p_k(r_k)$ в зависимости от

затраченного ресурса r_k, $r_k=0,\dots,R$, то полученная задача очевидным образом сводится к задаче (1-2). Для этого заменим каждую вершину $k\in V\setminus\{s,t\}$ на дугу (k',k) с теми же значениями вероятности срабатывания.

Задача (1-2) относится к классу NP-трудных. Покажем это. Рассмотрим сеть в виде некоторого числа M независимых путей. Каждый путь m имеет вес $\tilde r_m$ и вероятность передачи сигнала $\tilde p_m < 1$. Введем переменные

$$x_m=\begin{cases} 1, & \text{если } m\text{-й путь входит в } S,\\ 0 & \text{- в противном случае.}\end{cases}$$

Тогда надежность передачи сигнала по сети S составит

$$P(S)= 1-\prod_{m=1}^{M}(1-\tilde p_m)^{x_m}$$

и задача (1-2) сводится к следующей NP-трудной задаче о ранце:

$$\prod_{m=1}^{M}(1-\tilde p_m)^{x_m} \longrightarrow \min_{x_m},$$

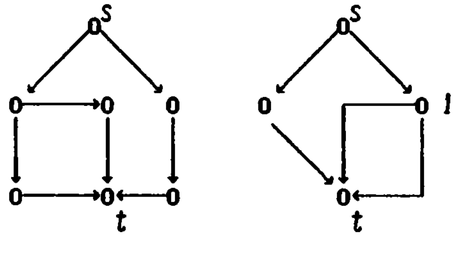
$$\sum_{m=1}^{M}\tilde r_m x_m \le R,\quad x_m\in\{0,1\},\ m=1,\dots,M.$$

2. Метод решения

2.1. Сети элементарной T-структуры

Определение 1. Договоримся называть сетью элементарной T-структуры (короче - элементарной T-структурой) такой граф $G=(V,E)$, что подграф $T=(V\setminus\{t\},\ E\setminus\{(l,t)\in E\})$ является деревом с корнем в источнике s (см. рис. 1а).

Далее везде будем иметь в виду только сети двуполюсные и без висячих вершин, т.е. такие, что любая вершина $l\in V$ принадлежит хотя бы одному пути из вершины s в вершину t. Не ограничивая общности, будем рассматривать графы без мультидуг (дуга (l,t) на рис. 1б).



а) б)

Рис. 1

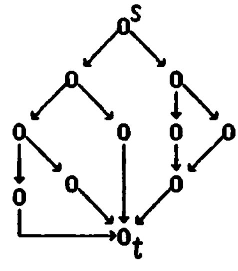


Рис. 2

Обозначим через:

d_i^+ - полустепень исхода вершины i;

d_i^- - полустепень захода вершины i.

Сеть элементарной T-структуры $G=(V,E)$ со стоком t и истоком s обладает следующими свойствами:

A1) Неравенство $d_i^- > 1$ может выполняться только для вершины t.

A2) $\sum\limits_{i\in V} d_i^+ \le 2N$.

A3) Число всех путей в G из вершины s в вершину t равно d_t^-.

Предлагается алгоритм A нахождения точного решения задачи (1-2) методом динамического программирования и оценивается качество данного алгоритма.

2.2. Алгоритм A

Пусть на построение сети S используется r единиц ресурса. Обозначим через $P_{it}(r)$ вероятность передачи сигнала из вершины i в сток t по самой надежной подсети, чей вес не превосходит r. Введем следующие обозначения:

z_{ij} - путь из вершины i в вершину j;

$I_k=\left\{i\in V \,\middle|\, |z_{si}|=k\right\}$ - множество вершин, которое назовем k-м уровнем;

$V_i=\left\{j\in V \mid (i,j)\in E\right\}$;

$K=\max\left\{k \mid I_k\ne\{t\}\right\}$.

Алгоритм A состоит из двух этапов: прямого и обратного ходов. На 1 этапе последовательно рассматриваем уровни $K,K-1,\ldots,0$. На каждом уровне k для всех вершин $i\in I_k$ вычисляем значение функции $P_{it}(r)$, $r=0,\ldots,R$, зная значения функций $P_{jt}(r)$ для $j\in V_i$. Величина $P_{st}(R)$ - искомая надежность сети. На этапе обратного хода по значениям функций $P_{it}(r)$ находим оптимальные значения аргумента r^*, тем самым находим входящие в решение дуги и вершины.

1 ЭТАП

<u>Шаг 1.</u> Положим $k=K$. Для всех вершин $i\in I_k$ имеем:

$$P_{it}(r)=p_{it}(r),\ r=0,\ldots,R.$$

<u>Шаг 2.</u> Положим $k=k-1$. Берем любую вершину $i\in I_k$. Для всех вершин $j\in V_i$ и $r_j=0,\ldots,R$, найдем

$$F_j(r_j)=\max_{r_{jt},r_{ij}} P_{jt}(r_{jt})\cdot p_{ij}(r_{ij}),$$

$$r_{jt}+r_{ij} \le r_j, \quad r_{jt}, r_{ij} \in \mathbb{Z}_0^+.$$

Далее решаем задачу $З_i(r_{it})$, эквивалентную задаче о ранце, для всех $r_{it}=0,\dots,R$:

$$\prod_{j\in V_i}\left(1-F_j(r_j)\right) \longrightarrow \min_{r_j},$$

$$\sum_{j\in V_i} r_j \le r_{it}, \quad r_j \in \mathbb{Z}_0^+, \ j\in V_i.$$

Тогда

$$P_{it}(r_{it})=1-\prod_{j\in V_i}\left(1-F_j(r'_j)\right),$$

где $\{r'_j\}$ - решение задачи $З_i(r_{it})$. Если $k\ne 0$, то повторяем шаг 2.

2 ЭТАП

<u>Шаг 3.</u> Положим $k=k+1$ и для любой вершины $i\in I_k$ найдем $\{r_j^*\}$, $j\in V_i$, из решения задачи $З_i(r_{it}^*)$. Далее по $F_j(r_j^*)$ находим r_{ij}^* и r_{jt}^*. Если $k\ne K-1$, то повторяем шаг 3.

2.3. Оценка качества алгоритма A

Осуществляя прямой ход, мы вычисляем $P_{it}(r)$ для всех $i\in V\setminus\{t\}$, решая задачу о ранце $З_i(r)$. Для этого требуется $O(d_i^+R^2)$ элементарных действий и $O(d_i^+R)$ ячеек памяти. При обратном ходе мы находим оптимальные наборы $\{r_{ij}^*\}$ и $\{r_{jt}^*\}$, $j\in V_i$, по известной величине r_{it}^*. Для этого требуется $O(d_i^+R)$ операций и $O(d_i^+)$ ячеек памяти. Используя свойство А2 элементарной T-структуры, получим следующие оценки для алгоритма A: трудоемкость равна $O(NR^2)$, память - $O(NR)$.

2.4. Сети многоуровневой T-структуры

О п р е д е л е н и е 2. Сетью многоуровневой T-структуры условимся называть граф, полученный заменой в сети элементарной или многоуровневой T-структуры дуги (I,J) на сеть элементарной или многоуровневой T-структуры с источником в вершине I и стоком в вершине J (см. рис.2).

В математической литературе [11] такую структуру называют последовательно-параллельной, в технической литературе [5-10] последовательно-параллельной называют сеть, состоящую из некоторого числа последовательно соединенных подсетей, внутри которых вершины соединены параллельно.

Для сети многоуровневой T-структуры предлагается псевдоэффективный алгоритм B нахождения точного решения задачи (1-2), в качестве промежуточного шага использующий (возможно неоднократно) алгоритм A.

Алгоритм проверяет наличие у произвольной сети T-структуры и при положительном результате вычисляет нужное нам значение $P_{st}(R)$. Алгоритм B, как и алгоритм A, состоит из двух этапов: прямого и обратного ходов. На первом этапе сначала разыскивается элементарная T-структура с источником в вершине I и стоком в вершине J. Для этой T-структуры вычисляется $P_{ij}(r)$ для всех $r=0,\dots,R$ при помощи алгоритма A. Затем выявленная T-структура заменяется на дугу (I,J) с надежностью $P_{ij}(r)$. И снова разыскивается элементарная T-структура, пока не получим $P_{st}(R)$ или не обнаружим, что сеть не является T-структурой. На втором этапе находятся все дуги, входящие в выделенную подсеть. Чтобы определить порядок, в котором мы можем выявлять подсети элементарной T- структуры, поставим в соответствие каждой вершине $V\in V$ ее ранг $\rho(V)$ [12].

В алгоритме мы будем использовать следующие свойства ранга вершины для сети многоуровневой T-структуры:

B1) Если вершина $I\neq t$, то I - сток подсети T-структуры в том и только том случае, если $d_i^- > 1$.

B2) Сеть многоуровневой T-структуры со стоком ранга ρ станет сетью элементарной T-структуры, если все T-структуры со стоками рангов меньших ρ заменить на дуги.

Введем дополнительные обозначения:

E_{ij} - множество дуг из $Z_{ij}=\{z_{ij}\}$;
V_{ij} - множество вершин из $Z_{ij}=\{z_{ij}\}$.

2.5. Алгоритм B

Шаг 1. Для всех вершин из V вычисляем их ранги, начиная с источника S.

Шаг 2. Обозначим через I и J источник и сток выделенной T-структуры. Положим $I=S$. Из множества $\{J'\in V|d_j^->1\}\cup\{t\}$ выберем вершину J с наименьшим рангом. Если множество

$$W=\left\{V\in V_{ij}\setminus\{I,J\}\,|\,\exists\, V'\in V_i,\ (V,V')\notin E_{ij}\right\}$$

непусто, то в качестве I выберем вершину из W максимального ранга. Выявлена элементарная T-структура с источником I и стоком J.

Шаг 3. Для выявленной элементарной T-структуры со стоком J и источником I вычисляем $P_{ij}(r)$ для всех $r=0,\dots,R$, используя 1 этап алгоритма A. Далее полагаем $V=V\setminus V_{ij}\cup\{I,J\}$ и $E=E\setminus E_{ij}\cup\{(I,J)\}$. Если после преобразований $d_j^->1$, то сеть G не T-структура.

<u>Шаг 4.</u> Если $i=s$ и $j=t$, то находим оптимальные значения r^*_{kl} для всех $(k,l)\in E$, восстанавливая соответствующие подсети и применяя 2 этап алгоритма A. В противном случае переходим на шаг 2.

2.6. Оценка качества алгоритма B

Для осуществления алгоритма B требуется $O(NR^2)$ элементарных действий и $O(NR)$ ячеек памяти. Покажем это.

Определение 3. Уровнем вложения сети G, обладающей T-структурой, договоримся называть натуральное число K_G, которое находится следующим образом:

1) для сетей элементарных T-структур $K_G=1$;

2) для сети G многоуровневой T-структуры $K_G=1+\max\limits_S K_S$, где S - подсеть G, также обладающая T-структурой.

На поиск стоков элементарных T-структур и преобразование сети требуется $O(N)$ операций, на второй этап - $O(NR)$. Самым трудоемким является процесс вычисления $P_{ij}(r)$ для всех элементарных T-структур. Для сети T-структуры 1-го уровня (т.е. элементарной T-структуры) с числом вершин N_1 применяется алгоритм A. Для него требуется $O(N_1R^2)$ операций и $O(N_1R)$ ячеек памяти. Рассмотрим G - сеть T-структуры уровня вложения K_G с числом вершин N_G. Пусть каждая подсеть G_i, имеющая T-структуру уровня вложения K_G-1, состоит из N_i вершин, источника и стока, а оценки трудоемкости и потребности в памяти равны $O(N_iR^2)$ и $O(N_iR)$. Обозначим через L число вершин (без источника и стока) в сети G, оставшихся после замены всех подсетей T-структуры уровней вложения менее K_G, на дуги с началом в источнике и концом в стоке. Тогда для сети T-структуры с уровнем вложения K_G потребуется $O(R^2\sum\limits_i N_i+R^2L)$ операций и $O(R\sum\limits_i N_i+RL)$ ячеек памяти. Очевидно, что $\sum\limits_i N_i+L=N_G$. Следовательно, трудоемкость составит $O(N_GR^2)$ действий, память - $O(N_GR)$ ячеек. По индукции получаем указанные выше оценки.

Поступила в ред.-изд. отдел
21 ноября 1991 г.

Литература

1. Барлоу Р.,Прошан Н. Математическая теория надежности. - М.: Сов.радио, 1969. - 448 с.

2. Давыдов Г.Б.,Рогинский В.Н.,Толчан А.Я. Сети электросвязи. - М.: Связь, 1977. - 360 с.

3. Нейман Дж. Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент // Автоматы. - М.: Мир, 1956. - С. 68-139.

4. Moore E., Shannon C. Reliable circuits using less reliable relays // J. of Franklin Institute. - 1961. - V. 262. - P. 1-2.

5. Sharma J., Venkateswaran K.V. A direct method for maximazing the system reliability // IEEE Transections on Reliability. - 1971. - V. R20, Nov. - P. 256-258.

6. Misra K.B. Reliability optimization of a series-parallel system // IEEE Transections on Reliability. - 1972. - V. R21, Nov. - P. 230-238.

7. Tillman F.A., Liittschwager J.M. Integer programming formulation on constraing reliability problems // Managment Science. - 1967. - V. 13, July. - P. 887-889.

8. Mizukami K. Optimum redundancy for maximum system reliability by the method of convex and integer programming // Operation Research. - 1968. - V. 16, Mar. - 392-407.

9. Cooper J. Postoptimality analysis in nonlinear integer programming: the right-hand side case // Naval Research Logistics Quarterly. - 1981. - V. 28, Jun. - P. 35-48.

10. Banarjee S.K., Rajamani K. Optimization of system reliability using a parametric approach // IEEE Transections on Reliability. - 1973. - V. R22, Apr. - P. 35-38.

11. Takamizava K., Nishizeki T., Saito N. Combinatorial problems on series-parallel graphs // Graph Theory & Algorithms: Proc./17th Sympozium of Electrical Communication, Tohoku University Sendai, Japan, October 24-25, 1980. - Berlin a.o.: Springer, 1981. - P. 79-94.

12. Давыдов Э.Г. Исследование операций. - М.: Высш. шк., 1980. - 383 с.