Управляемые системы, ИМ СО РАН, 1993 г., вып. 31

УДК 519.1

О РЕАЛИЗУЕМОСТИ ВЗВЕШЕННЫХ ГРАФОВ С ЗАДАННЫМИ ВЕСАМИ ВЕРШИН

С.П.Макеев

Введение

Вопрос о реализации взвешенного графа состоит в следующем: существуют ли неотрицательные веса ребер данного графа с заданными весами вершин и такие, что вес каждой вершины равен сумме весов инцидентных ей ребер? Подобный вопрос для графов различной структуры возникает в ряде прикладных задач транспортного типа (задача о поставщиках и потребителях) [1], электрических сетях [2], в теории конфликтов [3]. В [1] этот вопрос решен для двудольных графов, в [2,4] – для полных. В настоящей работе, исходя из целей анализа модели конфликтов [3], задача рассматривается для произвольных графов и в более общей многомерной постановке: вектор весов вершин графа следует представить в виде взвешенной суммы компонент нескольких векторов, каждый из которых должен быть реализуем одним и тем же графом.

Рассматриваются связные графы $G=(X,U)$ с множеством вершин $X=\{1,2,\dots,n\}$ и множеством ребер U. В одномерной задаче о реализуемости каждая вершина i имеет вес $\lambda_i\geq 0$.

О п р е д е л е н и е 1. Вектор весов $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ реализуем графом G (G-реализуем), если можно выбрать такие веса a_{ij} ребер (i,j), что

$$\sum_{j\in\Gamma_i} a_{ij}=\lambda_i\ ,\quad a_{ij}\geq 0\ ,\quad i\in X,\ (i,j)\in U,$$

где $\Gamma_i=\{j\,|\,(i,j)\in U\}$.

Множество весов a_{ij} ребер графа G обозначим через $A=\{a_{ij}\,|\,(i,j)\in U\}$. Граф G с заданными весами ребер A будем обозначать через $G(A)$, а через $G(A)^+=(X,U(A)^+)$ – подграф графа $G(A)$, содержащий только его положительные ребра $U(A)^+=\{(i,j)\in U\,|\,a_{ij}>0\}$. Весом вершины i в графе $G(A)$ называется величина $z_i(A)=\sum_{j\in\Gamma_i} a_{ij}$. Набор A будем называть λ-реализацией, если выполняются приведенные выше соотношения. Пусть задана матрица $C=(c_{ik})_{n\times m}$ с положительными элементами. Систему векторов $\{\lambda^1,\lambda^2,\dots,\lambda^m\}$ назовем C-разбиением вектора λ, если

$$\sum_{k=1}^{m} c_{ik}\lambda_i^k = \lambda_i\ ,\quad \lambda_i^k \geq 0\ ,\quad \lambda^k = (\lambda_1^k,\lambda_2^k,\dots,\lambda_n^k)\ ,\quad i\in X,\ k=1,\dots,m.$$

Определение 2. Вектор весов λ реализуем парой (G,C) ((G,C)-реализуем), если существует такое его C-разбиение $\{\lambda^1,\lambda^2,\dots,\lambda^m\}$, в котором G-реализуем каждый из векторов λ^k, $k=1,\dots,m$.

При $m=1$ понятия G- и (G,C)-реализуемости совпадают. Предположения о связности графа G и положительности элементов матрицы C сделаны для исключения достаточно простых особенностей.

Будем обозначать через $\lambda(Y)=\sum\limits_{i\in Y}\lambda_i$ и $\Gamma_Y=\cup(\Gamma_i,i\in Y)$ суммарный вес множества вершин $Y\subseteq X$ и множество вершин, смежных с вершинами из Y. Для независимого множества вершин Y по определению [5] имеем $\Gamma_Y\cap Y=\emptyset$. Множество всех независимых подмножеств вершин графа G обозначим через S_G.

1. Условия G-реализуемости

В графе $G(A)$ с произвольными неотрицательными весами ребер выполняется неравенство

$$\sum_{i\in Y} z_i(A) = \sum_{i\in Y}\ \sum_{j\in\Gamma_i} a_{ij} \leq \sum_{j\in\Gamma_Y}\ \sum_{i\in\Gamma_j} a_{ij} = \sum_{j\in\Gamma_Y} z_j(A)$$

для любого множества независимых вершин Y. Если A является λ-реализацией, то $z_i(A)=\lambda_i$ и, следовательно, справедливы неравенства

$$\lambda(Y) \leq \lambda(\Gamma_Y),\quad Y\in S_G\ . \tag{1}$$

Таким образом, получаем следующее необходимое условие G-реализуемости.

Лемма 1. Если вектор λ реализуем графом G, то имеют место неравенства (1).

Оказывается, условия (1) являются и достаточными для G-реализуемости вектора λ. Чтобы в этом убедиться, определим несколько процессов преобразования весов ребер графа $G(A)$. Полученные веса снова, как правило, будем обозначать через A. Все вводимые процессы преобразуют одни решения системы

$$\sum_{j\in\Gamma_i} a_{ij} \leq \lambda_i\ ,\quad a_{ij} \geq 0,\qquad i\in X,\ j\in\Gamma_i\ , \tag{2}$$

в другие, удовлетворяющие определенным свойствам.

Вершину i в графах $G(A)$ и $G(A)^+$ будем называть белой, если $z_i(A)<\lambda_i$, и черной, в противном случае. Подграфы, содержащие только черные вершины, будем называть черными.

Процесс $(+\alpha)$. Пусть A - произвольное решение системы (2). Если $(i,k)\in U$ и i, k - белые вершины графа $G(A)$, то, заменив a_{ik} на значение $a_{ik}:=a_{ik}+\min(\lambda_i-z_i(A),\lambda_k-z_k(A))$, получим решение системы (2), при котором хотя бы одна из вершин i, k станет черной. Применив этот процесс не

более $|U|$ раз, получим решение A системы (2), удовлетворяющее условию: множество Y_0 белых вершин графа $G(A)$ является множеством независимых вершин.

Рассмотрим систему соотношений

$$z_i(A) \le \lambda_i,\ i\in Y_0;\quad z_i(A) = \lambda_i,\ i\in X\setminus Y_0;\quad a_{ij} \ge 0,\ (i,j)\in U. \tag{3}$$

Она совместна, поскольку ей удовлетворяют веса A, полученные в результате $(+\alpha)$-процесса (для них неравенства $z_i(A)\le\lambda_i$, $i\in Y_0$, выполняются как строгие). Следующие три процесса позволяют получать другие ее решения.

Процесс $(+\alpha,-\alpha,+\alpha)$ увеличения веса двух белых вершин. Пусть в графе $G(A)$ между двумя белыми вершинами i_0 и j_0 существует нечетная цепь P (имеющая нечетное число ребер), четные ребра которой (считая от любой из белых вершин) положительны. Будем называть такие цепи особыми и обозначать здесь и далее через $\alpha(P)$ минимальный из весов их четных ребер. Положим

$$\alpha = \min(\lambda_{i_0} - z_{i_0}(A),\ \lambda_{j_0} - z_{j_0}(A),\ \alpha(P))$$

и перейдем от графа $G(A)$ к графу $G(A')$ с весами $A'=\{a'_{ij}|(i,j)\in U\}$, где

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } (i,j) \notin P, \\ a_{ij} + \alpha, & \text{если } (i,j) - \text{нечетное ребро цепи } P, \\ a_{ij} - \alpha, & \text{если } (i,j) - \text{четное ребро цепи } P. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что в графе $G(A')$ выполняются равенства

$$z_i(A') = z_i(A)\ ,\quad i\ne i_0,j_0\ ,$$

$$z_{i_0}(A') = z_{i_0}(A) + \alpha\ ,\quad z_{j_0}(A') = z_{j_0}(A) + \alpha\ ,$$

и либо хотя бы одна из вершин i_0, j_0 стала черной, либо хотя бы одно из четных ребер цепи P стало нулевым (либо и то, и другое). В любом случае веса рассматриваемых белых вершин возрастают. Схема процесса показана на рис. 1а.

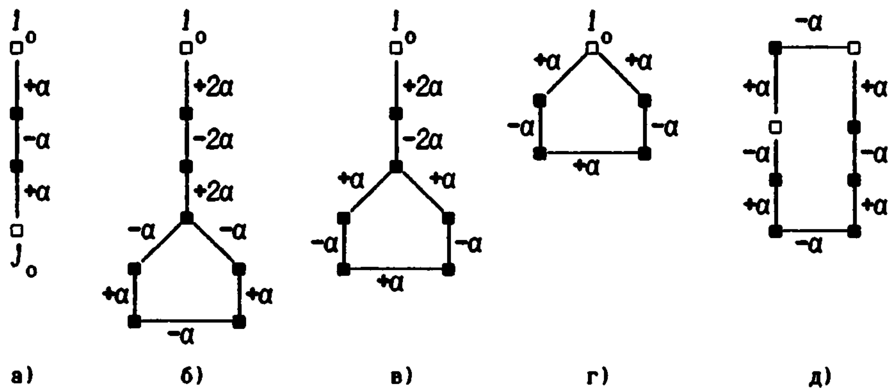

Рис. 1. Схемы процессов: а) $(+\alpha,-\alpha,+\alpha)$; б), в), г) $(+2\alpha)$; д) $(+\alpha,-\alpha)$.

Процесс $(+2\alpha)$ увеличения веса одной белой вершины. Пусть в графе $G(A)$ существует белая вершина i_0 и достижимый из нее по некоторой цепи

P нечетный черный цикл K (содержащий только черные вершины) такие, что выполняется условие: четные ребра цепи P (если они есть) и цикла K, считая от вершины i_0, являются положительными. Такую ситуацию назовем особой. Обозначим через $\alpha(K)$ минимальный из весов четных ребер цикла K. Положим

$$a = \min(\alpha(P)/2,\ \alpha(K),\ \lambda_{i_0} - z_{i_0}(A))$$

и рассмотрим граф $G(A')$ с весами

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } (i,j)\notin P\cup K,\\ a_{ij} + 2a, & \text{если } (i,j) \text{ нечетное ребро цепи } P,\\ a_{ij} - 2a, & \text{если } (i,j) \text{ четное ребро цепи } P,\\ a_{ij} - a, & \text{если } (i,j) \text{ четное ребро цикла } K,\\ a_{ij} + a, & \text{если } (i,j) \text{ нечетное ребро цикла } K. \end{cases}$$

Очевидно, все веса a'_{ij} неотрицательны, выполняются равенства

$$z_i(A') = z_i(A)\ ,\ i\neq i_0,\qquad z_{i_0}(A') = z_{i_0}(A) + 2a\ ,$$

и либо вершина i_0 стала черной, либо хотя бы одно из четных ребер P и K стало нулевым (либо и то, и другое). Схема этого процесса для трех возможных случаев достижимости K из i_0 показана на рис. 1б, в, г.

Процесс $(+a,-a)$ "ликвидации" четных положительных циклов. Пусть K четный цикл графа $G(A)$ с положительными ребрами, $a=\alpha(K)$ минимальный из весов его нечетных ребер, последовательно занумерованных, начиная с произвольного ребра, и веса A' определяются выражением

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } (i,j)\notin K,\\ a_{ij} + a, & \text{если } (i,j) \text{ четное ребро цикла } K,\\ a_{ij} - a, & \text{если } (i,j) \text{ нечетное ребро цикла } K. \end{cases}$$

Тогда в графе $G(A')$ все ребра неотрицательны, справедливы равенства $z_i(A')=z_i(A)$, $i\in X$, и хотя бы одно ребро цикла K является нулевым (рис. 1д). Переобозначив A' через A, повторим этот процесс. Поскольку нулевые ребра в нем не участвуют, то за конечное число шагов он позволяет ликвидировать в графе $G(A)$ все четные положительные циклы.

Из описания процессов следует, что если они применяются к графу $G(A)$, веса ребер которого удовлетворяют (3), то новые веса ребер также удовлетворяют (3).

Т е о р е м а 1. Вектор λ реализуем графом G тогда и только тогда, когда имеют место неравенства (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость установлена в лемме 1, докажем достаточность. Пусть A решение системы (2), получаемое с помощью $(+a)$-процесса из начального нулевого решения. Если в графе $G(A)$ нет белых вершин, то это означает G-реализуемость λ. Пусть они есть и образуют множество Y_0, причем, как указывалось, $Y_0\in S_G$. Обозначим через A' решение задачи линейного программирования

$$\sum_{i\in Y_0} z_i(A) = \sum_{i\in Y_0}\sum_{j\in\Gamma_i} a_{ij} \xrightarrow[A\in(3)]{} \max . \qquad (4)$$

Покажем, что на решении A' неравенства $z_i(A')\le\lambda_i$, $i\in Y_0$, из системы (3) обращаются в равенства, что и завершит доказательство теоремы. Допустим, что некоторые из приведенных неравенств строгие на множестве вершин $Y\subseteq Y_0$. С помощью $(+a,-a)$-процесса из A' получим новое решение A задачи (4), которое удовлетворяет двум условиям: в графе $G(A)$ отсутствуют четные положительные циклы; Y – множество белых вершин $G(A)$. Подграф $G(A)^+$ может иметь ряд компонент связности одного из трех типов: а) содержащих белые вершины; б) черных деревьев; в) черных графов с циклами (компонент типа б) и в) может не быть).

Рассмотрим компоненту $G_0=(X_0,U_0)$ типа а). Убедимся, что G_0 – дерево. Четных циклов в G_0 нет; допустим, что есть нечетный цикл K. Если он содержит ровно одну белую вершину, то процесс $(+2a)$, как указано на рис. 1г, увеличит ее вес, что противоречит оптимальности A в задаче (4). Если в нем несколько белых вершин, то из его нечетности следует, что существуют две из них, соединенные нечетной цепью. Поэтому процесс $(+a,-a,+a)$ увеличивает их вес, что снова противоречит оптимальности A. Наконец, если белых вершин в нем нет, то он достижим в графе G_0 из белой вершины, поэтому процесс $(+2a)$ приводит к противоречию (рис. 1б, в).

Итак, любая компонента G_0 типа а) – дерево. Фиксируем в нем произвольную белую вершину i_0 и обозначим через X_0^1 подмножество таких его вершин, которые достижимы из i_0 по четным цепям (i_0 входит в X_0^1). Пусть $X_0^2=X_0\setminus X_0^1$. Дерево G_0 представим в виде двудольного графа $G_0=(X_0^1\cup X_0^2,U_0)$ так, что ребра $(i,j)\in U_0$ соединяют вершины разных долей X_0^1 и X_0^2. Нетрудно показать, используя $(+a,-a,+a)$-процесс, что все белые вершины дерева G_0 входят в долю X_0^1. Покажем, что X_0^1 – множество независимых вершин графа G. Пусть $i,j\in X_0^1$. Если i и j – белые вершины, то $(i,j)\notin U$ в силу $(+a)$-процесса. Пусть i и j черные вершины, P цепь в дереве G_0, их соединяющая. Дополним цепь P ребром (i,j) и рассмотрим полученный цикл K. Он является нечетным. Если K содержит одну белую вершину, то процесс $(+2a)$ увеличивает ее вес, если несколько, то процесс $(+a,-a,+a)$, если белых вершин в нем нет, то он достижим из белой вершины $i_0\in X_0^1$ и процесс $(+2a)$ увеличивает ее вес (рис. 2а, б, и в соответственно). Во всех случаях это противоречит оптимальности A в задаче (4). Случай, когда одна из вершин i и j белая, а другая черная, рассматривается аналогично. Таким образом, X_0^1 – множество независимых вершин графа G.

Будем считать, что в любой компоненте $G_W=(X_W^1\cup X_W^2,U_W)$ типа а) белые вершины находятся в первой доле X_W^1. Лес, состоящий из белых компонент типа а), представим в виде двудольного графа $G_T=(X_T^1\cup X_T^2,U_T)$, где $X_T^1=\cup X_W^1$,

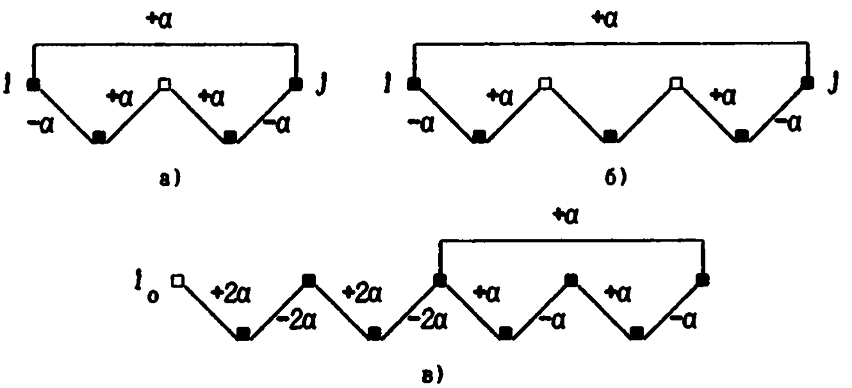

Рис. 2. К доказательству независимости множества X_0^1 .

$X_T^2=\cup X_W^2$ и объединение берется по всем компонентам G_W типа а). Аналогично предыдущему показывается, что X_T^1 – множество независимых вершин графа G (к противоречию приводит $(+\alpha,-\alpha,+\alpha)$-процесс).

Компоненты типа б) также будем представлять в виде двудольных графов $G_B=(X_B^1\cup X_B^2,U_B)$. Допустим, что среди вершин G_B существуют смежные к вершинам X_T^1 в графе G. Без ограничения общности полагаем, что такие вершины находятся в доле X_B^2:

$$\exists\ I_0\in X_T^1,\ J_0\in X_B^2:\ (I_0,J_0)\in U. \tag{5}$$

Покажем, что $X_T^1\cup X_B^1$ – множество независимых вершин в графе G. Достаточно рассмотреть случай, когда $I\in X_T^1$, $J\in X_B^1$. Если $(I,J)\in U$, то обозначим через s и t белые вершины, из которых в лесе G_T достижимы вершины I и I_0 соответственно, и пусть $P=(P_{sI},(I,J),P_{JJ_0},(J_0,I_0),P_{I_0t})$ – цепь в графе $G(A)$, соединяющая s и t: P_{sI} – цепь (четная) в лесе G_T, соединяющая s и I, P_{JJ_0} – цепь (нечетная) в дереве G_B, соединяющая J с J_0, P_{I_0t} – цепь (четная), соединяющая в лесе G_T вершины I_0 и t. Таким образом, P – нечетная цепь между белыми вершинами s и t (или нечетный цикл, если $s=t$) и, как нетрудно видеть, процесс $(+\alpha,-\alpha,+\alpha)$ (или $(+2\alpha)$) приводит к противоречию. Следовательно, $(I,J)\notin U$, и $X_T^1\cup X_B^1$ – множество независимых вершин (отметим, что если для компоненты G_B не выполняется (5), то даже множество X_B^1 может не быть независимым).

Объединим лес G_T и дерево G_B в двудольный граф с долями $X_T^1\cup X_B^1$ и $X_T^2\cup X_B^2$ и полученный лес переобозначим через G_T. Ребро (I_0,J_0), определяемое (5), будем называть присоединенным к лесу G_T. Каждая вершина из X_T^1 достижима в лесе G_T с присоединенным ребром из белой вершины, причем если в соответствующей цепи есть присоединенное ребро, то оно является нечетным (считая от белой вершины). Продолжим, если это возможно, процесс объединения леса G_T с компонентами типа б). Процесс закончится на

некотором шаге, после которого лес G_T по построению будет обладать следующими свойствами: X_T^1 - множество независимых вершин; каждая вершина из X_T^1 достижима в лесе G_T с присоединенными ребрами из белой вершины, причем если в соответствующей цепи есть присоединенные ребра, то они являются нечетными (считая от белой вершины); выполняется включение $X_T^2 \subseteq \Gamma_{X_T^1}$; если $X_T^2 \neq \Gamma_{X_T^1}$, то найдутся вершина $i_0 \in X_T^1$ и вершина j_0, принадлежащая компоненте типа в), такие, что $(i_0, j_0) \in U$.

Покажем, что

$$X_T^2 = \Gamma_{X_T^1} . \qquad (6)$$

Если это неверно, то в силу последнего условия найдутся указанные в нем вершины i_0 и j_0. Вершина i_0 достижима в дереве G_T с присоединенными ребрами из некоторой белой вершины, поэтому в графе $G(A)$ нечетный черный цикл также достижим из той же белой вершины и процесс $(+2\alpha)$ приводит к противоречию.

Итак, равенство (6) справедливо, поэтому имеем следующие соотношения:

$$\lambda(X_T^1) \overset{(а)}{>} \sum_{i \in X_T^1} \sum_{j \in \Gamma_{X_T^1}} a_{ij} \overset{(б)}{=} \sum_{i \in X_T^1} \sum_{j \in X_T^2} a_{ij} \overset{(в)}{=}$$

$$= \sum_{j \in X_T^2} \sum_{i \in X} a_{ij} \overset{(г)}{=} \lambda(X_T^2) \overset{(д)}{=} \lambda(\Gamma_{X_T^1})$$

(здесь (а) следует из независимости множества X_T^1, содержащего белые вершины, (б) - из (6), (в) - из структуры графа $G(A)^+$, (г) - по определению, (д) - из (6)). Таким образом, $\lambda(X_T^1) > \lambda(\Gamma_{X_T^1})$, что противоречит (1). Теорема доказана. ∎

Из условий (1) следуют результаты о реализуемости для двудольных [1] и полных [2] графов. Так, для полного графа G эти условия принимают вид: $\lambda_i \leq \sum_{j \in X \setminus \{i\}} \lambda_j$, $i \in X$, что совпадает с [2].

Для целочисленных векторов λ существует алгоритм построения полуцелочисленной λ-реализации A (все числа $2a_{ij}$ целые) с помощью конечного числа шагов описанных выше четырех процессов. Процесс $(+\alpha)$ строит целочисленное решение A системы (3), исходя из нулевого. Процесс $(+\alpha,-\alpha,+\alpha)$ ликвидирует все особые цепи в графе $G(A)$, а процесс $(+\alpha,-\alpha)$ убирает в этом графе все четные положительные циклы. Во время преобразований целочисленность компонент набора A не нарушается. Процесс $(+2\alpha)$ ликвидирует все особые ситуации в графе $G(A)$.

Полученное множество весов обозначим через $A^* = \{a_{ij}^* | (i,j) \in U\}$. Назовем тупиковой ситуацию, когда в графе $G(A^*)$ есть белые вершины, но нет особой ситуации.

Теорема 2. Для целочисленнного вектора λ описанный алгоритм либо дает полуцелочисленную λ-реализацию A^*, либо приводит к тупиковой ситуации, означающей, что вектор λ не реализуем графом G.

Доказательство. Конечность алгоритма следует из того, что при выполнении процессов $(+\alpha)$, $(+2\alpha)$, $(+\alpha,-\alpha,+\alpha)$ вес хотя бы одной вершины возрастает на 1. Перед началом применения процесса $(+2\alpha)$ к графу $G(A)$ множество A является целочисленным.

Пусть в графе $G(A)$ имеется особая ситуация и J_0, P, K соответствующие белая вершина, цепь и цикл. Обозначим общую вершину цепи P и цикла K через J_0. После применения процесса $(+2\alpha)$ веса ребер цикла K могут быть полуцелочисленными. Допустим, что цикл K в графе $G(A)$ достижим по особой цепи Q также из другой белой вершины. Тогда из свойств процесса $(+\alpha,-\alpha,+\alpha)$ следует, что J_0 общая вершина P и Q. Поэтому применение процесса $(+2\alpha)$ к цепи Q и циклу K сохранит полуцелочисленность весов ребер: новые веса ребер цепи Q будут целыми, а цикла K - целыми или полуцелыми.

Из описания алгоритма следует, что веса из множества A полуцелочисленны, удовлетворяют системе (3), и к графу $G(A)$ нельзя применить ни одно из пробразований $(+\alpha,-\alpha,+\alpha)$, $(+\alpha,-\alpha)$, $(+2\alpha)$. Именно это обстоятельство использовалось при доказательстве теоремы 1, что позволяет дальнейшее доказательство закончить по аналогии. Теорема доказана. ■

В общем случае предложенный алгоритм не сходится за конечное число шагов к λ-реализации. Приведем соответствующий пример, используя идею доказательства того, что в общем случае метод пометок не дает решение задачи о максимальном потоке [1].

Последовательность a_0, a_1, a_2,... с общим членом $a_t=[(\sqrt{5}-1)/2]^t<1$ удовлетворяет рекуррентному уравнению $a_{t+1}=a_{t-1}-a_t$ и ряд $\sum_{t=1}^{\infty} a_t$ сходится к некоторой сумме T. Граф G, представленный на рис. 3, имеет 14 вершин, при этом вершины 1 и 14 белые.

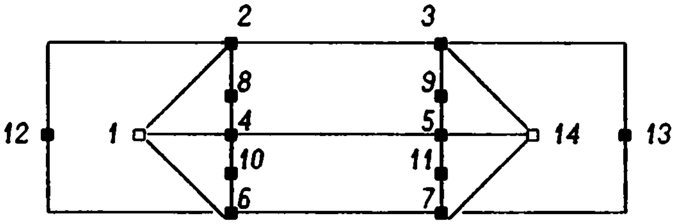

Рис. 3. Граф G примера неограниченности процесса $(+\alpha,-\alpha,+\alpha)$.

В этом графе выделим три ребра $u_1=(2,3)$, $u_2=(4,5)$, $u_3=(6,7)$ и обозначим $U'=\{u_1,u_2,u_3\}$. Положим начальные веса ребер равными следующим значениям:

$$a_{23} = a_0\ ,\quad a_{45} = a_1\ ,\ a_{67} = 0\ ,\quad a_{ij} = 2T\ ,\ (i,j)\in U\setminus U'\ .$$

Веса черных вершин определяются заданными весами ребер. Для белых вершин положим $\lambda_1=\lambda_{14}=9T$.

Покажем, что процесс $(+\alpha,-\alpha,+\alpha)$ в этом графе продолжается неограниченно. Возьмем нечетный путь $P=(1,\ 4,\ 5,\ 11,\ 7,\ 6,\ 12,\ 2,\ 3,\ 14)$ между белыми вершинами. Очевидно, $\alpha(P)=a_{45}=a_1$. После проведения процесса выделенные ребра будут иметь веса $a'_{23}=a_0-a_1=a_2$, $a'_{45}=0$, $a'_{67}=a_1$. Веса остальных ребер удовлетворяют неравенствам

$$a_{ij} - a_1 \le a'_{ij} \le a_{ij} + a_1.$$

Рассмотрим шаг n этого процесса. Пусть выделенные ребра u'_1, u'_2, u'_3, т. е. ребра u_1, u_2, u_3, взятые в определенном порядке, имеют веса a_{n-1}, a_n, 0. На следующем шаге, после применения процесса $(+\alpha,-\alpha,+\alpha)$ к соответствующему пути P', они будут иметь веса $a_{n-1}-a_n=a_{n+1}$, 0 и a_n, а веса остальных ребер будут удовлетворять неравенствам

$$a_{ij} - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \le a'_{ij} \le a_{ij} + a_1 + a_2 + \ldots + a_n\ .$$

Таким образом, $T<a'_{ij}<3T$. Отсюда видно, что процесс $(+\alpha,-\alpha,+\alpha)$ не сходится за конечное число шагов.

Описать структуру многогранника $\Omega=\{A\}\subseteq R_+^{|U|}$ всех λ-реализаций не удается. Отметим работу [6], в которой описана структура множества симметричных бистохастических матриц (граф G полный и $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=1$). Следующие две леммы показывают, как из произвольной λ-реализации получить вершину многогранника Ω, и дают новое доказательство существования полуцелочисленных решений.

Будем называть граф предельным, если каждая его компонента связности либо является деревом, либо содержит единственный нечетный цикл.

Л е м м а 2. Пусть λ произвольный G-реализуемый вектор. Тогда существует такая λ-реализация $A=\{a_{ij}|(i,j)\in U\}$, для которой граф $G(A)^+$ является предельным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью процесса $(+\alpha,-\alpha)$ для произвольной реализации A можно добиться, чтобы в графе $G(A)^+$ отсутствовали четные циклы. Если в некоторой компоненте связности есть два нечетных цикла K_1 и K_2, то они не имеют общих вершин и поэтому найдется соединяющая их цепь P. Применим процесс $(+\alpha,-\alpha)$ к замкнутому маршруту $K=(P,K_1,P,K_2)$ (рис. 4) при $\alpha=\min(\alpha(K_1),\alpha(K_2),\alpha(P)/2)$ (ребра нумеруем

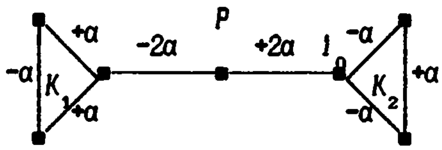

Рис. 4. Схема процесса $(+\alpha,-\alpha)$ для маршрута K.

последовательно, начиная от вершины 1_0, общей для P и K_2). Полученное

множество весов снова обозначим через A. В $G(A)^+$ теперь либо отсутствует хотя бы один из циклов K_1 и K_2, либо они находятся в разных компонентах связности. Продолжая процесс, убеждаемся в справедливости леммы.

Назовем λ-реализацию A предельной, если для нее граф $G(A)^+$ является предельным.

С л е д с т в и е 1. Любая вершина A многогранника Ω является предельной λ-реализацией.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное. Пусть вершина A не является предельной λ-реализацией. Тогда в графе $G(A)^+$ существует четный цикл или два нечетных, соединенных цепью. В любом случае, применяя процесс $(+\alpha,-\alpha)$ при достаточно малом $\alpha=\alpha_0>0$ и $\alpha=-\alpha_0<0$, получим две λ-реализации $A'=\{a'_{ij}\}$ и $A''=\{a''_{ij}\}$ такие, что $a_{ij}=(a'_{ij}+a''_{ij})/2$. Это противоречит условию, что A вершина Ω.

Л е м м а 3. Пусть A и A' две произвольные λ-реализации, для которых $G(A)^+=G(A')^+$. Тогда $A=A'$, т.е. $a_{ij}=a'_{ij}$, $(i,j)\in U$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A предельная λ-реализация и $G_0=(X_0,U_0)$ компонента связности графа $G(A)^+$. Если G_0 дерево, то веса его ребер определяются однозначно с помощью следующего процесса исключения висячих вершин:

- для висячей вершины $i\in X_0$ вес ребра $(i,j)\in U_0$ равен $a_{ij}=\lambda_i$;
- веса остальных ребер определяются деревом $G'_0=G-i$ с весами вершин $\lambda'_k=\lambda_k$, если $k\neq j$, и $\lambda'_k=\lambda_j-\lambda_i$, если $k=j$, $k\in X_0\setminus\{i\}$.

Если G_0 содержит нечетный цикл $K=(i_1,i_2,\dots,i_k,i_1)$, то на некотором шаге исключения висячих вершин граф G'_0 будет совпадать с K и тогда, как нетрудно видеть, веса всех его ребер однозначно определяются с помощью циклической перестановки индексов из равенства для веса ребра (i_k,i_1):

$$a_{i_k i_1} = (\lambda_{i_1} - \lambda_{i_2} + \dots - \lambda_{i_{k-1}} + \lambda_{i_k})/2.$$

Следовательно, структура графа $G(A)^+$ однозначно определяет предельную λ-реализацию. Лемма доказана. ■

С л е д с т в и е 2. Если граф G является предельным, то λ-реализация, если она существует, единственна.

С л е д с т в и е 3. Пусть A предельная λ-реализация и граф $G(A)^+$ является подграфом некоторого предельного графа $G'=(X,U')$. Тогда вектор λ реализуем графом G' и соответствующая реализация A' совпадает с A. В частности, $a'_{ij}=0$, $(i,j)\in U'\setminus U(A)^+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственно видно, что A является G'-реализацией. С другой стороны, G' имеет единственную λ-реализацию, что и доказывает следствие.

С л е д с т в и е 4. Предельная λ-реализация является вершиной многогранника Ω.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть это неверно. Тогда для некоторой предельной λ-реализации A найдутся две отличные от нее λ-реализации $A'=\{a'_{ij}\}$, $A''=\{a''_{ij}\}$ такие, что $a_{ij}=(a'_{ij}+a''_{ij})/2$. Если хотя бы одна из λ-реализаций A' и A'' не является предельной, то и A не является предельной. Следовательно, A' и A'' предельные. Так как граф $G(A')^{+}$ является подграфом графа $G(A)^{+}$, то по следствию 3 имеем $A=A'$. Противоречие доказывает следствие.

С л е д с т в и е 5. Множество вершин многогранника Ω и множество предельных λ-реализаций совпадают.

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из следствий 1 и 4.

С л е д с т в и е 6. Для целочисленных G-реализуемых векторов λ их предельная λ-реализация является полуцелочисленной, т. е. все вершины многогранника Ω полуцелочисленные.

2. Условия (G,C)-реализуемости

Из соотношений (1) следует, что множество M всех G-реализуемых векторов $\lambda\in R^{n}_{+}$ является выпуклым многогранным конусом. Найдем его ребра. Обозначим через E_{ij} вектор размерности n, компоненты которого с номерами i, j равны 1, а остальные равны 0. Обозначим через L конус, натянутый на векторы из совокупности $E=\{E_{ij}|(i,j)\in U\}$. Очевидно, векторы E_{ij} - ребра конуса L.

Л е м м а 4. Справедливо равенство $M=L$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\lambda\in M$ и A произвольная λ-реализация. Тогда, как нетрудно видеть, $\lambda=\sum\limits_{(i,j)\in U} a_{ij}E_{ij}$, т. е. $\lambda\in L$. Следовательно, $M\subseteq L$.

Пусть $\lambda\in L$. Тогда найдутся такие $a_{ij}\geq 0$, что $\lambda=\sum\limits_{(i,j)\in U} a_{ij}E_{ij}$. Отсюда следует, что $A=\{a_{ij}|(i,j)\in U\}$ является λ-реализацией вектора λ, т. е. $\lambda\in M$ и значит $L\subseteq M$. Из двух доказанных включений получаем требуемое равенство. ■

По определению (G,C)-реализуемость вектора $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in R^{n}_{+}$ означает существование векторов $\lambda^{k}=(\lambda^{k}_{1},\ldots,\lambda^{k}_{n})\in R^{n}_{+}$ и множеств $A^{k}=\{a^{k}_{ij}|(i,j)\in U\}$, $k=1,\ldots,m$, весов ребер графа G таких, что выполняются соотношения:

$$\sum_{k=1}^{m} c_{ik}\lambda^{k}_{i} = \lambda_i\ ,\quad \sum_{j\in\Gamma_i} a^{k}_{ij} = \lambda^{k}_{i}\ ,\quad a^{k}_{ij}\geq 0\ ,$$
$$i\in X,\quad (i,j)\in U,\ k=1,\ldots,m\,.$$

Отсюда следует, что множество M_c всех (G,C)-реализуемых векторов $\lambda\in R^{n}_{+}$

является выпуклым многогранным конусом в R^n_+. Обозначим через E^k_{ij} вектор, полученный из вектора E_{ij} заменой в нем i-й и j-й компонент на c_{ik} и c_{jk} соответственно, через $E_c=\{E^k_{ij}|(i,j)\in U,\ k=1,\dots,m\}$ совокупность таких векторов и через L_c конус, натянутый на векторы из множества E_c. Отметим, что в общем случае не все вектора из E_c являются ребрами конуса L_c.

Лемма 5. Справедливо равенство $M_c=L_c$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.

Таким образом, вектор λ реализуем парой (G,C) тогда и только тогда, когда $\lambda\in L_c$. Согласно теореме о разделяющей гиперплоскости вектор λ лежит вне конуса L_c тогда и только тогда, когда существует такой вектор $x=(x_1,\dots,x_n)\in R^n$, что выполнятся соотношения:

$$\lambda\cdot x < 0\ ,\quad x\cdot E^k_{ij} \ge 0\ ,\quad (i,j)\in U,\ k=1,\dots,m\ .$$

Учитывая, что $x\cdot E^k_{ij}=c_{ik}x_i+c_{jk}x_j$, перепишем эти условия в следующем виде:

$$\lambda_1x_1+\dots+\lambda_nx_n<0\ ,\quad c_{ik}x_i+c_{jk}x_j\ge 0\ ,\quad (i,j)\in U,\ k=1,\dots,m\ . \tag{7}$$

Из первого неравенства следует, что существует компонента $x_i<0$. Если найдется еще координата $x_j<0$, то, учитывая предположение о положительности элементов матрицы C, получаем, что $(i,j)\notin U$. Поэтому если Y множество отрицательных компонент вектора x, удовлетворяющего системе (7), то Y - множество независимых вершин графа G. Переобозначив $(-x_i)$ через x_i для $i\in Y$ и заметив, что в (7) можно положить $x_i=0$ для $i\in X\setminus(Y\cup\Gamma_Y)$, получаем, что система (7) совместна тогда и только тогда, когда для некоторого независимого множества вершин Y совместна система

$$\sum_{i\in Y}\lambda_ix_i > \sum_{j\in\Gamma_Y}\lambda_jx_j\ ,\quad x_j\ge(c_{ik}/c_{jk})x_i\ ,\quad i\in Y,\ j\in\Gamma_i,\ k=1,\dots,m\ .$$

Обозначив

$$y_i=\lambda_ix_i\ ,\quad a_{ji}=(\lambda_j/\lambda_i)\cdot\max(c_{ik}/c_{jk}\ ,\ k=1,\dots,m)\ ,$$

убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 3. Вектор $\lambda\in R^n_+$ реализуем парой (G,C) тогда и только тогда, когда для любого множества независимых вершин Y и любых $y_i\ge 0$, $i\in Y$, выполняется неравенство

$$\sum_{i\in Y}y_i \le \sum_{j\in\Gamma_Y}\max(a_{ji}y_i\ ,\ i\in\Gamma_j\cap Y)\ . \tag{8}$$

В некоторых случаях условие (8) принимает достаточно простой вид. Так, для полного графа G независимые множества $Y=\{i\}$ состоят из одной вершины, верно равенство $\Gamma_j\cap Y=\{i\}$, а условие (8) эквивалентно неравенству $\sum_{j\ne i}a_{ji}\ge 1$ или, учитывая определение a_{ji}, неравенству

$$\sum_{j\ne i}\lambda_j\cdot\max(c_{ik}/c_{jk}\ ,\ k=1,\dots,m)\ge\lambda_i\ ,\quad i\in X\ .$$

Проверить выполнение условия (8) при фиксированном множестве Y можно, решив задачу выпуклого программирования

$$\sum_{j\in\Gamma_Y} max(a_{ji}y_i\ ,\ i\in\Gamma_j\cap Y) \longrightarrow min\ , \quad \sum_{i\in Y} y_i=1,\ y_i\geq 0,\ i\in Y.$$

Неравенство (8) выполняется, если оптимальное значение целевой функции не меньше 1.

Поступила в ред.-изд. отдел
27 октября 1992 г.

Литература

1. Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях. - М.: Мир, 1966. - 276 с.

2. Хакими С.Л. О реализуемости множества целых чисел степенями вершин графа // Кибернет. сб., новая серия. - М.: Мир, 1966. - Вып. 2. - С. 40-53.

3. Pawlak Z. About Conflicts / Prace IPI PAN. Warsaw, 1981. - N 451. - 34 p.

4. Миронов А.А. О свойствах наборов степеней вершин обобщенных графов // Докл. АН СССР. - 1992. - Т. 324, № 5. - С. 959-963.

5. Харари Ф. Теория графов. - М.: Мир, 1973. - 352 с.

6. Сачков В.Н. Об экстремальных точках пространства симметричных стохастических матриц // Матем. сб., 1975. - Т. 96, № 3. - С. 43-51.