Управляемые системы, ИМ СО РАН, 1993 г., вып. 31

УДК 519.854.2

ПРИБЛИЖЕННЫЙ АЛГОРИТМ С ТОЧНОЙ ОЦЕНКОЙ ДЛЯ ТРЕХМАШИННОЙ ЗАДАЧИ ВСТРЕЧНЫХ МАРШРУТОВ

Ю.Д.Неумытов, С.В.Севастьянов

Введение

В работе исследуется задача встречных маршрутов, являющаяся частным случаем задачи *job shop*. Задачам этого типа посвящена вторая глава монографии [1], где подробно исследован вопрос сложности различных задач типа *job shop* и выделены простейшие полиномиально разрешимые подклассы. Сравнительно слабо представлен в [1] анализ приближенных алгоритмов для этих задач. Этот пробел в отношении задачи встречных маршрутов частично будет устранен в предлагаемой читателю работе. Для начала сформулируем некоторую общую задачу G, частными случаями которой являются задачи *job shop* (JS) и встречных маршрутов (ВМ).

Задача G. Имеется m машин и n работ. Каждая работа $j=1,\dots,n$ состоит из множества операций $O_j=\{o_1^j,\dots,o_{r_j}^j\}$; на O_j определено отношение частичного порядка $\prec$, задающее порядок выполнения операций $o_i^j\in O_j$. (В задаче JS это отношение является полным линейным порядком: $o_1^j\prec o_2^j\prec\dots\prec o_{r_j}^j$). Для каждой операции o_i^j задано время t_i^j ее выполнения и однозначно задана машина P_i^j, на которой она выполняется. (Вместе с условием линейности порядка на O_j это задает маршрут прохождения машин работой j: $(P_1^j,\dots,P_{r_j}^j)$.) Все операции неразрывны, каждая машина выполняет одновременно не более одной операции; отношение $o'\prec o''$ предписывает операции o'' начать выполняться не раньше, чем после окончания операции o'. Требуется построить расписание $S=\{s_i^j\}$ (т.е. указать моменты $s_i^j\geqslant 0$ начала каждой операции o_i^j), удовлетворяющее перечисленным выше условиям и минимизирующее длину всего интервала работы:

$$T(S)=\max_{j,i}(s_i^j+t_i^j)\to\min_S .$$

Задача ВМ получается из JS, если положить $r_j=m$, $\forall j$, а из всего многообразия маршрутов работ по машинам реализуется всего два:

($1,2,\ldots,m$) и ($m, m-1,\ldots,1$), – называемых нами прямым и встречным маршрутами.

Введем обозначения, играющие ключевую роль в формулировке излагаемых ниже результатов:

$$H_K = \sum_{\{O_i^j \mid P_i^j = K\}} t_i^j, \quad H = \max_K H_K, \quad h = \max_{j,i} t_i^j, \quad \tau = \max_j \tau_j .$$

Так как H_K – чистое время работы K -й машины, то, очевидно, для любого расписания S имеет место оценка

$$T(S) \geq H .$$

В [2, 3] было установлено интересное свойство задачи G . Оказалось, что для любой индивидуальной задачи G ее оптимум лежит в априорно известном интервале $[H, H + \mu_G(m,\tau)h]$, длина которого не зависит от числа работ, причем функция $\mu_G(m,\tau)$ является полиномом от m и τ . Естественно, при этом возникает вопрос о нахождении наименьшей функции μ^*_X локализации оптимумов задач из класса X . Для различных подклассов задачи G (таких как задача *flow shop* (FS), *open shop* (OS), и др.) удалось получить оценки функций μ^*_X , значительно более точные, по сравнению с оценками функции μ^*_G . Однако точные значения функций μ^*_X до сегодняшнего дня были известны лишь в двух случаях: для задачи FS при $m \leq 3$ ($\mu^*_{FS}(2) = 1$, $\mu^*_{FS}(3) = 3$, см. [4]) и для задачи OS ($\mu^*_{OS}(m) = m-1$, [5]).

Для задачи встречных маршрутов первый результат такого типа был получен в [6], где для $\mu^*_{BM}(m)$ была найдена экспоненциальная от m верхняя оценка. В [7] эта оценка была значительно улучшена:

$$\mu^*_{BM}(m) \leq 2m^2 - (m+3)/2 . \tag{1}$$

На основании этого результата в [8] была получена аналогичная оценка для случая двух произвольных маршрутов.

Для более общей задачи Акерса-Фридмана (коротко: AF ; эта задача допускает одновременное наличие до m ! различных маршрутов, являющихся перестановками машин) в случае $m = 3$ в [4] была доказана оценка

$$\mu^*_{AF}(3) \leq 6 ,$$

справедливая, очевидно, и для $\mu^*_{BM}(3)$ и улучшающая при этом оценку (1) при $m = 3$. Небольшой корректировкой излагаемого в [4] алгоритма удается несколько понизить верхнюю оценку:

$$\mu^*_{BM}(3) \leq 5 .$$

Нижняя же получается из того факта, что частным случаем задачи ВМ является задача FS, или одномаршрутная задача Беллмана-Джонсона:

$$\mu^*_{BM}(3) \geq \mu^*_{FS}(3) = 3\,. \tag{2}$$

В данной работе мы находим точное значение $\mu^*_{BM}(3)$, которое оказывается равным 3. (Очевидно также, что $\mu^*_{BM}(2) = 1$.)

Следует отметить, что во всех перечисленных выше работах верхние оценки функций $\mu^*_X(m)$ доказываются конструктивно. А именно всякий раз строится (полиномиальный) алгоритм, гарантирующий построение расписания S с оценкой

$$T(S) \leq H + \mu_X(m, \tau)\, h,$$

что и дает оценку функции μ^*_X. Мы не отходим от этого правила, поэтому главный результат нашей работы будет представлен следующей теоремой.

Теорема 1. Для трехмашинной задачи встречных маршрутов с трудоемкостью $O(n \log n)$ может быть построено расписание с оценкой

$$T(S) \leq H + 3h\,. \tag{3}$$

Из теоремы 1 и оценки (2) вытекает

Следствие 1. $\mu^*_{BM}(3) = 3$ □

Вспомогательную роль при доказательстве главного результата будет иметь двухстадийная задача встречных маршрутов (ДЗВМ). От задачи $BM\ (m = 3)$ она отличается тем, что третья операция каждой работы (на третьей машине - для прямого маршрута, и на первой - для встречного) имеет нулевую длительность. Несмотря на сравнительную простоту ДЗВМ, оказывается верной следующая

Теорема 2. Задача ДЗВМ NP-трудна в сильном смысле. (К ней сводится задача 3-разбиения, доказательство см. в § 4.)

Ввиду этого результата, определенную ценность представляет построение для этой задачи эффективного приближенного алгоритма, о чем сообщает нам

Теорема 3. Для двухстадийной задачи встречных маршрутов с трудоемкостью $O(n \log n)$ может быть построено расписание S с оценкой

$$T(S) \leq H + h\,. \tag{4}$$

Эта теорема дает очевидную верхнюю оценку значения $\mu^*_{ДЗВМ}$, которая достигается на примере с одной деталью прямого маршрута и одной - встречного при единичных длительностях первых и вторых операций. Таким образом, имеем

Следствие 2. $\mu^*_{ДЗВМ} = 1$ □

Для упрощения дальнейших выкладок, операции работы j прямого маршрута на машинах 1, 2 и 3 будем обозначать a_j, b_j, c_j, а операции работы j встречного маршрута – a'_j, b'_j, c'_j соответственно. Через $|x|$ и $|X|$ будем обозначать длительность операции x и суммарную длительность операций из множества X. Кроме того,

$$A = \sum_j |a_j|,\ B = \sum_j |b_j|,\ C = \sum_j |c_j|,\ A' = \sum_j |a'_j|,\ B' = \sum_j |b'_j|,\ C' = \sum_j |c'_j|.$$

Будем также предполагать, что работы прямого маршрута имеют номера с 1 по n', а встречного – с $n'+1$ по n.

§ 1. Доказательство теоремы 3

Искомое расписание S однозначно задается следующими четырьмя правилами.

1°. Операции $a_1, \ldots, a_{n'}$ выполняются на первой машине в этом порядке, при этом работы $j = 1, \ldots, n'$ занумерованы по неубыванию отношения $|a_j| / |b_j|$; работы с $|b_j| = 0$ идут последними.

2°. Операции $c'_{n'+1}, \ldots, c'_n$ выполняются на третьей машине в этом порядке, при этом работы $j = n'+1, \ldots, n$ занумерованы по неубыванию отношения $|c'_j| / |b'_j|$; работы с $|b'_j| = 0$ идут последними.

3°. На второй машине работы выполняются в порядке поступления.

4°. При наличии свободной машины и работы, готовой на ней выполняться, машина не простаивает.

Очевидно, искомая трудоемкость $O(n \log n)$ алгоритма складывается из трудоемкостей нумерации работ прямого и встречного маршрутов согласно правилам 1°, 2°. Докажем для полученного расписания оценку (4).

Ясно, что первая и третья машины закончат свою работу в моменты H_1 и H_3, а вторая – в момент $T = T(S)$. Для определенности будем считать, что $H_3 \leq H_1$. Через $I_i(a,b)$ обозначим величину простоя машины i в интервале $[a,b]$.

Если $T \leq H_1 + h$, то свойство (4) выполнено. Пусть

$$T - H_1 > h. \tag{5}$$

Пусть $[t, T]$ – последний интервал работы второй машины. Ясно, что $t \leq H_1$. При $t \leq h$ свойство (4) выполнено. Далее считаем, что $t > h$. Рассмотрим по отдельности два случая:

$$A)\ t \leq H_3;\quad B)\ t > H_3.$$

<u>Случай A</u>. Так как моменту t предшествует простой на второй машине, то это означает (по правилу 4°), что все работы, пришедшие на 2-ю машину

строго до момента t, успели выполниться на ней также до момента t. Пусть для прямого маршрута это работы $1,\dots,K$, а для встречного – $n'+1,\dots,n'+K'$. Обозначим

$$A_1=\sum_{j=1}^{K}|a_j|,\ A_2=A-A_1,\quad B_1=\sum_{j=1}^{K}|b_j|,\ B_2=B-B_1,$$

$$C_1=\sum_{j=n'+1}^{n'+K'}|c_j'|,\ C_2=C'-C_1,\ B_1'=\sum_{j=n'+1}^{n'+K'}|b_j|,\ B_2'=B'-B_1'.$$

Ясно, что $A_2, C_2>0;\ A_1,C_1\in[t-h,t)$. По правилам 1°, 2°, имеем: $B_1/A_1\geq B_2/A_2$, $B_1'/C_1\geq B_2'/C_2$, откуда, используя (5), получаем:

$$I_2(0,T)=I_2(0,t)=t-B_1-B_1'\leq t-A_1\cdot\frac{B_2}{A_2}-C_1\cdot\frac{B_2'}{C_2}\leq$$

$$\leq t-(t-h)\cdot\frac{B_2}{H_1-t+h}-(t-h)\cdot\frac{B_2'}{H_3-t+h}\leq$$

$$\leq t-(t-h)\cdot\frac{B_2+B_2'}{H_1-t+h}=t-(t-h)\cdot\frac{T-t}{H_1+h-t}<h.$$

Случай B. В этом случае $C_2=B_2'=0$. Аналогично получаем:

$$I_2(0,T)=t-B_1-B_1'\leq t-B_1\leq t-A_1\cdot\frac{B_2}{A_2}\leq t-(t-h)\frac{T-h}{H_1-t+h}<h.$$

Теорема 3 доказана.

§ 2. Алгоритм для задачи встречных маршрутов

В результате алгоритма все множество операций (M) будет разбито на три непересекающихся подмножества M^1, M^2, M^3. Для них будут построены индивидуальные расписания S^1, S^2, S^3, стыковка которых даст необходимый результат.

Обозначим: M_i^K – множество операций из M^K, выполняемых на i-й машине; B_i^K и E_i^K – моменты начала и окончания выполнения операций из M_i^K в расписании S^K. Без ограничения общности можем считать, что

$$A+A'=B+B'=C+C'=H,\quad C'\leq A.$$

Алгоритм состоит из четырех этапов.

Этап 1 (выделение множества M^1 и построение расписания S^1).

1. Рассмотрим множество всех первых и вторых операций обоих маршру-

тов. Для полученной ДЗВМ построим приближенное расписание $\bar{S}^1$, согласно алгоритму, описанному в предыдущем параграфе. При этом третья машина, работая без простоя, закончит работу в момент $E_3^1 \doteq C'$. В это время первая машина еще работает.

2. Включаем в M_3^1 и M_3^1 все операции первой и третьей машин, успевающие выполниться в расписании $\bar{S}^1$ до момента E_3^1. Положив $E_1^1 = |M_1^1|$, будем иметь $E_1^1 \le E_3^1$.

3. Включаем в M_2^1 вторые операции работ j, удовлетворяющих двум требованиям:

- первая операция работы j (a_j либо c_j') включена во множество M^1;

- вторая операция заканчивается в расписании $\bar{S}^1$ не позднее момента $E_1^1 + 2h$.

Все операции из M^1 выполняем согласно расписанию $\bar{S}^1$.

Очевидно, выполняются соотношения

$$E_1^1 \le E_3^1 \le E_2^1 \le E_1^1 + 2h. \tag{6}$$

Кроме того, имеем:

$$|M_2^1| \ge E_1^1. \tag{7}$$

Действительно, в случае $E_2^1 \ge E_1^1 + h$ неравенство (7) следует из соотношений $I_2(0, E_2^1) \le I_2(0, T) = T(\bar{S}^1) - B - B'$, равенства $H = B + B'$ и теоремы 3. Если же $E_2^1 < E_1^1 + h$, то это возможно лишь в том случае, если в M_2^1 вошли вторые операции <u>всех</u> работ, первые операции которых также входят в M^1. Но тогда, по правилам 1°, 2° упорядочения работ, в расписании $\bar{S}^1$ имеем:

$$|M_2^1| \ge E_1^1 \cdot \frac{B}{A} + B' = E_1^1\left(\frac{B}{A} + \frac{B'}{E_1^1}\right) \ge E_1^1\left(\frac{B}{B+B'} + \frac{B'}{B+B'}\right) = E_1^1 \quad \square$$

Из (6) и (7) получаем:

$$|M_i^1| \ge E_1^1, \ \forall i = 1,2,3. \tag{8}$$

<u>Этап 2</u> (выделение множества M^2 и построение расписания S^2).

1. Множество операций $M \setminus (M^1 \cup \{a_j', j = n'+1, \dots, n\})$ рассмотрим как одномаршрутную задачу Беллмана-Джонсона с тремя машинами и n работами. (Будем называть ее задачей БД.) Это возможно, так как каждая работа встречного маршрута представлена не более чем одной ненулевой операцией (на второй машине). Недостающие операции работ будем называть фиктивными операциями нулевой длительности. Обозначим через $H_{БД}$ максимальную из загрузок трех машин в задаче БД и выровняем загрузку остальных машин до

уровня $H_{БД}$, удлинив какие-то из их операций не более чем до h.

Следуя [4], построим расписание для полученной одномаршрутной задачи. Для этого каждой ее работе $j=1,\dots,n$ поставим в соответствие вектор $x_j=(\bar t_1^j-\bar t_2^j,\ \bar t_2^j-\bar t_3^j)\in R^2$, где $\bar t_i^j$ – новые длительности операций. Ясно, что $\|x_j\|_{\ell_\infty}\le 1$, $\forall j$, и $\sum x_j=0$. За $O(n\log n)$ шагов найдем перестановку $\pi=(\pi_1,\dots,\pi_n)$, удовлетворяющую двум свойствам:

$$\min\{x_\pi^k(1),\ x_\pi^{k+1}(1)\}\le 1,\ \forall k=1,\dots,n-1,$$

$$x_\pi^k(2)\le 0,\ \forall k=1,\dots,n, \tag{9}$$

где

$$x_\pi^k=\sum_{j=1}^k x_{\pi_j},$$

$x(i)$ – i-я координата вектора x. Это обеспечивает допустимость расписания S', однозначно определяемого условиями:

- на каждой машине работы выполняются в последовательности π;

- каждая машина работает без простоя, причем первая – в интервале $[0,H_{БД}]$, вторая – в интервале $[2h,H_{БД}+2h]$, третья – в интервале $[3h,H_{БД}+3h]$.

2. Удалим из расписания S' дополнительные длительности операций. При этом для каждой удлиненной операции второй машины считаем дополнительным ее начальный отрезок (чтобы после его удаления момент окончания операции остался прежним). Удалим также все фиктивные (вновь нулевые) операции. На первой и третьей машинах устраним образовавшиеся в результате удаления простои, сдвинув оставшиеся операции влево – на первой машине и вправо – на третьей при сохранении длины расписания $(H_{БД}+3h)$. Полученное расписание обозначим через $\bar S^2$.

3. Включаем в M_1^2 и M_2^2 все операции первой и второй машин (соответственно), начинающие выполняться в расписании $\bar S^2$ до момента $E_1^2\doteq A-|M_1^1|$. Эти же операции успевают и закончиться до момента E_1^2 (кроме последней из M_2^2; пусть это операция работы π_k).

4. Включаем в M_3^2 операции $\{C_j\}$ работ прямого маршрута с номерами $j\in\{\pi_1,\dots,\pi_k\}$.

Все операции из M^2 выполняем согласно расписанию $\bar S^2$. По построению расписания S^2,

$$B_2^2\ge 2h. \tag{10}$$

Этап 3 (построение расписания S^3 для множества операций M^3).

В M_1^3, M_2^3 и M_3^3 включаем оставшиеся операции первой, второй и третьей машин. Поскольку M^3 не содержит первых операций исходных работ, то мы решаем на M^3 задачу, обратную к ДЗВМ. Для этого, назвав третьи операции "первыми", решаем задачу ДЗВМ, а затем прогоняем полученное расписание наоборот. Для построенного расписания S^3 справедливы соотношения:

$$E_2^3 \le E_1^3 = E_3^3 = T(S^3),\ B_2^3 = 0,\ B_1^3 = T(S^3) - |M_1^3|,$$

$$B_3^3 = T(S^3) - |M_3^3|,$$

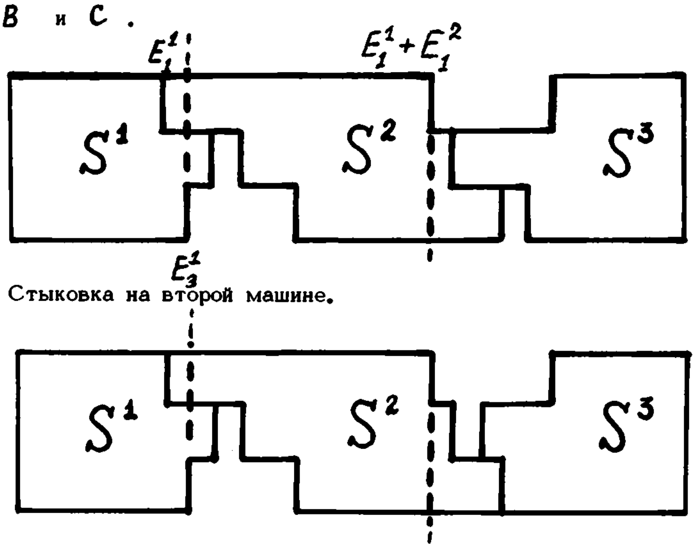
причем первая и третья машины работают без простоев в интервалах $[B_1^3, E_1^3]$ и $[B_3^3, E_3^3]$.

Этап 4.

Пристыкуем расписание S^2 к S^1 справа. Из свойств (6) и (10) следует, что стыковка произойдет на первой машине. Таким образом, моменты начала всех операций из M^2 увеличатся на E_1^1. К полученному расписанию (обозначим его $S^1 \oplus S^2$) пристыкуем справа расписание S^3, увеличив моменты начала всех операций из M^3 на величину

$$\Delta \doteq E_1^1 + max\{E_2^2, E_3^2 - B_3^3\}. \qquad (11)$$

При этом возможны два варианта стыковки: на второй или на третьей машинах (см. рис. 1а и 1б), – в зависимости от того, на какой из двух величин достигается максимум в правой части (11). Эти варианты будем обозначать соответственно B и C.



а) Стыковка на второй машине.

б) Стыковка на третьей машине.

Рис. 1.

§ 3. Доказательство теоремы 1

В допустимости полученного расписания $S = S^1 \oplus S^2 \oplus S^3$ нетрудно убедиться по его построению. Столь же очевидна декларируемая в теореме оценка трудоемкости алгоритма. Остается привести доказательство оценки (3).

<u>Вариант C</u> (стыковка S^2 и S^3 на третьей машине).

Так как в этом случае $T(S) = E_1^1 + T(\bar{S}^2) = E_1^1 + H_{БД} + 3h$, то из (8) получаем оценку (3).

<u>Вариант B</u> (стыковка S^2 и S^3 на второй машине).

Рассмотрим случаи 1, 2 и 3, в зависимости от того, нагрузка какой из трех машин в расписании S^3 является максимальной.

<u>Случай 1.</u> По теореме 3, имеем $B_1^3 \le h$, откуда $I_1(0,T) \le 2h$.

<u>Случай 2.</u> По теореме 3, $I_2(E_1^1 + E_2^2, T(S)) \le h$, откуда, по построению расписаний $\bar{S}^2$ и S' и с использованием (8), получаем:

$$T(S) \le E_1^1 + E_2^2 + |M_2^3| + h \le E_1^1 + T(S') =$$

$$= E_1^1 + H_{БД} + 3h \le H + 3h.$$

<u>Случай 3.</u> В силу (9) и по построению расписания $\bar{S}^2$, имеем $E_3^2 - E_2^2 \geqslant h$. По теореме 3, имеем: $B_3^3 \le h$. Наконец, поскольку рассматривается вариант B, то $E_2^2 \geqslant E_3^2 - B_3^3$, откуда $E_3^2 - h \ge E_2^2 \ge E_3^2 - B_3^3 \geqslant E_3^2 - h$, и, значит, $E_2^2 = E_3^2 - B_3^3$. Но этот случай входит в уже рассмотренный вариант C.

Теорема доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 2

1. Для определенности считаем, что $A \ge C$. Тогда длина расписания S, в котором на первой машине работы выполняются в порядке $1, 2, \ldots, n'$, а на третьей – в порядке $n'+1, \ldots, n$, выражается формулой:

$$T(S) = max\left\{t + \sum_{j=K}^{n'} |b_j| + \sum_{j=K'}^{n} |b_j'|\right\} \doteq max\, f(t, K, K'), \tag{12}$$

где максимум берется по $t \in [0, A]$ и $\{K, K'\}$ таким, что

$$\sum_{j=1}^{K} |a_j| \ge t, \quad \sum_{j=n'+1}^{K'} |c_j'| \ge t.$$

Действительно, для любых допустимых t, K и K' неравенство $T(S) \ge f(t, K, K')$ очевидно. А достигается оно на t, являющемся началом последнего интервала работы второй машины, и K, K', для которых

$f(t,K,K')$ максимально. Последнее означает, что

$$\sum_{j=1}^{K-1}|a_j| < t \le \sum_{j=1}^{K}|a_j|, \qquad (13)$$

$$\sum_{j=n'+1}^{K'-1}|c_j'| < t \le \sum_{j=n'+1}^{K'}|c_j'|, \qquad (14)$$

причем, в одном из нестрогих неравенств (13), (14) достигается равенство.

2. К задаче ДЗВМ будет сведена известная NP-полная в сильном смысле задача

<u>3-разбиение</u> [9, стр. 124, 283].

Условие. Заданы множество $N=\{1,2,\ldots,3n_0\}$, натуральное число E и целые числа $\{e_i,\ i\in N\}$, такие, что $E/4<e_i<E/2$, $\sum e_i = n_0E$.

Вопрос. Можно ли N разбить на n_0 непересекающихся подмножеств $N_1,\ldots,N_{n_0}$ так, что

$$\sum_{i\in N_K} e_i = E,\ \ \forall K=1,\ldots,n_0 \qquad ?$$

Пусть произвольно заданы исходные параметры задачи 3-разбиение. Рассмотрим задачу ДЗВМ*, в которой для $n'=n_0$ работ прямого маршрута и $n''=4n_0+1$ работ встречного маршрута ($n'+n''=n$) заданы следующие величины длительностей операций:

$$|a_i|=6E,\ \ |b_i|=|a_i|/2,\ i=1,\ldots,n';$$

$$|c_i'|=e_i,\ \ i=n_0+1,\ldots,4n_0;$$

$$|c_i'|=5E,\ \ i=4n_0+1,\ldots,5n_0-1,\ |c_{5n_0}'|=3E,$$

$$|c_{5n_0+1}'|=2E;\ \ |b_i'|=|c_i'|/2,\ i=n_0+1,\ldots,n.$$

Для ДЗВМ* выполнено:

$$A=C=B+B'\doteq H. \qquad (15)$$

Кроме того, из (12)-(15) можем получить следующую формулу длины расписания $S_{\pi,\pi'}$, в котором работы прямого маршрута выполняются согласно перестановке $\pi=(\pi_1,\ldots,\pi_{n'})$ чисел $\{1,2,\ldots,n'\}$, а встречного - перестановке $\pi'=(\pi_1',\ldots,\pi_{n''}')$ чисел $\{n'+1,\ldots,n\}$:

$$T(S_{\pi,\pi'})=\max_t\{(t-\sum_{j=1}^{K-1}|a_{\pi_j}|+t-\sum_{j=1}^{K'-1}|c_{\pi_j'}'|)/2+$$

$$+ \sum_{j=1}^{k-1} |a_{\pi_j}|/2 + \sum_{j=1}^{k'-1} |c'_{\pi'_j}|/2 + \sum_{j=k}^{n'} |b_{\pi_j}| + \sum_{j=k'}^{n''} |b'_{\pi'_j}|\} =$$

$$= \max_{t \leq H} (\rho_\pi(t) + \rho'_{\pi'}(t))/2 + H . \qquad (16)$$

Здесь в качестве k и k' берутся те значения этих переменных, на которых в (12) достигается максимум при заданном t (и для которых, следовательно, выполнены (13) и (14)), а функция $\rho_\pi(t)$ (и аналогично – $\rho'_{\pi'}(t)$) определяется как расстояние от точки t до ближайшей слева точки x_π^{k-1} ($x_\pi^{k-1} < t$) из множества

$$\{x_\pi^1, \dots, x_\pi^{n'}\} \text{ , где } x_\pi^i \doteq \sum_{j=1}^{i} |a_{\pi_j}| .$$

3. Покажем, что для любых π, π' расписание $S_{\pi,\pi'}$ задачи ДЗВМ* имеет длину не меньше

$$T(S_{\pi,\pi'}) \geq H + 4E . \qquad (17)$$

Поскольку все операции $\{a_i\}$ имеют одинаковую длину, то множество точек $\{x_\pi^i\}$ не зависит от перестановки π . Рассмотрим одну из операций c'_i длины $5E$, и пусть она выполняется в интервале $[y, z]$, $z = y + 5E$. Если $[y, z]$ целиком содержится в одном из интервалов $[x_\pi^i, x_\pi^{i+1}]$, то $\rho_\pi(z) \geq 5E$, $\rho'_{\pi'}(z) = 5E$, откуда $T(S_{\pi,\pi'}) \geq$ $\geq H + 5E$. Если же $x_\pi^{i+1} = y + \delta$, где $\delta \in (0, 5E)$, то

$$\rho_\pi(x_\pi^{i+1}) + \rho'_{\pi'}(x_\pi^{i+1}) = 6E + \delta,$$

$$\rho_\pi(z) + \rho'_{\pi'}(z) = 5E - \delta + 5E = 10E - \delta,$$

и максимум из этих двух значений всегда не меньше $8E$, что, с учетом (16), и доказывает оценку (17).

4. Покажем, что исходная задача 3-разбиение имеет ответ "да", если и только если в задаче ДЗВМ* существует расписание длины $T(S_{\pi,\pi'}) = H + 4E$.

Пусть $S_{\pi,\pi'}$ – расписание длины $H + 4E$. Из предыдущего пункта мы убедились в том, что в таком расписании каждая операция c'_j длины $5E$ с необходимостью выполняется в интервале $[x_\pi^{i-1} + 4E, x_\pi^i + 3E]$, $i = 1, \dots, n_0 - 1$. Поскольку промежутки между этими интервалами равны E , то в них не могут быть выполнены операции c'_{5n_0} и c'_{5n_0+1} . Кроме того, операция c'_{5n_0} не может выполняться в интервале

$[x_\pi^{n_0-1}+3E,\ x_\pi^{n_0}]$, так как в этом случае $\rho_\pi(x_\pi^{n_0})+\rho'_\pi(x_\pi^{n_0})=9E$. Таким образом, операция C'_{5n_0} выполняется внутри интервала $[0,4E]$, а операция C'_{5n^0+1} - внутри $[x_\pi^{n_0-1}+3E,\ x_\pi^{n_0}]$. Поскольку на интервале $[0,H]$ третья машина работает без простоев, то это означает, что для оставшихся операций третьей машины $\{C'_i,\ i=n_0+1,\dots,4n_0\}\doteq\bar{C}$ существует их разбиение на n_0 подмножеств $\bar{C}=C_1\cup\ldots\cup C_{n_0}$ (где C_i - множество операций из $\bar{C}$, выполняемых в интервале $[x_\pi^{i-1},\ x_\pi^{i}]$), такое, что сумма длительностей операций каждого из множеств C_i равна E . Это дает ответ "да" в исходной задаче 3-разбиение.

Для доказательства обратного утверждения достаточно показать, как по заданному 3-разбиению строится расписание длины $H+4E$ в задаче ДЗВМ*, а это мы делать уже умеем.

Таким образом, доказана NP -полнота в сильном смысле задачи распознавания: для заданного X определить, существует ли в задаче ДЗВМ расписание S длины не более X , что доказывает теорему 2.

§ 5. Заключение

В связи с результатом, полученным в теореме 1, можно поставить несколько интересных вопросов, открывающих перспективу дальнейших исследований.

Вопрос 1. Совпадают ли значения функций $\mu^*_{FS}(m)$ и $\mu^*_{BM}(m)$ при всех m , и если нет, то какое значение m является критическим?

Вопрос 2. Можно ли ожидать такого же совпадения $\mu^*_{FS}(3)$ и $\mu^*_X(3)$ и для остальных двухмаршрутных задач X (которых, по сути дела, две: 1. с маршрутами (1, 2, 3) и (2, 3, 1); 2. с маршрутами (1, 2, 3) и (2, 1, 3)), или же встречные маршруты по своей природе являются более совместимыми?

Вопрос 3. Если для любой двухмаршрутной задачи X удастся доказать, что $\mu^*_X(3)=3$, то будет ли это означать, что и задача $AF(m=3)$ (где допускается одновременное наличие всех 6 маршрутов) обладает тем же свойством? Если "нет", то какое количество разных маршрутов (и каких) является при этом критическим?

Поступила в ред.-изд. отдел
22 мая 1991 г.

Литература

1. Танаев В.С., Сотсков Ю.Н., Струсевич В.А. Теория расписаний. Многостадийные системы. - М.: Наука. - 1989. - 328 с.

2. Севастьянов С.В. Эффективное построение расписаний, близких к оптимальным, для случаев произвольных и альтернативных маршрутов деталей // Докл. АН СССР. - 1984. - Т. 276, № 1. - С. 46-48.

3. Севастьянов С.В. Алгоритм с оценкой для задачи с маршрутами деталей произвольного вида и альтернативными исполнителями // Кибернетика. - 1986. - № 6. - С. 74-79.

4. Севастьянов С.В. Алгоритмы с оценками для задачи Джонсона и Акерса-Фридмана в случае трех станков // Управляемые процессы и оптимизация (Управляемые системы). - 1982. - Вып. 22. - С. 51-57.

5. Barany I. and Fiala T. Nearly optimum solution of multimachine scheduling problems, (Hungarian) Szigma, 15 (1982), no. 3, 177-191.

6. Бабушкин А.И., Башта А.Л., Белов И.С. Построение календарного плана для задачи встречных маршрутов // Кибернетика. - 1977. - № 4. - С. 130-135.

7. Севастьянов С.В. Некоторые обобщения задачи Джонсона // Целочисленные экстремальные задачи (Управляемые системы). - 1981. - Вып. 21. - С. 45-61.

8. Душин Б.И. Алгоритм решения двухмаршрутной задачи Джонсона // Кибернетика. - 1988. - № 3. - С. 53-58.

9. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. - М.: Мир. - 1982. - 416 с.