

О РАЦИОНАЛЬНОМ РАЗМЕЩЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

К.Г.Стоян, В.М.Черепакhin /г.Харьков/

В общем случае задача оптимального размещения геометрических объектов формулируется следующим образом. Имеется n геометрических объектов. Необходимо разместить их в заданной области Ω наилучшим /с той или иной точки зрения/ образом. Под геометрическим объектом будем понимать любую геометрическую фигуру на плоскости или тело в пространстве.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть область Ω имеет вид полубесконечной полосы фиксированной ширины h . Необходимо разместить на ней n плоских геометрических фигур так, чтобы длина занятой части полосы была минимальной при условии взаимного непересечения фигур.

В работах [1-4] описаны методы, с помощью которых на основе R -функций [1] задачу можно представить аналитически в следующем виде:

1. Условия размещения фигур в области Ω :

$$f_i(x_i, y_i, \theta_i) \geq 0 \quad (i = \overline{1, n}), \quad /1/$$

где x_i, y_i, θ_i - параметры подвижной системы координат, связанной с фигурой S_i ($i = \overline{1, n}$) /рис.1/.

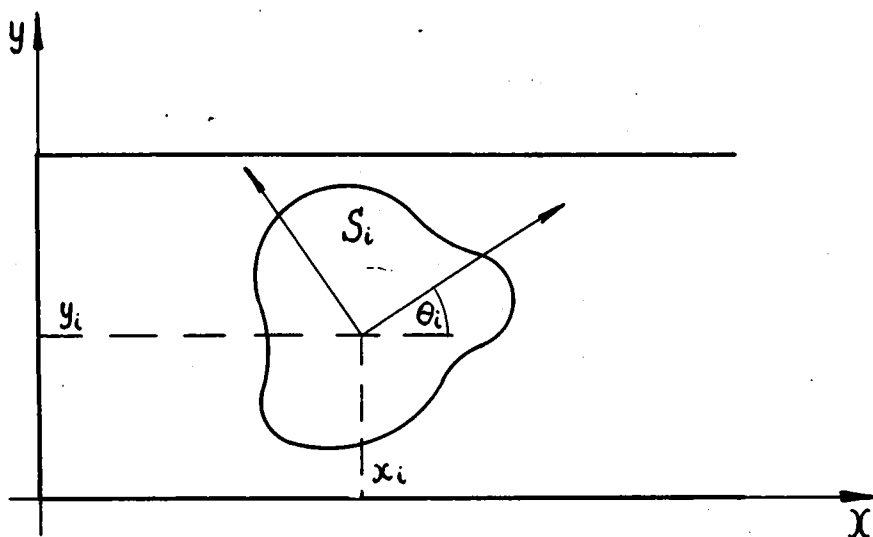


Рис. 1.

2. Условия взаимного непересечения фигур S_i и S_j :

$$f_{ij}(x_i, y_i, \theta_i, x_j, y_j, \theta_j) \geq 0 \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}; i \neq j). \quad /2/$$

3. Функция цели, минимум которой необходимо определить в области G , заданной неравенствами /1-2/:

$$\mathcal{H}(x_i, y_i, \theta_i) = \bigvee_{i=1}^n F_i(x_i, y_i, \theta_i) \quad (i = \overline{1, n}),$$

/3/

где F_i - функция, определяющая абсциссу наиболее удаленных точек фигуры S_i от оси ординат OY , если полоса расположена так, как показано на рис. 1.

$$F_1 \vee_{\alpha} F_2 = \frac{1}{2}(F_1 + F_2 - \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2\alpha F_1 F_2}).$$

\vee_{α} - операция R -дизъюнкции [1].

Функция цели /3/ в случае фигур произвольной формы зависит от m параметров $n \leq m \leq 3n$ и является монотонной в широком смысле. Поэтому она может принимать экстремальные значения только на границах области G , т.е. эти значения являются относительными локальными экстремумами, о чем следует помнить в дальнейшем. Каждому варианту размещения фигур соответствует точка в m -мерном пространстве $X = X(x_1, y_1, \theta_1, x_2, y_2, \theta_2, \dots, x_n, y_n, \theta_n) = X(z_1, z_2, \dots, z_m)$ ($n \leq m \leq 3n$). Следует уточнить понятие локального экстремума применительно к данному классу задач.

Обозначим $G_0 \in G$ область равных значений функции цели $\mathcal{H}(X)$, т.е. $\mathcal{H}(X') = \mathcal{H}(X'')$, если $X \in G_0, X'' \in G_0$.

О п р е д е л е н и е. Ограниченная на G функция $\mathcal{H}(X)$ имеет в области $G_0 \in G$ абсолютный минимум, если $\mathcal{H}(X) \geq \mathcal{H}(X_0)$ при $X \in G, X_0 \in G_0$, и локальный минимум, если можно найти такую область $G_0^{\varepsilon} \in G$, что $G_0 \in G_0^{\varepsilon}$, границы областей G_0 и G_0^{ε} не имеют общих точек и $\mathcal{H}(X) \geq \mathcal{H}(X_0)$ при $X \in G_0^{\varepsilon}, X_0 \in G_0$.

Легко заметить, что если G_0 представляет собой точку, то данное определение эквивалентно классическому определению экстремума [5].

Рассмотрим некоторое начальное размещение геометрических фигур на полосе, которому соответствует начальная точка $X_1 \in G$ /рис.2 а/. Каким-либо методом, например градиентным, можно определить локальный экстремум, соответствующий начальной точке X_1 .

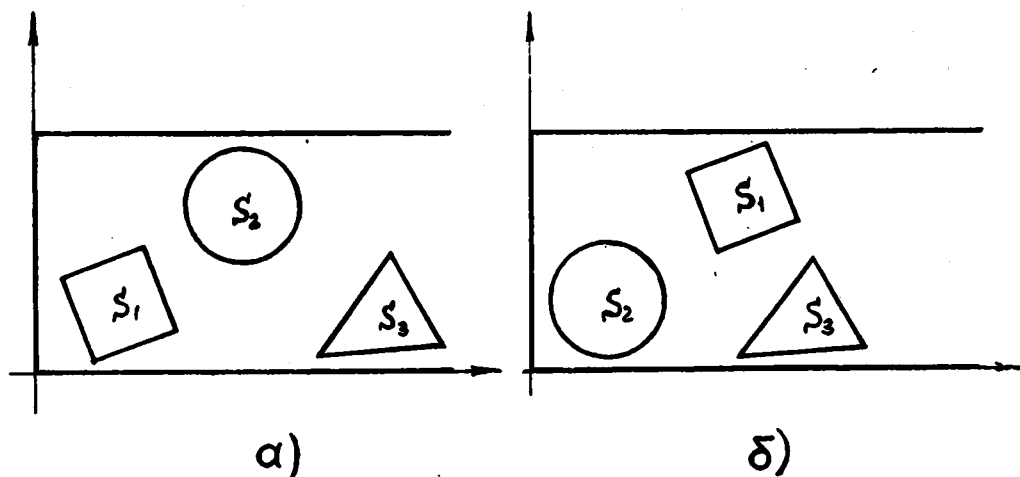


Рис. 2.

Если в размещении A поменять местами пару фигур /рис.2 б/, то новой начальной точке $\chi_2 \in G$ будет соответствовать другой локальный экстремум функции цели /3/. Число таких возможных перестановок $n!$, если фигуры различны по тем или иным признакам. Следовательно, число относительных локальных экстремумов будет также не менее $n!$. На рис. 3 а-г/ показано, что даже для простых выпуклых фигур/кругов/ число локальных экстремумов больше $n!$. Очевидно, что в случае фигур более сложной конфигурации количество локальных экстремумов функции цели /3/ может быть значительно больше $n!$.

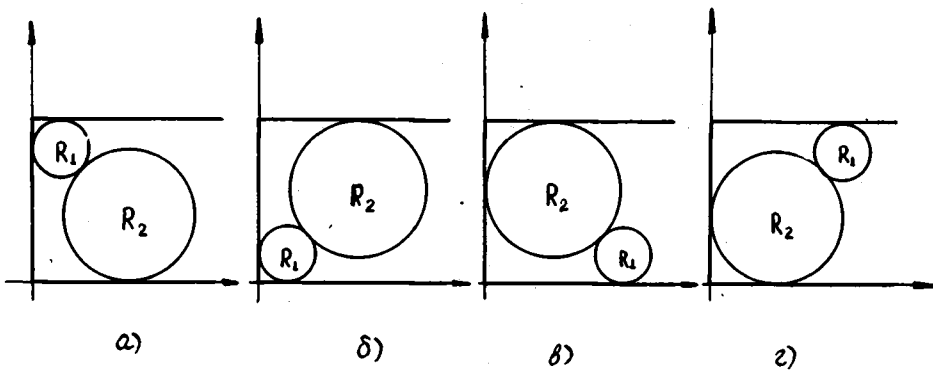


Рис. 3

С помощью современных ЭЦВМ невозможно перебрать все локальные экстремумы уже при $n = 10 + 15$, хотя на практике встречаются задачи с числом фигур $n = 50 + 100$ и более.

В этом случае приходится отказаться от поисков оптимального варианта размещения при использовании метода полного перебора локальных экстремумов и находить рациональный вариант, достаточно близкий к оптимальному.

Уменьшение затрат времени при этом можно ввести в двух основных направлениях:

1. Уменьшение времени нахождения каждого локального экстремума.

Применявшиеся ранее [6] детерминированные методы позволяли получить все возможные экстремальные значения функции цели, однако они были эффективны только при малом n . С ростом n затраты времени на поиск экстремума, как показала практика, растут пропорционально $\approx n^2$. Следует учесть также, что область G , в общем случае, ограничена нелинейными неравенствами /1/, /2/, что делает вычислительный процесс очень громоздким. Поэтому возникла настоятельная необходимость поиска более быстродействующих методов.

Применяемый в данной работе метод последовательного одиночного размещения фигур позволил уменьшить зависимость затрат времени от числа фигур n почти до линейной, хотя и ценой отказа от возможности просчета всех локальных экстремумов. Получаемый вариант не всегда

является локальным экстремумом, однако он достаточно близок к нему, причем относительная разность между ними уменьшается с ростом n , т.к. абсолютная разность в среднем не изменяется.

Суть алгоритма заключается в следующем. Датчиком случайных чисел задается последовательность выборки геометрических фигур. Постановка фигур на полосе осуществляется согласно этой последовательности, причем фигура S_i размещается так, чтобы выполнялось условие $\min F_i(x_i, y_i, \theta_i)$; поставленные ранее фигуры считаются неподвижными [8].

2. Упорядочение перебора локальных экстремумов.

Необходимо организовать такой перебор локальных экстремумов, чтобы, оставаясь случайным, он позволял не выбирать заведомо плохие варианты, т.е. варианты, значительно отличающиеся по значению функции цели от глобального экстремума. Требование случайности обуславливается тем, что при большем числе параметров случайный поиск оказывается более эффективным [7].

Л е м м а. Для функции вида

$$F(x_i) = \bigvee_{i=1}^m F_i(x_i) \quad /4a/$$

или

$$F(x_i) = \bigwedge_{i=1}^m F_i(x_i) \quad /4б/$$

существует при достаточно большом m конечное число областей D_q , в каждой из которых можно осуществить следующее разложение:

$$F(x_i) = \sum_{k=1}^t \psi_k^{(q)}(x_{(k-1)n+1}, x_{(k-1)n+2}, \dots, x_{kn}), \quad /5/$$

причем $t = \frac{n}{r}$; $r \in N(\frac{1}{2}n^{1/6})$; $N(A)$ - целая часть числа A .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Объединим члены правой части выражения /4а/ в t групп, приняв $t = \frac{n}{r}$, $r \in N(\frac{1}{2}n^{1/6})$. Для простоты положим, что t - целое число. Тогда:

$$F(x_i) = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_r) \vee \varphi_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_{2r}) \vee \dots \vee \varphi_t(x_{(t-1)r+1}, x_{(t-1)r+2}, \dots, x_{tr}) \quad /6/$$

$$\vee \varphi_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_{2r}) = \bigvee_{k=1}^t \varphi_k(x_{(k-1)r+1}, x_{(k-1)r+2}, \dots, x_{kr})$$

Подставим в уравнение /6/ выражение R - дизъюнкции

$$F_1 \vee F_2 = \frac{1}{2} (F_1 + F_2 + |F_1 - F_2|):$$

$$\begin{aligned} F(x_i) = 2^{t-t} \{ & \varphi_1 + \varphi_2 + 2\varphi_3 + 2^2\varphi_4 + \dots + 2^{t-3}\varphi_{t-1} + 2^{t-2}\varphi_t + \\ & + |\varphi_1 - \varphi_2| + ||\varphi_1 - \varphi_2| + \varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_3| + \\ & + |||\varphi_1 - \varphi_2| + \varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_3| + |\varphi_1 - \varphi_2| + \varphi_1 + \varphi_2 + 2\varphi_3 - 2^2\varphi_4| + \dots + \\ & + |...||\varphi_1 - \varphi_2| + \varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_3| + |\varphi_1 - \varphi_2| + \varphi_1 + \varphi_2 + 2\varphi_3 - 2^2\varphi_4| + \dots| + \\ & + |...| + \varphi_1 + \varphi_2 + 2\varphi_3 + \dots + 2^{t-3}\varphi_{t-1} - 2^{t-2}\varphi_t \}. \end{aligned} \quad /7/$$

Рассмотрим выражение $F^* = \|A-B\| - C\|$. Обозначим $A-B=D$; $\|A-B\| - C\| = \|D\| - C\| = e$; $\text{sign } A = S_A$. Тогда $F^* = \|A-B\| - C\| = \|S_D \cdot A - S_D \cdot B - C\| =$
 $= S_E \cdot S_D \cdot A - S_E \cdot S_D \cdot B - S_E \cdot C.$

S_E, S_D могут принимать значения $-1, 0, 1$. Любое их произведение может принимать также только значения $-1, 0, 1$. Тогда область определения функции F^* разобьется на подмножества $D_q (q = \overline{1, n})$, в каждом из которых S_E и S_D не меняют знака. Очевидно, в каждой из этих областей $D_q (q = \overline{1, n})$ функция F^* может быть представлена в виде:

$$F^* = S_q^A \cdot A + S_q^B \cdot B + S_q^C \cdot C,$$

причем S_q^A, S_q^B, S_q^C не меняют значений в области D_q .

Аналогичные рассуждения можно провести в отношении выражения /7/, т.е. найдется конечное число областей D_q / t конечно/, в каждой из которых функция $F(x_i)$ будет представлять собой сумму величин φ_i с различными постоянными коэффициентами. Если сделать приведение подобных членов, то получим

$$F(x_i) = \sum_{k=1}^t A_k^q \varphi_k(x_{(k-1)n+1}, x_{(k-1)n+2}, \dots, x_{kn}).$$

Заменив $A_k^{(q)} \varphi_k = \varphi_k^{(q)}$, получим выражение /5/, что и требовалось доказать.

Рассмотрим функцию цели /3/, для которой справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а. Экстремальные значения функции

$$\mathcal{K}(x_i, y_i, \theta_i) = \bigvee_{i=1}^n F_i(x_i, y_i, \theta_i) \quad (x_i, y_i, \theta_i \in G; i = \overline{1, n})$$

распределяются по закону, асимптотически сходящемуся к нормальному при $n \rightarrow \infty$.

Согласно лемме, функцию цели $\mathcal{K}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно разложить на t слагаемых, каждое из которых зависит не более чем от $2n$ соседних переменных. Если учесть ограничения, наложенные на величину n , можно утверждать, что функция цели $\mathcal{K}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ удовлетворяет условиям теоремы Моцкуса [9] об асимптотическом распределении значений функции при большом числе переменных. Другими словами, значения функции цели $\mathcal{K}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при $n \rightarrow \infty$ распределяются по закону, асимптотически сходящемуся к нормальному. Как было показано выше, при $n \rightarrow \infty$ число локальных экстремумов /не менее чем $n!$ / функции цели $\mathcal{K}(x)$, $x \in G$ также неограниченно возрастает, поэтому можно считать множество локальных экстремумов случайной выборкой из всего множества значений функции цели $\mathcal{K}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда на основании центральной статистической теоремы [10] при $n \rightarrow \infty$ распределение экстремальных значений функции цели $\mathcal{K}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ асимптотически приближается к нормальному, что и требовалось доказать.

Следует заметить, что в некоторых задачах рационального размещения геометрических объектов функция цели может иметь вид, отличный от /3/. Однако всегда для нее можно привести аналогичное доказательство.

Из доказанного следует:

1. Вероятность нахождения глобального экстремума чрезвычайно мала, т.к. его значение находится на конце функции распределения и замена его нахождение рационального варианта является вполне обоснованной.

2. На основании этого можно показать [11], [12], что из множества всех значений локальных экстремумов L_1 можно выделить подмножество L_2 , которое также распределяется по закону, асимптотически сходящемуся с ростом n к нормальному, но дисперсия которого $\sigma_2 < \sigma_1$ - дисперсии распределения множества L_1 .

Практически это осуществляется следующим образом. Пусть имеется некоторый вариант размещения фигур S_i ($i = \overline{1, n}$). Если в нем переставить местами пару фигур S_i и S_j , выбранную случайно, то существенно изменятся параметры $x_i, y_i, \theta_i, x_j, y_j, \theta_j$, параметры остальных фигур изменятся незначительно. Следовательно, значение функции цели изменится на величину, в среднем меньшую, чем при полной случайной перестановке всех фигур. Если каждый раз в качестве исходного варианта для перестановки случайно выбранной пары фигур выбирать лучший из полученных ранее вариантов размещения фигур, то математическое ожидание функции цели $K(x_1, x_2, \dots, x_n)$ получаемых вариантов будет ближе к значению $K(x_1, x_2, \dots, x_n)$ исходного варианта, чем математическое ожидание общего распределения множества L_1 . Таким образом, исключается выбор заведомо "плохих" вариантов размещения. Если учесть, что при нахождении варианта L' со значением $K' < K^0$ исходного варианта L^0 последний заменяется на вариант L' , то в процессе счета математическое ожидание получаемых вариантов уменьшается, приближаясь к глобальному экстремуму функции цели $K(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Сходимость такого вычислительного процесса к наилучшему решению показана в работах [11], [12].

На основании описанного алгоритма было решено на ЭЦМ типа М-20 несколько задач оптимального размещения геометрических фигур в полубесконечной полосе.

1. Задача размещения прямоугольных фигур S_i произвольных размеров a_i, b_i ($i = \overline{1, n}$). Задача решалась для $n = 32$. Вариант, полученный на ЭЦМ, приведен на рис. 4 для ширины полосы $h = 10$. Гистограммы значений целевой функции в точках локальных экстремумов при равновероятной выборке начальной точки /1/ и значений, получаемых предлагаемым методом /П/, приводятся на рис. 6 для ширины полосы $h = 10(a)$ и $h = 6(b)$.

Сравнительные данные задач сведены в таблицу.

2. Задача размещения n кругов произвольного радиуса R_i ($i = \overline{1, n}$). Задача решалась для $n = 15, n = 26, n = 50$. Наилучший вариант при $n = 15$, полученный описанным методом, приведен на рис. 5. На рис. 7 для $n = 15$ показаны гистограммы значений функции цели при равновероятной выборке начальных точек /1/ и значений, получаемых описан-

ным методом /П/, рис. 7б. Были получены также все варианты, отличающиеся перестановкой одной пары фигур от некоторого исходного варианта L_7 .

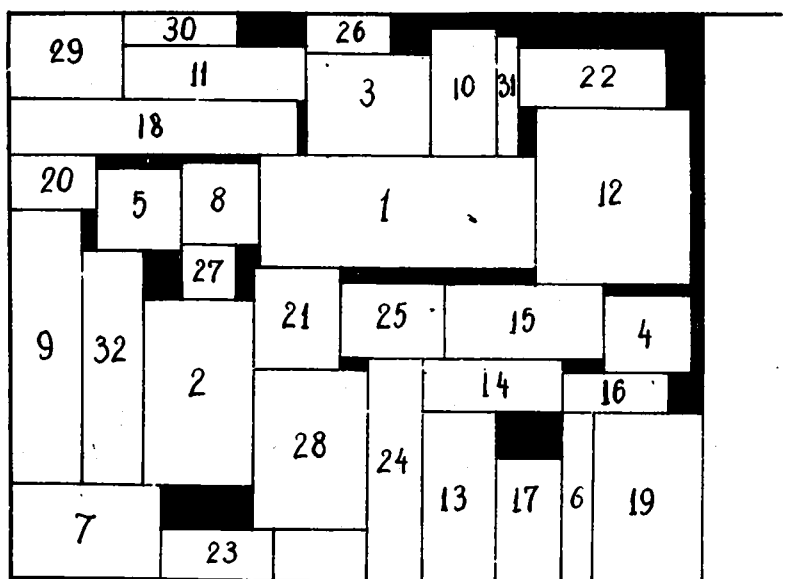


Рис. 4

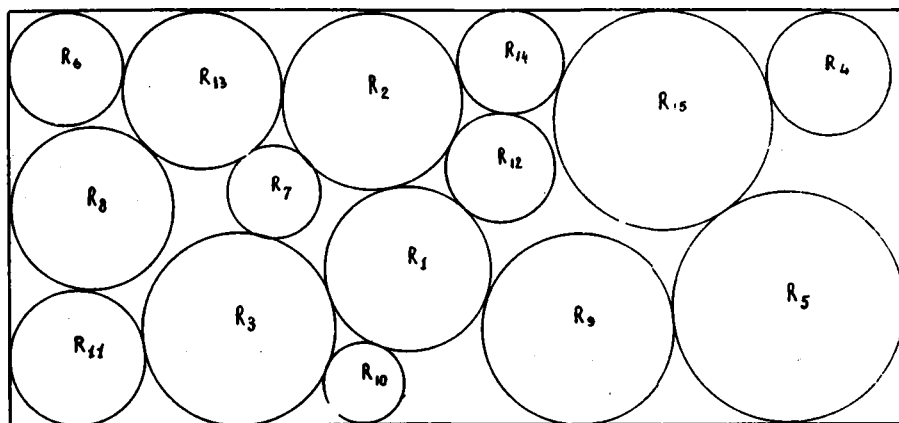


Рис. 5

Гистограммы двух таких распределений представлены на рис. 7а для $L_0^{(1)} = 21,2$ /П/ и для $L_0^{(2)} = 24,9$ /Ш/.

3. Задача размещения n кругов / $n = 26$ / при наличии ограничений на минимально возможное расстояние d_{ij} ($i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}; i \neq j$) между каждой парой размещаемых кругов. Параметры соответствующих зависимостей также сведены в таблицу. Составленная программа рассчитана на применение в случае, если $d_{ij} < R_i$. В этом случае несколько упрощается анализ проверяемых условий. При невыполнении указанного ограничения программы может быть применена при незначительных добавлениях.

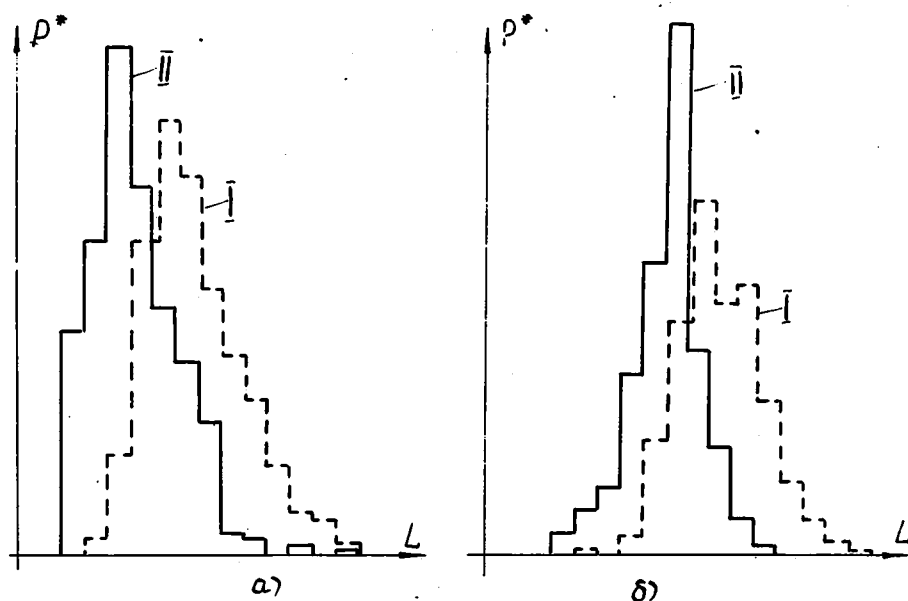


Рис. 6

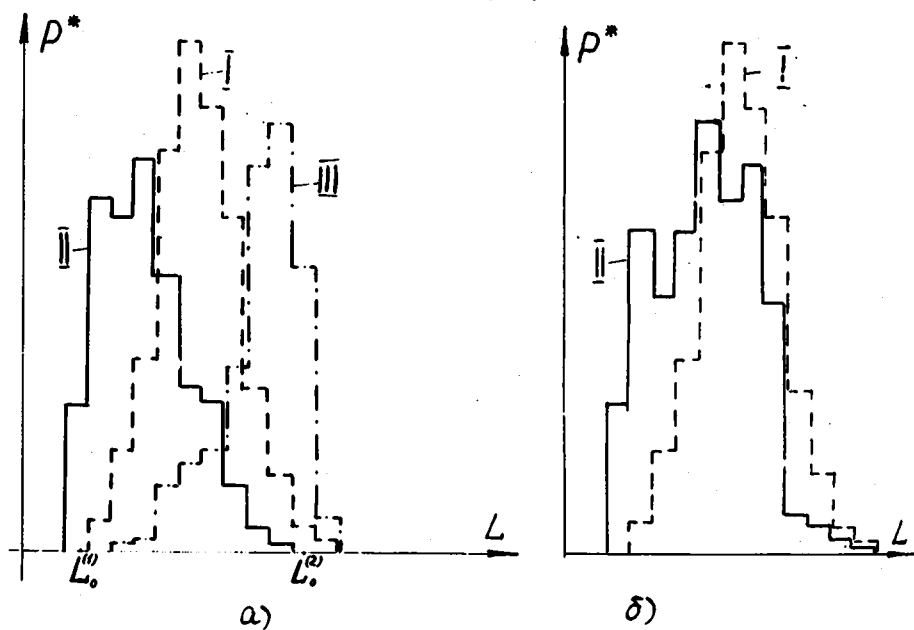


Рис. 7

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Применением метода последовательной одиночной постановки фигур удалось значительно снизить затраты времени на просчет одного варианта, причем особенно эффективным метод оказывается при большом числе фигур.

2. Перебором вариантов, отличающихся только одной парой, можно также на 25+50% уменьшить время счета одного варианта, если хранить в памяти машины параметры постановки фигур в исходном варианте, т.к. часть фигур в вариантах имеет одинаковые параметры.

Т а б л и ц а

Параметры зависимостей	К р у г и				Прямоугольники	
	Без ограничения на расстояния между парами фигур			При наличии ограничений	Без ограничений	
1. Число фигур	15	26	50	26	32	32
2. Ширина полосы	20	12	20	18	10	6
3. Число просчитанных вариантов	500	500	500	500	500	500
4. Параметры случайной выборки						
а/математическое ожидание	51,7	27,8	71,0	36,5	14,82	25,1
б/дисперсия	2,12	1,06	2,91	1,63	1,07	1,31
5. Параметры распределения предлагаемого метода						
а/математическое ожидание m_x	50,3	27,1	69,1	34,2	13,57	23,5
б/дисперсия σ^2	2,14	0,99	2,96	1,59	0,82	1,06
6. Длина занятой полосы в наилучшем варианте	46,1	24,2	60,4	29,4	12,2	20,1
7. Вероятность наилучшего варианта, полученного предлагаемым методом, относительно случайной выборки	10^{-3}	$6 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$

3. Если сравнить полученные результаты с результатами равновероятной выборки начальной точки поиска, то легко заметить, что в процессе счета задачи вероятность получения "плохих" вариантов постоянно уменьшается, т.к. с каждым улучшением результата математическое ожидание получаемого распределения смещается влево. Это хорошо согласуется с теоретическими выводами, сделанными в работах [11, 12].

4. Распределение значений целевой функции при равновероятной выборке вариантов можно с некоторой достоверностью принять за распределение всего множества локальных экстремумов. Нетрудно подсчитать основные параметры m_x , σ^2 / этого распределения. Тогда можно относительно последнего определить вероятность получения варианта, не хуже, чем полученный предлагаемым методом. Как видно из Таблицы 1, для получения такого результата в среднем при равновероятной выборке требуется значительно большее число просчетов локальных экстремумов целевой функции.

Поступила в редакцию 1.10.1969 г.

Л и т е р а т у р а

1. В.Л.Рвачев. Геометрические приложения алгебры логики. "Техника", Киев, 1967.
2. В.Л.Рвачев, Ю.Г.Стоян. Алгоритм построения неравенств, которым удовлетворяют параметры размещения непересекающихся тел, "Кибернетика", 1966, № 5.
3. В.Л.Рвачев, Ю.Г.Стоян. К задаче распознавания непересечения геометрических фигур специального вида, "Кибернетика", 1965, № 6.
4. В.Л.Рвачев, Ю.Г.Стоян. К вопросу об оптимальном раскрое материалов. "Вопросы теоретической кибернетики", Киев, 1965.
5. Г.М.Фихтенгольц. Основы математического анализа, "Наука", 1964, том I.
6. В.Л.Рвачев, Ю.Г.Стоян. К задаче об оптимальном размещении круглых выкроек, "Кибернетика", 1965, № 4.
7. Л.А.Растригин. Случайный поиск, "Зинатне", Рига, 1965.
8. Ю.Г.Стоян, В.М.Черепяхин. Об одном способе рационального размещения кругов в полосе. Тезисы докладов и сообщений на Всесоюзном межвузовском симпозиуме по прикладной математике и кибернетике. Горький, 1967.
9. И.Б.Моцкус. Многоэкстремальные задачи в проектировании, "Наука", М., 1967.
10. Ш.Лозв. Теория вероятностей, ИЛ, М., 1960.
11. Ю.Г.Стоян. Об одном способе поиска наилучшего решения для одного класса многоэкстремальных задач. "Управляемые системы" № 3, 1969.
12. Ю.Г.Стоян. Об одном итерационном процессе статистического решения одного класса многоэкстремальных задач. Тезисы докладов и сообщений на Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики. Новосибирск, 1969.