Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1970 г. выпуск 4-5.
УДК.519.95.

# О СУЩЕСТВОВАНИИ ОБОБЩЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ.

О.А.Малафеев/Ленинград/

Рассматриваются игры, в которых динамика игроков задается посредством функций достижимости, являющихся некоторым видоизменением функций достижимости обобщенных динамических систем [1]. Доказывается существование обобщенного значения таких игр [2].

Пусть $X$ - полное метрическое пространство. В $X$ рассматриваются два подвижных объекта - игроки $P$ и $E$, маневренные способности которых описываются посредством задания их функций достижимости $P(x,t_0,t)$ и соответственно $E(y,t_0,t)$. При этом функции достижимости $P(x,t_0,t)$ и $E(y,t_0,t)$ предполагаются удовлетворяющими ряду аксиом. Мы их перечислим лишь для функции достижимости $P(x,t_0,t)$, для функции достижимости $E(y,t_0,t)$ они выписываются аналогичным образом.

1. $P(x,t_0,t)$ определена для всех $x\in X$ и всех $t_0,t\in[0,\infty)$, таких, что $t_0\leq t$ является непустым ограниченным множеством пространства $X$.
2. $P(x,t_0,t_0)=x$ для всех $t_0\in[0,\infty)$ и всех $x\in X$.
3. Для всех $t_0, t_1, t_2$, таких, что $t_0\leq t_1\leq t_2$,

$$P(x_0,t_0,t_2)=\bigcup_{x_1\in P(x_0,t_0,t_1)} P(x_1,t_1,t_2).$$

4. Функция $P(x,t_0,t)$ непрерывна в псевдометрике Хаусдорфа по $t$, то есть при данных $x, t_0\leq t$ и $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta>0$, что $\rho^*(P(x,t_0,t_1), P(x,t_0,t))<\varepsilon$, если $|t-t_1|<\delta$.

Напомним, что псевдометрика Хаусдорфа задается функцией $\rho^*$ на множествах пространства $X\times X$ следующим образом.

Пусть

$$\rho(a,B)=\rho(B,a)=\min_{b\in B}\{\rho(a,b)\}$$

/здесь $\rho$ - метрика исходного пространства $X$ / и

$$\rho'(A,B)=\max_{a\in A}\{\rho(a,B)\},$$

тогда

$$\rho^*(A,B)=\rho^*(B,A)=\max\{\rho'(A,B),\ \rho'(B,A)\}.$$

5. $P(x,t_0,t)$ непрерывна по $t_0, x$ равномерно в любом конечном интервале $t\in[t_1,t_2]$, то есть при данных $x, t_0, t_1, t_2, \varepsilon>0$ найдется такое число $\delta>0$, что

$$\rho^*(P(x',t_0',t), P(x,t_0,t))<\varepsilon$$

при всяких $x', t_0', t$, таких, что $\rho(x',x)<\delta$, $|t_0-t_0'|<\delta$, $t_1\leq t\leq t_2$,

$t_0 \le t,\ t_0' \le t.$

Игры, которые мы обозначим $\Gamma_j(x,y,T)(j=1,2,3)$, протекают следующим образом. Игроки $P$ и $E$ начинают перемещаться из начальных позиций $x$ и соответственно $y$ в момент времени $t_0=0$, и в момент времени $T(0\le T<\infty)$ игра заканчивается, после чего игрок $P$ платит игроку $E$ некоторую величину, называемую выигрышем игрока $E$.

Мы рассмотрим игры с тремя следующими типами выигрыша.

1. На произведении $X\times X$ задана непрерывная ограниченная на ограниченных множествах функция $H(x,y)$, и в момент времени $T$ окончания игры игрок $P$ платит игроку $E$ величину $H(x(T),\ y(T))$. /Здесь $x(T), y(T)$ суть местоположения игроков $P$ и соответственно $E$. Такие игры называются играми с терминальным выигрышем. Мы будем обозначать их через $\Gamma_1(x,y,T)$ /.

2. На произведении $X\times X$ задана непрерывная ограниченная на ограниченных множествах функция $g(x,y)$, и в момент времени $T$ окончания игры игрок $E$ получает от игрока $P$ величину

$$\min_{t\in[0,T]} g(x(t),\ y(t)).$$

Игры с таким выигрышем мы обозначим $\Gamma_2(x,y,T)$

3. На произведении $X\times X$ задана непрерывная ограниченная на ограниченных множествах функция $h(x,y)$, и в момент времени $T$ окончания игры игрок $E$ получает от игрока $P$ величину $\int\limits_{z(0)}^{z(T)} h(z)$. /Здесь $z(t)=(x(t),\ y(t))$ /. Такие игры называются играми с интегральным выигрышем. Мы их обозначим через $\Gamma_3(x,y,T)$.

Игра $\Gamma_j(x,y,T)(j=1,2,3)$ антагонистическая, то есть целью игрока $P$ в игре является минимизация выигрыша, цель игрока $E$ противоположна. В каждый момент времени игры $t'$ обоим игрокам известно свое местоположение и местоположение противника, маневренные способности обоих игроков - функции достижимости $P(x,t_0,t),\ E(y,t_0,t)$ и время, оставшееся до окончания игры $T-t'$.

Стратегии игроков $P$ и $E$ в игре $\Gamma_j(x,y,T)(j=1,2,3)$ можно ввести подобно тому, как это делается в [3] и [4]. В данной работе мы исследуем вопрос дискретной аппроксимации таких игр.

Положим $\delta=\delta_n=T/2^n$ и введем в рассмотрение дискретные игры $\Gamma_{ij}^{\delta}(x_0,y_0,T)(j=1,2,3;\ i=0,1,2,3)$. Игра $\Gamma_{1j}^{\delta}(x_0,y_0,T)$ протекает следующим образом. На первом шаге игрок $E$, находясь в начальной позиции $y_0$, выбирает точку $y_{\beta_1}^{\delta}$ из множества

$$E_{\beta_0}^{\delta}=E(y_0,t_0,t_0+\delta)=\{y_{\beta_1}^{\delta}\},$$

а игрок $P$, находясь в начальной позиции $x_0$ и зная выбор игрока $E$ на этом шаге, в свою очередь, выбирает некоторую точку из множества

$$P_{\alpha_0}^{\delta}=P(x_0,t_0,\ t_0+\delta)=\{x_{\alpha_1}^{\delta}\}.$$

На $k$-м шаге $(k=1,2,\dots,2^n)$ игрок $E$, зная позицию игрока $P$ - точ-

ку $x^\delta_{\alpha_{k-1}}$ и собственную позицию /точку $y^\delta_{\beta_{k-1}}$ /, выбирает точку $y^\delta_{\beta_k}$ из множества

$$E^\delta_{\beta_{k-1}} = E(y^\delta_{\beta_{k-1}}, t_0+(k-1)\delta, t_0+k\delta),$$

а игрок $P$, зная сверх этого выбор игрока $E$ на данном шаге, выбирает точку из множества

$$P^\delta_{\alpha_{k-1}} = P(x^\delta_{\alpha_{k-1}}, t_0+(k-1)\delta, t_0+k\delta).$$

На $2^n$-м шаге игра заканчивается, и игрок $P$ платит игроку $E$ его выигрыш, равный:

$$H(x^\delta_{\alpha_0\ldots\alpha_{2^n}}, y^\delta_{\beta_0\ldots\beta_{2^n}}) \quad \text{- в игре } \Gamma^\delta_{11}(x_0, y_0, T);$$

$$\min_{0\le k\le 2^n} g(x^\delta_{\alpha_0\ldots\alpha_k}, y^\delta_{\beta_0\ldots\beta_k}) \quad \text{- в игре } \Gamma^\delta_{12}(x_0, y_0, T);$$

$$\sum_{k=0}^{2^n} h(x^\delta_{\alpha_0\ldots\alpha_k}, y^\delta_{\beta_0\ldots\beta_k}) \quad \text{- в игре } \Gamma^\delta_{13}(x_0, y_0, T).$$

Далее, всюду, где это не вызовет недоразумений, вместо индексов $\alpha_0\ldots\alpha_k, \beta_0\ldots\beta_k$ мы будем писать индексы $\alpha_k$ и $\beta_k$ соответственно.

Все игры $\Gamma^\delta_{ij}(x_0, y_0, T)$ предполагаются антагонистическими. Каждому игроку известно количество шагов в игре и множества $P^\delta_{\alpha_{k-1}}$, $E^\delta_{\beta_{k-1}}$ $(k=1,\ldots,2^n)$.

Игры $\Gamma^\delta_{2j}(x_0, y_0, T)$ отличаются от игр $\Gamma^\delta_{1j}(x_0, y_0, T)(j=1,2,3)$ тем, что на $k$-м шаге $(k=1,\ldots,2^n)$ игрок $P$ выбирает точку $x^\delta_{\alpha_k}$ из множества $P^\delta_{\alpha_{k-1}}$, зная позиции обоих игроков - точки $x^\delta_{\alpha_{k-1}}$ и $\tilde{y}^\delta_{\beta_{k-1}}$, а игрок $E$ осуществляет свой выбор, будучи сверх того осведомлен о выборе игрока $P$, сделанном им на этом же шаге.

Дискретные игры $\Gamma^\delta_{0j}(x_0, y_0, T)$ отличаются от игр $\Gamma^\delta_{1j}(x_0, y_0, T)(j=1,2,3)$ тем, что на $k$-м шаге $(k=1,\ldots,2^n)$ оба игрока $P$ и $E$ производят выборы точек из соответствующих множеств $P^\delta_{\alpha_{k-1}}$ и $E^\delta_{\beta_{k-1}}$, не имея информации о выборе противника на этом шаге.

Игры $\Gamma^\delta_{3j}(x_0, y_0, T)$ отличаются от игр $\Gamma^\delta_{2j}(x_0, y_0, T)(j=1,2,3)$, тем, что на $2^n$-м шаге игрок $P$ выбирает точку $x^\delta_{\alpha_{2^n}}$ из множества $P^\delta_{\alpha_{2^n-1}}$, после чего игрок $P$ платит игроку $E$ его выигрыш, соответствующий позиции $(x^\delta_{\alpha_{2^n}}, y^\delta_{\beta_{2^n-1}})$, то есть игрок $E$ не совершает выбора на последнем шаге игры.

Л е м м а I. Пусть дана функция $f(x, y)$, непрерывная на произведении $X\times Y$ полных метрических пространств $X$ и $Y$ и ограниченная на ограниченных множествах этого произведения. Пусть, далее $\{A(r)\}$ и $\{B(s)\}$ - непрерывные по $r$ и $s$ в псевдометрике Хаусдорфа семейства ограниченных множеств, причем $r$ и $s$ берутся из

некоторых множеств и $S$ полных метрических пространств $R$ и соответственно $S$. Тогда функции

$$F(r,s)=\sup_{x\in A(r)}\inf_{y\in B(s)} f(x,y),$$
$$G(r,s)=\inf_{y\in B(s)}\sup_{x\in A(r)} f(x,y)$$

непрерывны на произведении $R\times S$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем доказательство леммы для функции $F(r,s)$; для функции $G(r,s)$ оно проводится аналогичным образом. Функция $\inf_{y\in B(s)} f(x,y)$, являясь инфимумом семейства непрерывных ограниченных функций на ограниченном множестве, является непрерывной функцией на ограниченном множестве $A(r)$. Зададимся числом $\varepsilon>0$. По непрерывности функции $g(x)=\inf_{y\in B(s)} f(x,y)$ на всем пространстве $X$ найдется такое число $\delta>0$, что если точка $x'$, принадлежащая множеству $A(r)\Delta A(r')$, такова, что существует точка $x$, принадлежащая множеству $A(r)\cap A(r')$, такая, что $\rho(x',x'')<\delta$, то справедливо неравенство $|g(x'')-g(x')|<\varepsilon$. А из определения псевдометрики Хаусдорфа следует, что для выполнения этого условия достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\rho^*(A(r),A(r'))<\delta$. В силу непрерывности семейства множеств $\{A(r)\}$ по параметру $r$ в псевдометрике Хаусдорфа для всякого числа $\delta>0$ существует такое число $\eta>0$, что, как только $\rho(r',r)<\eta$, так сразу же выполняется неравенство $\rho^*(A(r),A(r'))<$ $<\delta$. Следовательно, по всякому $\varepsilon>0$ можно найти такое число $\eta>0$, что, как только $\rho(r',r)<\eta$, так сразу же

$$\left|\sup_{x\in A(r)}\inf_{y\in B(s)} f(x,y)-\sup_{x\in A(r')}\inf_{y\in B(s)} f(x,y)\right|<\varepsilon.$$

Аналогичным образом доказывается непрерывность функции $F(r,s)$ по $s\in S$.

Л е м м а 2. Игры $\Gamma_{ij}^{\delta}(x_0,y_0,T)(i=1,2,3;j=1,2,3)$ обладают ситуациями $\varepsilon$ - равновесия при всяких $x_0,y_0\in X$ и всяком $T<\infty$; функции $Val(\Gamma_{ij}^{\delta}(x_0,y_0,T))(i=1,2,3;j=1,2,3)$ непрерывны по $x_0,y_0\in X$; при всяком $n\geqslant 0$ справедливы неравенства

$$Val(\Gamma_{1j}^{\delta_n}(x_0,y_0,T))\leqslant Val(\Gamma_{2j}^{\delta_n}(x_0,y_0,T))\ (j=1,2,3). \qquad /1/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство существования ситуаций $\varepsilon$ -равновесия в играх $\Gamma_{ij}^{\delta}(x_0,y_0,T)\ (i=1,2,3;j=1,2,3)$ можно провести аналогично доказательству теоремы Цермело - фон Неймана для игр с полной информацией. Мы его опускаем. Неравенства /1/ непосредственно вытекают из известного соотношения

$$\sup_{x\in A}\inf_{y\in B} f(x,y)\leqslant\inf_{y\in B}\sup_{x\in A} f(x,y),$$

справедливого всегда, когда имеют смысл выражения, стоящие в обеих

частях неравенства.

Выпишем функциональные уравнения для функций $Val(\Gamma_{ij}^{\delta}(x_0,y_0,T))$.

$$Val(\Gamma_{11}^{\delta}(x_0,y_0,T))=\sup_{y_{\beta_1}\in E^{\delta}_{\beta_0}}\ \inf_{x_{\alpha_1}\in P^{\delta}_{\alpha_0}} Val(\Gamma_{11}^{\delta}(x_{\alpha_1},y_{\beta_1},T-\delta))$$

$$Val(\Gamma_{11}^{\delta}(x_{\alpha_{2^n-1}},y_{\beta_{2^n-1}},T-(2^n-1)\delta))=\sup_{y_{\beta_{2^n}}\in E^{\delta}_{\beta_{2^n-1}}}\ \inf_{x_{\alpha_{2^n}}\in P^{\delta}_{\alpha_{2^n-1}}} H(x_{\alpha_{2^n}},y_{\beta_{2^n}}). \qquad /2/$$

$$Val(\Gamma_{12}^{\delta}(x_0,y_0,T))=\min\Big\{g(x_0,y_0),\ \sup_{y_{\beta_1}\in E^{\delta}_{\beta_0}}\ \inf_{x_{\alpha_1}\in P^{\delta}_{\alpha_0}} Val(\Gamma_{12}^{\delta}(x_{\alpha_1},y_{\beta_1},T-\delta))\Big\}.$$

$$Val(\Gamma_{12}^{\delta}(x_{\alpha_{2^n-1}},y_{\beta_{2^n-1}},T-(2^n-1)\delta)=\min\Big\{g(x_{\alpha_{2^n-1}},y_{\beta_{2^n-1}}),$$
$$\sup_{y_{\beta_{2^n}}\in E^{\delta}_{\beta_{2^n-1}}}\ \inf_{x_{\alpha_{2^n}}\in P^{\delta}_{\alpha_{2^n-1}}} g(x_{\alpha_{2^n}},y_{\beta_{2^n}})\Big\}. \qquad /3/$$

$$Val(\Gamma_{13}^{\delta}(x_0,y_0,T))=\sup_{y_{\beta_1}\in E^{\delta}_{\beta_0}}\ \inf_{x_{\alpha_1}\in P^{\delta}_{\alpha_0}}\Big\{h(x_{\alpha_1},y_{\beta_1})+Val(\Gamma_{13}^{\delta}(x_{\alpha_1},y_{\beta_1},T-\delta))\Big\} \qquad /4/$$

$$Val(\Gamma_{13}^{\delta}(x_{\alpha_{2^n-1}},y_{\beta_{2^n-1}},T-(2^n-1)\delta))=\sup_{y_{\beta_{2^n}}\in E^{\delta}_{\beta_{2^n-1}}}\ \inf_{x_{\alpha_{2^n}}\in P^{\delta}_{\alpha_{2^n-1}}} h(x_{\alpha_{2^n}},y_{\beta_{2^n}}).$$

Непрерывность функций $Val(\Gamma_{ij}^{\delta}(x_0,y_0,T))(j=1,2,3)$ по $x_0,y_0\in X$ следует из утверждений леммы I применительно к правым частям соотношений /2/ - /4/, являющихся непрерывными функциями на $X\times X$ ,и множествам $P^{\delta}_{\alpha_k}, E^{\delta}_{\beta_k}$ $(k=0,\dots,2^n-1)$.

Аналогичным образом выписываются функциональные уравнения для функций $Val(\Gamma_{ij}^{\delta}(x_0,y_0,T))(i=2,3;j=1,2,3)$ и доказывается непрерывность этих функций по $x_0,y_0\in X$ .

Л е м м а 3. При всяком целом $n\geq 0$ справедливы неравенства:

$$Val(\Gamma_{1j}^{\delta_n}(x_0,y_0,T))\leq Val(\Gamma_{1j}^{\delta_{n+1}}(x_0,y_0,T))\ (j=1,2,3)$$
$$Val(\Gamma_{2j}^{\delta_n}(x_0,y_0,T))\geq Val(\Gamma_{2j}^{\delta_{n+1}}(x_0,y_0,T))\ (j=1,2,3).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем справедливость первого из неравенств какого-нибудь фиксированного $j$ . Остальные неравенства доказываются аналогичным образом. Пусть в результате выбора оптимальной стратегии в игре $\Gamma_{1j}^{\delta_n}(x_0,y_0,T)$ игрок $E$ получает гарантированный выигрыш - величину $Val(\Gamma_{1j}^{\delta_n}(x_0,y_0,T))-\varepsilon$. При этом оптимальной стратегией игрока $E$ является последовательность

$$y^{\delta_n}_{\beta_1}(x^{\delta_n}_{\alpha_1}),\ y^{\delta_n}_{\beta_2}(x^{\delta_n}_{\alpha_1},x^{\delta_n}_{\alpha_2}),\dots,y^{\delta_n}_{\beta_{2^n}}(x^{\delta_n}_{\alpha_1},\dots,x^{\delta_n}_{\alpha_{2^n}}).$$

Сузим класс допустимых стратегий игрока $E$ в игре $\Gamma_{1j}^{\delta_{n+1}}(x_0,y_0,T)$, а именно: допустим, что он пользуется лишь стратегиями вида:

$$y_{\beta_1}^{\delta_{n+1}},\ y_{\beta_2}^{\delta_{n+1}}(x_{\alpha_2}^{\delta_{n+1}}),\ldots,\ y_{\beta_{2^{n-1}}}^{\delta_{n+1}}(x_{\alpha_2}^{\delta_{n+1}},\ldots,x_{\alpha_{2^n-2}}^{\delta_{n+1}}),\ldots,\ y_{\beta_{2^n}}^{\delta_{n+1}}(x_{\alpha_2}^{\delta_{n+1}},\ldots,x_{\alpha_{2^n}}^{\delta_{n+1}})$$

Нетрудно видеть, что при этом он гарантирует себе выигрыш, равный $Val(\Gamma_{1j}^{\delta_n}(x_0,y_0,T))-\varepsilon$, откуда и следует справедливость требуемого неравенства.

Теорема I.

$$\lim_{n\to\infty} Val(\Gamma_{11}^{\delta_n}(x_0,y_0,T))=\lim_{n\to\infty} Val(\Gamma_{21}^{\delta_n}(x_0,y_0,T)). \qquad /5/$$

Доказательство. Рассмотрим игры $\Gamma_{21}^{\delta_n}(x_0,y_0,T)$, $\Gamma_{31}^{\delta_n}(x_0,y_0,T)$. Нетрудно видеть, что всякой паре стратегий $(\varphi,\psi)$ в игре $\Gamma_{21}^{\delta_n}(x_0,y_0,T)$ соответствует пара стратегий $(\varphi',\psi')$ в игре $\Gamma_{31}^{\delta_n}(x_0,y_0,T)$, являющаяся усечением пары $(\varphi,\psi)$ на последнем шаге. Обозначим функции выигрыша в играх $\Gamma_{21}^{\delta_n}(x_0,y_0,T)$ и $\Gamma_{31}^{\delta_n}(x_0,y_0,T)$ через $K_2(\varphi,\psi)$ и соответственно $K_3(\varphi',\psi')$. Тогда, очевидно,

$$K_2(\varphi,\psi)\le K_3(\varphi',\psi')+\left|H(x_{\alpha_{2^n}}^{\delta},y_{\beta_{2^n}}^{\delta})-H(x_{\alpha_{2^n}}^{\delta},y_{\beta_{2^n}}^{\delta})\right|.$$

И, следовательно, справедливо неравенство

$$Val(\Gamma_{21}^{\delta_n}(x_0,y_0,T))\le Val(\Gamma_{31}^{\delta_n}(x_0,y_0,T))+ + \sup_{y\in E(y,t_0,T-\delta)}\ \sup_{y'\in E(y,t_0,\delta)}\left|H(x_{\alpha_{2^n}}^{\delta},y)-H(x_{\alpha_{2^n}}^{\delta},y')\right|. \qquad /6/$$

Перепишем /6/ для игр с другими начальными данными:

$$Val(\Gamma_{21}^{\delta_n}(x_0,y_{\beta_1}^{\delta},T))\le Val(\Gamma_{31}^{\delta_n}(x_0,y_{\beta_1}^{\delta},T))+ + \sup_{y\in E(y_{\beta_1}^{\delta},t_0,T-\delta)}\ \sup_{y'\in E(y,t_0,\delta)}\left|H(x_{\alpha_{2^n}}^{\delta},y)-H(x_{\alpha_{2^n}}^{\delta},y')\right|. \qquad /7/$$

По построению множества $E(y_{\beta_1}^{\delta},t_0,T-\delta)$ справедливо включение:

$$E(y_{\beta_1}^{\delta},t_0,T-\delta)\subset E(y_0,t_0,T),$$

и в силу ограниченности функции $H$ на ограниченных множествах справедливо соотношение:

$$Val(\Gamma_{21}^{\delta_n}(x_0,y_{\beta_1}^{\delta},T))\le Val(\Gamma_{31}^{\delta_n}(x_0,y_{\beta_1}^{\delta},T))+ + \sup_{y\in E(y_0,t_0,T)}\ \sup_{y'\in E(y,t_0,\delta)}\left|H(x_{\alpha_{2^n}}^{\delta},y)-H(x_{\alpha_{2^n}}^{\delta},y')\right|. \qquad /8/$$

Из определения игр $\Gamma_{11}^{\delta_n}(x_0,y_0,T)$ и $\Gamma_{31}^{\delta_n}(x_0,y_0,T)$ вытекает

соотношение:

$$Val(\Gamma_{11}^{\delta_n}(x_0,y_0,T)) \geqslant \sup_{y_{\beta_1}^{\delta} \in E_{\beta_0}^{\delta}} Val(\Gamma_{31}^{\delta_n}(x_0,y_{\beta_1}^{\delta},T)) - \varepsilon_1, \qquad /9/$$

справедливое для всякого числа $\varepsilon_1 > 0$ при всех номерах $n \geqslant 0$, больших некоторого целого числа $N(\varepsilon_1)$.

Из /8/ и / 9/ получаем неравенство:

$$Val(\Gamma_{11}^{\delta_n}(x_0,y_0,T)) \geqslant Val(\Gamma_{21}^{\delta_n}(x_0,y_{\beta_1}^{\delta},T)) - \varepsilon_1. \qquad /10/$$

Далее, в силу непрерывности функции $Val(\Gamma_{21}^{\delta_n}(x_0,y_0,T))$ по $x_0, y_0 \in X$ из /10/ вытекает соотношение:

$$Val(\Gamma_{11}^{\delta_n}(x_0,y_0,T)) \geqslant Val(\Gamma_{21}^{\delta_n}(x_0,y_0,T)) - \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \qquad /11/$$

где $\varepsilon_2 \to 0$ при $n \to \infty$. Переходя к пределу в /11/ при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} Val(\Gamma_{11}^{\delta_n}(x_0,y_0,T)) \geqslant \lim_{n\to\infty} Val(\Gamma_{21}^{\delta_n}(x_0,y_0,T)). \qquad /12/$$

Из теоремы о монотонной ограниченной последовательности и леммы 3 вытекает противоположное неравенство. Следовательно, оба предела в /12/ равны.

Т е о р е м а 2.

$$\lim_{n\to\infty} Val(\Gamma_{1j}^{\delta_n}(x_0,y_0,T)) = \lim_{n\to\infty} Val(\Gamma_{2j}^{\delta_n}(x_0,y_0,T)) (j=1,2,3). \qquad /13/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теорема 2 доказывается аналогично теореме I.

Общее значение пределов в /5/ и /13/ называется обобщенным значением дифференциальной игры с предписанным временем $\Gamma_j(x_0,y_0,T)$ $(j=1,2,3)$. Можно показать, что при всяком $n \geqslant 0$ выполняются неравенства:

$$Val(\Gamma_{2j}^{\delta_n}(x_0,y_0,T)) \geqslant Val(\Gamma_{0j}^{\delta_n}(x_0,y_0,T)) \geqslant$$
$$\geqslant Val(\Gamma_{1j}^{\delta_n}(x_0,y_0,T)) \ (j=1,2,3),$$

так что игры $\Gamma_{1j}^{\delta_n}(x_0,y_0,T)$ и $\Gamma_{2j}^{\delta_n}(x_0,y_0,T)$ аппроксимируют игру $\Gamma_{0j}^{\delta_n}(x_0,y_0,T)$ $(j=1,2,3)$.

Существование обобщенного значения игры $\Gamma_j(x_0,y_0,T)(j=1,2,3)$ мы доказали, предполагая, что последовательность разбиений интервала $[0,T]$

$$\sigma_n = \{t_0^n = 0 < t_1^n < \ldots < t_N^n = T\} \quad n=1,2,\ldots$$

является фиксированной, при которой $t_{i+1}^n - t_i^n = T/2^n (i=0,\ldots,N_n-1)$.

Очевидно, что все доказательства останутся без изменений для всякой последовательности разбиений $\{\sigma_n'\}$ $n=1,2,\ldots$, такой, что

$$\max_{0\le i\le N_n-1}(t^n_{i+1}-t^n_i)\xrightarrow[n\to\infty]{}0 .$$

Покажем, что обобщенное значение игры $\Gamma_j(x_0,y_0,T)$ одно и то же для всякой такой последовательности разбиений.

Действительно, допустим, что нашлись две такие последовательности разбиений $\{\sigma_n\}\; n=1,2,\ldots$ и $\{\sigma_m\}\; m=1,2,\ldots$, что соответствующие им обобщенные значения игры $\Gamma_j(x_0,y_0,T)$ различны. Обозначим их для краткости $Val(\Gamma_j(\{\sigma_n\}))$ и соответственно $Val(\Gamma_j(\{\sigma_m\}))$; положим для определенности, что

$$Val(\Gamma_j(\{\sigma_m\}))\geq Val(\Gamma_j(\{\sigma_n\})).$$

Очевидно, что в этом случае найдутся такие номера $n_1$ и $m_1$, что справедливы неравенства

$$Val(\Gamma_{2j}(\sigma_{m_1}))\geq Val(\Gamma_{1j}(\sigma_{m_1}))>$$
$$>Val(\Gamma_{2j}(\sigma_{n_1}))\geq Val(\Gamma_{1j}(\sigma_{n_1})).$$

Обозначим через $\sigma_{m_1 n_1}$ разбиение интервала $[0,T]$ точками, принадлежащими как разбиению $\sigma_{m_1}$, так и разбиению $\sigma_{n_1}$. Для него справедливо следующее неравенство:

$$Val(\Gamma_{2j}(\sigma_{m_1 n_1}))\leq Val(\Gamma_{2j}(\sigma_{n_1}))<$$
$$<Val(\Gamma_{1j}(\sigma_{m_1}))\leq Val(\Gamma_{1j}(\sigma_{m_1 n_1})),$$

откуда получаем неравенства

$$Val(\Gamma_{2j}(\sigma_{m_1 n_1}))<Val(\Gamma_{1j}(\sigma_{m_1 n_1})),$$

противоречащие неравенствам, приведенным в лемме 2. Следовательно, наше предположение неверно, и обобщенное значение игры $\Gamma_j(x_0,y_0,T)$ не зависит от вида измельчающейся последовательности интервала $[0,T]$.

Заметим, что условия, накладываемые на динамику игроков, можно несколько видоизменить: в качестве значений функций достижимости $P(x,t_0,t)$ и $E(y,t_0,t)$ допускать произвольные подмножества пространства $X$, наложив на функции $g, h, H$ условие ограниченности на всем пространстве $X\times X$ вместо ограниченности на ограниченных множествах.

Поступила в редакцию 20.I.1970г

Литература

1. E.Roxin, Stability in general control systems, Journal of differential equations, N1, 1965.

2. Л.А.Петросян, Обобщенные решения дифференциальных игр на выживание, Экономика и математические методы, вып.3. т.3, 1967.

3. W.H.Fleming, The convergence problem for differential

games, Journal of mathematical avalysis and applications,I96I,N3

4. W.H.Fleming, The convergence problem for differential games, II, Annals of mathematics, I964.