Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1970 г. выпуск 4-5.
УДК.512.25.

СТРУКТУРА МНОЖЕСТВ УПРАВЛЯЕМОСТИ И ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ МНОГОШАГОВЫХ ПРОЦЕССОВ. II*/

В.В.Леонов

§ 4. Общие свойства множеств $F_n(\bar{X}^\circ, U)$.

Как нами установлено в [I], в случае системы /I.1/

$$\bar{X}(n) = A(n)\bar{X}(n-1) + B(n)\bar{u}(n),$$

множество $F_n(\bar{X}^\circ, U)$ управляемости в $\bar{X}^\circ$ за n шагов связано с множеством $S_n(\bar{X}^\circ, U)$ достижимости из нуля за n шагов соотношением:

$$F_n(\bar{X}^\circ, U) = \{\bar{X} : L(n)\bar{X} = \bar{X}^\circ - \bar{z};\ \bar{z} \in S_n(\bar{0}, U)\}, \qquad /4.1/$$

где

$$L(n) = \{\bar{\ell}_1(n), \dots, \bar{\ell}_m(n)\} = A(n)A(n-1)\dots A(1), \qquad /4.2/$$

а множество $S_n(\bar{0}, U)$ является замкнутым выпуклым множеством, принадлежащим гиперплоскости $P(n) \subseteq E_m$.

Следует различать три случая, определяющих вид множества $F_n(\bar{X}^\circ, U)$:

1. $\det L(n) \neq 0$;

2. $\det L(n) = 0$, и $\operatorname{rang}\{\bar{\ell}_1(n), \dots, \bar{\ell}_m(n), \bar{X}^\circ - \bar{z}\} > \operatorname{rang} L(n)$ для $\bar{z} \in S_n(\bar{0}, U)$;

3. $\det L(n) = 0$, и существует такое непустое подмножество $\widetilde{S}_n(\bar{0}, U)$ множества $S_n(\bar{0}, U)$, что

$$\operatorname{rang}\{\bar{\ell}_1(n), \dots, \bar{\ell}_m(n), \bar{X}^\circ - \bar{z}\} = \operatorname{rang} L(n) \text{ для } \bar{z} \in \hat{S}_n(\bar{0}, U).$$

В I-м случае множество $F_n(\bar{X}^\circ, U)$ представляет замкнутое выпуклое множество

$$F_n(\bar{X}^\circ, U) = \{L^{-1}(n)(\bar{X}^\circ - \bar{z}) : \bar{z} \in S_n(\bar{0}, U)\}, \qquad /4.3/$$

которое имеет ту же размерность, что и $S_n(\bar{0}, U)$.

Во 2-м случае

$$F_n(\bar{X}^\circ, U) = \Lambda,$$

где Λ -пустое множество.

Наконец, в 3-м случае

$$F_n(\bar{X}^\circ, U) = R^{L(n)} \oplus F_n^{L(n)}(\bar{X}^\circ, U), \qquad /4.5/$$

где

$$R^{L(n)} = \left\{ \bar{X} : \bar{X} = \sum_{j=1}^{m - \operatorname{rang} L(n)} t_j r_j(n) \right\}, \qquad /4.6/$$

причем $\bar{r}_j(n) \neq \bar{0}$, $\bar{r}_{j_1}(n) \perp \bar{r}_{j_2}(n)$ при $j_1 \neq j_2$,

$$\bar{r}_j(n) \perp \ell_i(n) \quad (j = 1, \dots, m - \operatorname{rang} L(n);\ i = 1, \dots, m),$$

а $F_n^{L(n)}(\bar{X}^\circ, U)$ является замкнутым множеством, принадлежащим подпрост-

*/ Данная статья является продолжением статьи [I]. В ней используются обозначения, принятые в [I], и применяется общая нумерация формул и параграфов.

ранству

$$G^{L(n)}=\left\{\bar{x}:\bar{x}=\sum_{i=1}^{m}t_i\bar{l}_i(n)\right\}\subset E_m, \qquad /4.7/$$

так что

$$\dim F_n^{L(n)}(\bar{x}^\circ; U)\leq \dim G^{L(n)}=\operatorname{rang} L(n).$$

Очевидно, что если $\det A(k)\neq 0$ для $k\in\{1,\dots,n_o\}$, то $\det L(n)\neq 0$ при $n\in\{1,\dots,n_o\}$, причем, каково бы ни было $n\in\{1,\dots,n_o\}$,

$$F_n(\bar{x}^\circ; U)=\left[L^{-1}(n)\bar{x}^\circ-\sum_{k=1}^{n}L^{-1}(k)B(k)\bar{a}\right]\oplus F_n(\bar{0},V(\bar{a},U)), \qquad /4.8/$$

где

$$F_{n-1}(\bar{0},V(\bar{a},U))\subset F_n(\bar{0},V(\bar{a},U)), \qquad /4.9/$$

$\bar{a}\in U, V(\bar{a},U)$ имеет смысл, указанный в [I].

Из /4.8/ и /4.9/ следует, что для $1\leq n\leq n_o$ $F_n(\bar{x}^\circ;U)$ получается в результате параллельного переноса расширяющегося множества $F_n(\bar{0},V(\bar{a},U))$. Более того, если для $n^\circ\in\{1,\dots,n_o-1\}$

$$\dim F_{n^\circ}(\bar{0},V(\bar{a},U))=m, \qquad /4.10/$$

то при $n\in\{n^\circ+1,\dots,n_o\}$

$$F_n(\bar{0},V(\bar{a},U))=F_{n-1}(\bar{0},V(\bar{a},U))\bigcup_{x\in\Gamma F_{n-1}(\bar{0},V(\bar{a},U))}O_n(\bar{x},V(\bar{a},U)). \qquad /4.11/$$

Так как

$$F_n(\bar{0},V(\bar{a},U))=\left\{-L^{-1}(n)\bar{z}:\bar{z}\in S_n(\bar{0},V(\bar{a},U))\right\},$$

причем

$$S_n(\bar{x}_0,U)=\left\{L(n)\left[\bar{x}_0+\sum_{k=1}^{n}L^{-1}(k)B(k)\bar{a}\right]\right\}\oplus S_n(\bar{0},V(\bar{a},U)),$$

то для $n\in\{1,\dots,n_o\}$ $\dim F_n(\bar{x}^\circ;U)\equiv\dim S_n(\bar{x}_0,U)$, каковы бы ни были $\bar{x}^\circ, x_0\in E_m$, причем

$$\dim F_n(\bar{x}^\circ;U)\geq\dim F_{n-1}(\bar{x}^\circ;U)$$

для всех $\bar{x}^\circ\in E_m$, то есть при $n\in\{1,\dots,n_o\}$ размерности множеств $S_n(\bar{x}_0,U)$ и $F_n(\bar{x}^\circ,U)$ совпадают независимо от положения точек $\bar{x}_0$ и $\bar{x}^0$ и являются неубывающими функциями от n.

Если же $\det A(n_o+1)=0$, то тогда для всех $n>n_o$ $\det L(n)=0$ и тем самым при $n>n_0$ возможны лишь 2-й и 3-й случаи задания множества $F_n(\bar{x}^\circ,U)$. Какой из этих двух случаев имеет место при заданных $n>n_o$ и $x^\circ\in E_m$, зависит от того, принадлежит ли точка x° множеству

$$M_n(U)=\bigcup_{\bar{x}\in E_m}S_n(\bar{x},U)$$

достижимых состояний системы /I.I/ после n шагов или нет. Это множество при $\det L(n)=0$ имеет вид:

$$M_n(U)=G^{L(n)}\oplus S_n(\bar{0},U). \qquad /4.12/$$

Очевидно, если

$$\bar{x}^0 \notin M_n(U), \qquad /4.13/$$

то $F_n(\bar{x}^0, U) = \Lambda$, то есть имеет место 2-й случай. 3-й случай выполняется при $\det L(n) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\bar{x}^0 \in M_n(U). \qquad /4.14/$$

В частности, при $B(k) \equiv B = const$, $A(k) \equiv A = const$, где $\det A = 0$, множество

$$M_n(U) = G^{L(n)} \oplus \Big(\sum_{k=1}^{n} A^k\Big) B\bar{a} \oplus S_n(\bar{0}, V(\bar{a}, U)), \qquad /4.15/$$

где $\bar{a} \in U$, $S_{n-1}(\bar{0}, V(\bar{a}, U)) \subseteq S_n(\bar{0}, V(\bar{a}, U))$,

$$\dim G^{L(n)} \leq \dim G^{L(n-1)} \leq rang A,$$

$$\dim S_{n-1}(\bar{0}, V(\bar{a}, U)) \leq \dim S_n(\bar{0}, V(\bar{a}, U)) \leq rang A,$$

причем найдется такой номер $\tilde{n} > n_0$, что при $n \geq \tilde{n}$

$$\dim S_n(\bar{0}, U) = \dim S_{\tilde{n}}(\bar{0}, U),$$

$$\dim G^{L(n)} \equiv \dim G^{L(\tilde{n})} \geq 0.$$

Очевидно, что равенство $\dim G^{L(\tilde{n})} = 0$ выполняется, если матрица A нильпотентна, то есть $A^{\tilde{n}} = 0$. В этом случае для $n \geq \tilde{n}$ $M_n(U) \equiv S_{\tilde{n}}(\bar{0}, U)$.

§ 5. Связь множеств достижимости с решением задачи оптимального быстродействия

Как мы уже указывали [I], задача оптимального быстродействия для системы /I.I/ заключается в отыскании такого допустимого управления, которое переводило бы управляемую систему из начального состояния $\bar{x}_0$ в наперед заданное состояние $\bar{x}^0$. Очевидно, что для существования решения задачи оптимального быстродействия при заданных $\bar{x}_0$ и $\bar{x}^0$ необходимо и достаточно выполнения условий:

$$\bar{x}_0 \in F(\bar{x}^0, U), \qquad /5.1/$$

$$\bar{x}^0 \in S(\bar{x}_0, U), \qquad /5.2/$$

причем из выполнения условия /5.1/ следует выполнение условия /5.2/ и наоборот.

Не умаляя общности, будем считать, что точкой $\bar{x}^0$, в которую следует перевести систему /I.I/, является точка $\bar{0}$.

Представим $F(\bar{0}, U)$ в виде объединения непересекающихся множеств:

$$F(\bar{0}, U) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n(\bar{0}, U), \qquad /5.3/$$

где

$$\Delta_0(\bar{0}, U) = \bar{0},$$

$$\Delta_n(\bar{0}, U) = F_n(\bar{0}, U) \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} F_k(\bar{0}, U) \quad (n = 1, 2, \dots). \qquad /5.4/$$

В случае, когда $\bar{0} \in U$, выражения для $F(\bar{0}, U)$ и $\Delta_n(\bar{0}, U)$ приобретают очень простой вид:

$$F(\bar{0}, U) = \lim_{n\to\infty} F_n(\bar{0}, U), \qquad /5.5/$$

$$\Delta_n(\bar{0}, U) = F_n(\bar{0}, U) \setminus F_{n-1}(\bar{0}, U). \qquad /5.4'/$$

Пусть нам известно, что

$$\bar{X}_0 \in F(\bar{0}, U). \qquad /5.1'/$$

Значит, найдется одно и только одно множество $\Delta_N(\bar{0}, U)$, такое что

$$\bar{X}_0 \in \Delta_N(\bar{0}, U). \qquad /5.1''/$$

Справедливо следующее

Утверждение 5.1. Если для данного $\bar{X}_0$ выполняется условие /5.1″/, то систему /1.1/ можно перевести из состояния $\bar{X}_0$ в состояние $\bar{0}$ за минимальное число тактов управления, равное числу N. При этом для постоянных $A(k)$ и $B(k)$ управление $\bar{u}^0(1),\dots,\bar{u}^0(N)$ является оптимальным тогда и только тогда, когда

$$\bar{X}(n) = A^n \bar{X}_0 + \sum_{k=1}^{n} A^{n-k} B \bar{u}^0(k) \in F_{N-n}(\bar{0}, U). \qquad /5.6/$$

Из /5.6/ следует, что оптимальным управлением является любое управление, переводящее систему /1.1/ на каждом очередном n -м шаге в произвольную точку множества

$$Q_n(\bar{X}_0, \bar{0}, U) = S_n(\bar{X}_0, U) \cap F_{N-n}(\bar{0}, U). \qquad /5.6'/$$

Так как $S_n(\bar{X}_0, U)$ - замкнутое выпуклое множество, причем пересечение $F_{N-n}(\bar{0}, U)$ с произвольным замкнутым выпуклым множеством также является замкнутым выпуклым множеством, то следовательно, и множество $Q_n(\bar{X}_0, \bar{0}, U)$ также замкнутое выпуклое, а тем самым справедливо

Утверждение 5.2. В случае задачи быстродействия множество оптимальных управлений при постоянных $A(k)$ и $B(k)$ либо имеет мощность континуума, либо состоит из единственного управления.

Более того, множество оптимальных управлений представляет собой замкнутое выпуклое односвязное множество в пространстве управлений на N шагов, являющемся топологическим произведением пространств E_s .

Следует отметить, что в общем случае проверка справедливости /5.1′/ встречает большие трудности. В дальнейшем нами будут изложены отдельные приемы для приближенного построения множеств $F_n(\bar{0}, U)$. В то же время можно указать достаточные условия существования решения задачи оптимального быстродействия, связанные с управляемостью системы. Действительно, имеют место следующие утверждения.

Утверждение 5.3. Для того, чтобы задача оптимального быстродействия в точку $\bar{0}$ была разрешима для любого начального состояния $\bar{X}_0$, необходимо и достаточно, чтобы система /1.1/ была управляема в точку $\bar{0}$.

Утверждение 5.4. Задача оптимального быстродействия из $\bar{X}_0$ в $\bar{X}^0$ разрешима для произвольных $\bar{X}_0, \bar{X}^0 \in E_m$ лишь в том случае, когда система /I.I/ абсолютно управляема.

Обозначим через $M(U)$ множество

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} M_n(U) = \bigcup_{\bar{X} \in E_m} S(\bar{X}, U)$$

таких точек $\bar{X}^0$, задача быстродействия в которые имеет решение хотя бы для одного начального состояния $\bar{X}_0^0$.

Из утверждения 5.4 следует, что для абсолютно управляемых систем $M(U) = E_m$. Множество $M(U)$ совпадает также со всем пространством E_m и в том, когда $\det A(1) \neq 0$. В то же время имеет место следующее утверждение.

Утверждение 5.5. Если для всех $n \geq 1$ $\det A(n) = 0$, то множество $M(U)$ является собственным подмножеством пространства E_m.

Следует отметить, что формулировку утверждения 5.5 нельзя существенно улучшить, так как система /I.I/ абсолютно управляема, если $s = m, B(k) \equiv E, A(n) \equiv A^{\ell}$ при $n_\ell \leq n < n_\ell + \nu_\ell \leq n_{\ell+1} - 2$ $(\ell = 1, 2, \ldots)$, где $\lim_{\ell \to \infty} \nu_\ell = \infty$, причем все собственные числа матриц $A(n)$ по модулю меньше единицы для $n \in \bigcup_{\ell=\ell_0}^{\infty} \{n_\ell + \nu_\ell + 1, \ldots, n_{\ell+1} - 1\}$, а собственные числа матриц A^{ℓ} лежат на единичной окружности и не равны I.

§ 6. Управляемость в нуль и абсолютная управляемость

Укажем ряд теорем общего характера, связанных с вопросами управляемости в нуль и абсолютной управляемости. При этом будем предполагать, что

$$s = m, \ B(k) \equiv E, \ \det A(k) \neq 0 \ (k = 1, 2, \ldots). \qquad /6.1/$$

Теорема 6.I. Если при выполнении условий /6.I/ нижний предел

$$\varliminf_{n \to \infty} \|L(n)\| = 0, \qquad /6.2/$$

причем $\bar{0}$ является внутренней точкой множества U, то система /I.I/ управляема в точку $\bar{0}$.

Доказательство. Так как $\bar{0} \in U \setminus \Gamma U$, то найдется такое достаточно малое $\varepsilon > 0$, что $C(\bar{0}; \varepsilon) \leq U$. Из справедливости /6.2/ заключаем, что найдется такая последовательность $\{n_k\}$, где $n_k \to \infty$, для которой $\lim_{k \to \infty} \|L(n_k)\| = 0$. Следовательно, для любого $\bar{X}_0 \in E_m$ существует $k = k(\bar{X}_0)$, для которого точка $L(n_{k(\bar{X}_0)})\bar{X}_0 \in C(\bar{0}; \varepsilon)$. Если теперь выберем допустимое управление $\bar{u}(1) = \ldots = \bar{u}(n_{k(\bar{X}_0)} - 1) = 0$, $\bar{u}(n_{k(\bar{X}_0)}) = -L(n_{k(\bar{X}_0)})\bar{X}_0$, то в силу системы /I.I/ на $n_k(\bar{X}_0)$-м шаге будем иметь $\bar{X}(n_{k(\bar{X}_0)}) = \bar{0}$, что и требовалось доказать.

Следствие 6.I. Если матрицы $A(n) \equiv A = const, s = m, B(k) \equiv E$ и все собственные числа λ_i матрицы A по модулю меньше I, то при $\bar{0} \in U \setminus \Gamma U$ система /I.I/ управляема в нуль.

Замечание 6.I. В общем случае при выполнении /6.2/ однородная система, соответствующая системе /I.I/, может быть и не-

устойчивой.

Например, для одномерного процесса

$$x(n)=2^{(-1)^n 2^n}x(n-1)+u(n),$$

где $|u|\leq 1$, однородное уравнение

$$L(n)=2^{(-1)^n 2^n}L(n-1)$$

неустойчиво, $L(2k)=4^k\to\infty$, но в то же время $\lim_{k\to\infty} L(2k+1)=0$ и рассматриваемый процесс управляем в нуль.

Замечание 6.2. Непрерывный аналог теоремы 6.I формулируется следующим образом.

Пусть дан управляемый процесс

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=A(t)\bar{x}+\bar{u}, \qquad /6.0/$$

где $u\in U$ / U -замкнутая выпуклая область из E_m /. Обозначим через $L(t)$ фундаментальное решение однородной системы

$$\frac{d\bar{\ell}}{dt}=A(t)\bar{\ell}, \qquad /6.0'/$$

нормированное в точке $t=0$ $(L(0)=E)$.

Утверждается, что система /6.0/ управляема в нуль, если $\lim_{t\to\infty}\|L(t)\|=0$, $\bar{0}\in U\setminus\Gamma U$. Оказывается, что подобное утверждение неверно. Действительно, пусть /6.0/ имеет вид:

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{z'(t)}{z(t)}x+u, \qquad /6.0^*/$$

где $|u|\leq 1$, а $z(t)$ - произвольная непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям:

$$0<z(t)\leq\Phi(t)+\Psi(t);$$

$$z\left(n+1-\frac{1}{2(n+1)^3}\right)=\Phi\left(n+1-\frac{1}{2(n+1)^3}\right)+n+1;$$

$\Phi(t)$ -положительная, монотонно убывающая непрерывно дифференцируемая функция, причем интеграл $\int_0^\infty\Phi(t)dt$ сходится;

$$\Psi(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t\in\left[n,\, n+1-\frac{1}{(n+1)^3}\right],\\ n+1 & \text{при } t\in\left(n+1-\frac{1}{(n+1)^3},\, n+1\right).\end{cases}$$

В случае уравнения /6.0*/ область управляемости в нуль

$$F(0,U)=\left(-\int_0^\infty\frac{dt}{z(t)},\ \int_0^\infty\frac{dt}{z(t)}\right)\neq E_1,$$

то есть уравнение /6.0*/ неуправляемо в нуль, хотя

$$\lim_{t\to\infty}|L(t)|=0,\quad 0\in U\setminus\Gamma U.$$

Замечание 6.3. Естественным обобщением теоремы 6.I

является следующее утверждение: если $S=m, B(k)\equiv E, \lim_{n\to\infty}\left(\|\sum_{k=1}^{n} L(k)\| + \|L(n)\|\right) = 0, \bar{X}^0 \in U\setminus\Gamma U$, то система /1.1/ управляема в точку $\bar{X}^0$.

Предположим теперь, что система /1.1/ имеет вид:

$$\bar{X}(n) = A\bar{X}(n-1) + \bar{U}(n) \qquad /6.3/$$

и нулевое решение системы

$$\bar{\ell}(n) = A\bar{\ell}(n-1) \qquad /6.3'/$$

устойчиво.

При этом имеют место следующие теоремы об управляемости.

Т е о р е м а 6.2. Если $\bar{0}\in U\setminus\Gamma U$ и нулевое решение системы /6.3 / устойчиво, то система /6.3/ управляема в нуль.

Т е о р е м а 6.3. Если нулевое решение системы /6.3 / устойчиво и собственные числа матрицы A имеют вид: $\lambda_s = e^{i\varphi_s} \neq 1$, то система /6.3/ абсолютно управляема.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При доказательстве теоремы 6.2 и 6.3 мы будем использовать следующие очевидные свойства множеств

$$F_n(\bar{X}^0, U) \text{ и } F(\bar{X}^0, U).$$

С в о й с т в о 6.1. Если $\tilde{U} \supseteq U$, то $F(\bar{X}^0, \tilde{U}) \supseteq F(\bar{X}^0, U)$, $F_n(\bar{X}^0, \tilde{U}) \supseteq F_n(\bar{X}^0, U)$.

С в о й с т в о 6.3. Если существуют такие $\bar{X}^0, \bar{U}^0 \in E_m, \varepsilon > 0$, что $C(\bar{U}^0, \varepsilon) \subseteq U$, $\bigcap_{\bar{U}\in E_m} (\bar{X}^0; C(\bar{U}, \varepsilon)) = E_m$, то система /6.3/ абсолютно управляема.

Не умаляя общности, можем считать, что

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & A_\ell \end{pmatrix}, \qquad /6.4/$$

где $A_j\,(j=1,\dots,\ell)$ являются квадратными матричными блоками соответственно размерностей $m_j \geq 1, \sum_{j=1}^{\ell} m_j = m$, и каждая матрица A_j или имеет собственные числа, которые все по модулю меньше 1 /тип блока α_1/, или является матрицей

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi, & \sin\varphi \\ -\sin\varphi, & \cos\varphi \end{vmatrix} \quad /\text{тип } \alpha_2/,$$

или состоит лишь из одного элемента a_j, равного либо 1, либо − 1 /типы α_3 и α_4 соответственно/. При этом выполнение условий теоремы 6.3 возможно при наличии в матрице лишь блоков α_2 и α_4.

Так как U – замкнутое выпуклое множество из E_m, причем в теореме 6.3 предполагается, что $\bar{0}\in U\setminus\Gamma U$, то на основании свойств 6.1 – 6.3 и следствия 6.1 мы можем заключить, что для доказательства теорем 6.2 и 6.3 достаточно их доказать для следующих трех случаев.

Действительно, если мы докажем, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, уравнение

$$x(n) = -x(n-1) + \bar{u}(n), \qquad /6.5/$$

при $\|\bar{u}\| \le \varepsilon$ управляемо в нуль и абсолютно управляемы уравнение

$$x(n) = -x(n-1) + u(n) \qquad /6.5'/$$

и система /при том же ограничении на управление/

$$\begin{aligned} x_1(n) &= x_1(n-1)\cos\varphi + x_2(n-1)\sin\varphi + u_1(n), \\ x_2(n) &= -x_1(n-1)\sin\varphi + x_2(n-1)\cos\varphi + u_2(n), \end{aligned} \qquad /6.5''/$$

где $\varphi = const$, причем $\varphi \ne 2k\pi$, то тем самым будут полностью доказаны теоремы 6.2 и 6.3. Управляемость в нуль уравнения /6.5/ следует из свойства 6.2 и равенства

$$F_n(0, \{|u| \le \varepsilon\}) = [-n\varepsilon, n\varepsilon]. \qquad /6.6/$$

Так как в случае уравнения /6.5'/ при $n > \frac{|a|}{\varepsilon}$ имеет место включение:

$$F_n(0, \{|u - a| \le \varepsilon\}) \supseteq [|a| - n\varepsilon, n\varepsilon - |a|], \qquad /6.6'/$$

то на основании свойства 6.3 заключаем, что уравнение /6.5/ абсолютно управляемо.

В случае системы /6.5″/, каковы бы ни были $\bar{a} = \rho\begin{pmatrix}\cos\lambda \\ \sin\lambda\end{pmatrix}$ и $\xi \in [0, 2\pi]$, точка

$$\left[-\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix}\cos\varphi, & \sin\varphi \\ -\sin\varphi, & \cos\varphi\end{pmatrix}^{-k} \begin{pmatrix}\rho\cos\lambda - \varepsilon\cos(\xi - k\varphi) \\ \rho\sin\lambda - \varepsilon\sin(\xi - k\varphi)\end{pmatrix}\right] \in F_n(\bar{0}, C(\bar{a}, \varepsilon))$$

и ввиду выпуклости $F_n(\bar{0}, C(\bar{a}, \varepsilon))$, при $n > \frac{2\rho}{\varepsilon|1 - e^{i\varphi}|}$

$$C\left(\bar{0}, \varepsilon n - \frac{\rho}{|1 - e^{i\varphi}|}\right) \subseteq F_n(\bar{0}, C(\bar{a}, \varepsilon)).$$

Так как $\bar{a} \in E_2$ и $\varepsilon > 0$ произвольны, то на основании свойств 6.2 и 6.3 заключаем, что система /6.5″/ абсолютно управляема. Тем самым теоремы 6.2 и 6.3 полностью доказаны.

З а м е ч а н и е 6.4. Из доказательства теорем 6.2 и 6.3 следует, что в случае, когда система /6.3/ устойчива и матрица A имеет вид:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right], \qquad /6.4'/$$

где квадратная матрица $\tilde{A}_1$ размерности n_1 имеет собственные числа, которые по модулю меньше или равны единице, причем не равны $e^{i\varphi}$, где $\varphi \in (0, 2\pi)$, а матрица $\tilde{A}_2$ имеет собственные числа лишь вида $\lambda_s = e^{i\varphi_s} \ne 1$, то система /6.3/ управляема в точку $\bar{x}^0$, если найдется такое $\varepsilon > 0$ и такое замкнутое выпуклое множество $\tilde{U}$ из E_{n-n_1}, что

$$\{(u_1, \dots, u_{n_1}) : |u_i - x_i^0| \le \varepsilon\} \times \tilde{U} \subseteq U.$$

Очевидно, что если система /6.3/ устойчива, то всегда с помощью неособенного преобразования ее можно привести к такому виду, когда матрица A удовлетворяет /6.4'/.

Прежде чем перейти к исследованию областей управляемости для

систем

$$\bar{x}(n) = A(n)\bar{x}(n-1) + \bar{u}(n), \qquad /I.I^*/$$

где $u(n) \in U \subset E_m$, укажем некоторые достаточные условия, при выполнении которых система /I.I*/ не является управляемой в нуль.

Так как в случае системы /I.I*/

$$\|\bar{x}(n)\|^2 = [A(n)A^*(n)\bar{x}(n-1)]\bar{x}(n-1) + 2[A(n)\bar{x}(n-1)]\bar{u}(n) + \|\bar{u}(n)\|^2, \qquad /6.7/$$

где матрица A^* - транспонированная матрица A , то

$$z(n) \geqslant \omega_n z(n-1) - 2\gamma_n \sqrt{z(n-1)}, \qquad /6.8/$$

где

$$z(n) = \rho^2(\bar{0}, S_n(\bar{x}_0, U)), \qquad /6.8'/$$

$\rho(X, Y)$ - расстояние между множествами X и Y ,

$$z(0) = \|\bar{x}_0\|^2, \qquad /6.8''/$$

$$\omega_n = \min_{\det(A(n)A^*(n) - \lambda E) = 0} \lambda > 0,$$

$$\gamma_n = \max_{\bar{u} \in U} \|A^*(n)\bar{u}\|.$$

Т е о р е м а 6.4. Если

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \omega_k} > 1, \qquad /6.9/$$

$$\gamma_n \leqslant \frac{c\,\omega_n}{2}, \qquad /6.10/$$

то

$$F(\bar{0}, U) = \bigcup_{\ell=1}^{N} \theta_\ell(U), \qquad /6.11/$$

где N конечно, θ_ℓ - конечно - связные ограниченные множества из E_m , причем $\theta_{\ell_1}(U) \cap \theta_{\ell_2}(U) = \Lambda$ при $\ell_1 \neq \ell_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из /6.9/ следует, что найдутся такие $\varepsilon > 0$ и $n^* \geqslant 1$, что при $n \geqslant n^*$

$$\prod_{k=1}^{n} \omega_k \geqslant (1+\varepsilon)^n. \qquad /6.12/$$

Легко проверить, используя /6.8/, /6.10/ и /6.12/, что выполнение неравенства

$$z(0) \geqslant \left\{ \frac{c^2(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon^2} \max\left[1, \max_{1\leqslant \ell \leqslant n^*-1} \frac{(1+\varepsilon)^\ell}{\prod_{k=1}^{\ell} \omega_k} \right] \right\} = \lambda^2(\varepsilon, \varepsilon) \qquad /6.13/$$

влечет за собой справедливость неравенств

$$z(n) \geqslant \frac{c^2(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon^2} > 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad /6.14/$$

Из /6.8'/, /6.8''/, /6.13/, /6.14/ и определения множества $F(\bar{0}, U)$ следует, что

$$F(\bar{0},U)\subseteq C(\bar{0},\lambda(\dot{c},\varepsilon)). \qquad /6.15/$$

Так как $F_n(\bar{0},U)$ - замкнутые выпуклые односвязные множества из E_m, имеющие представление:

$$F_n(\bar{0},U)=\left\{-\sum_{k=1}^{n} L^{-1}(k)\bar{a}\right\}\oplus F_n(\bar{0},V(\bar{a},U)),$$

где $\bar{a}\in U\setminus \Gamma U$,

причем

$$F_n(\bar{0},V(\bar{a},U))\subset F_{n+1}(\bar{0},V(\bar{a},U)),$$

$$F(\bar{0},U)=\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n(\bar{0},U),$$

то из включения /6.15/ вытекает справедливость теоремы.

Следствие 6.2 Если выполняются условия теоремы 6.4, то система /1.1*/ неуправляема в любую точку $\bar{X}^0$.

Следствие 6.3 Если у системы /6.3/ все собственные числа матрицы A по модулю больше единицы, то при $n\to\infty$ и $\bar{a}\in U\setminus\Gamma U$

$$F_n(\bar{0},U)\to(E-A)^{-1}\bar{a}\oplus F(\bar{0},V(\bar{a},U)), \qquad /6.16/$$

где $F(\bar{0},V(\bar{a},U))$ является открытым ограниченным односвязным множеством, удовлетворяющим предельному соотношению

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\bar{0},V(\bar{a},U))=F(\bar{0},V(\bar{a},U)). \qquad /6.17/$$

Поступила в редакцию 12.3.1970г.

Литература

1. В.В.Леонов, Структура множеств управляемости и достижимости для линейных многошаговых процессов I, Управляемые системы, Изд. "Наука", Сибирское отделение, 1969, вып.2.