Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1970 г. выпуск 4-5.

СИСТЕМА С ЛИМИТИРУЮЩИМ ФАКТОРОМ И С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВНЕШНИМИ РЕСУРСАМИ

Ю.И.Гильдерман, К.Н.Кудрина

1. Общий вид систем с лимитирующим фактором /без ограничения внешних ресурсов/ был изучен в [1] [2].

Рассмотрим систему, состоящую из одного процесса. Будем предполагать, что в процессе потребляются два вещества / x_1 и x_2 – их количества/ и поток внешних ресурсов / z – величина потока/. Эти же вещества вырабатываются в ходе процесса /в количествах, больших, чем потребляются/ и частично изымаются из системы. Будем также предполагать, что запас внешних ресурсов ограничен /равен некоторой величине z /. Для x_1 и x_2 можно написать уравнение:

$$\dot{x}_i = a_i \min\left\{\frac{z}{b_0}, \frac{x_1}{b_1}, \frac{x_2}{b_2}\right\} - \gamma_i x_i, \quad i = 1, 2. \qquad /1/$$

Первое слагаемое характеризует интенсивность производства i -го вещества $(a_i > 0)$; второе слагаемое описывает удаление из системы соответствующего вещества /пропорционально наличному количеству/, $\gamma_i > 0$.

Внешние ресурсы убывают с течением времени. Эта убыль пропорциональна интенсивности процесса.

$$\dot{z} = -b_0 \min\left\{\frac{z}{b_0}, \frac{x_1}{b_1}, \frac{x_2}{b_2}\right\}. \qquad /2/$$

/Коэффициент b_0 равен затрате z при единичной интенсивности процесса/.

Введем обозначения $\frac{b_0}{b_1} = \beta_1$, $\frac{b_0}{b_2} = \beta_2$, $\frac{a_i}{b_0} = \alpha_i$.Тогда система /1/, /2/ примет вид:

$$\begin{aligned} x_i &= \alpha_i \min\{z, \beta_1 x_1, \beta_2 x_2\} - \gamma_i x_i, \\ \dot{z} &= -\min\{z, \beta_1 x_1, \beta_2 x_2\}. \end{aligned} \qquad /3/$$

Исследуем систему /3/; установим характер ее траекторий в октанте $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$; $z \geqslant 0$. Заметим прежде всего, что траектория, начавшаяся на одной из координатных плоскостей, ограничивающих первый октант, не выходит из этой плоскости. Действительно, пусть начальная точка расположена на плоскости $z = 0$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставив координаты этой точки в систему /3/, получим

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\gamma_i x_i, \\ \dot{z} &= 0. \end{aligned}$$

Откуда следует, что для всех моментов времени $z \equiv 0$, а $x_i(t)$ убы-

вает, стремясь к нулю. Аналогично, если начальная точка находится на боковой плоскости, например, на плоскости $x_1=0$, то, подставив ее координаты в систему, получим

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0, \\ \dot{x}_2 &= -\gamma_2 x_2, \\ \dot{z} &= 0 . \end{aligned}$$

Отсюда для всех моментов времени: $x_1=0$, $z=const$, а $x_2(t)$ убывает, стремясь к нулю.

Точно так же обстоит дело и на плоскости $x_2=0$.

Отсюда следует, что любая траектория, начавшаяся в первом октанте, из него не выходит. В противном случае она пересекла бы в некоторой точке одну из координатных плоскостей, и в этой точке было бы нарушено условие единственности*/.

Для дальнейшего положительный октант удобно разбить на три конуса с общей вершиной в начале координат, в каждом из которых система /3/ тождественна некоторой линейной системе с постоянными коэффициентами.

Конус №I определяется неравенствами:

$$\left.\begin{aligned} & z \geqslant 0 \\ & z \leqslant \beta_1 x_1 \\ & z \leqslant \beta_2 x_2 \end{aligned}\right\} . \qquad /4/$$

Конус №2 описывается неравенствами:

$$\left.\begin{aligned} & x_1 \geqslant 0 \\ & x_1 \leqslant \frac{\beta_2}{\beta_1} x_2 \\ & x_1 \leqslant \frac{1}{\beta_1} z \end{aligned}\right\} . \qquad /5/$$

Для конуса №3 характерны неравенства:

$$\left.\begin{aligned} & x_2 \geqslant 0 \\ & x_2 \leqslant \frac{\beta_1}{\beta_2} x_1 \\ & x_2 \leqslant \frac{1}{\beta_2} z \end{aligned}\right\} \qquad /6/$$

В конусе №I $min(z, \beta_1 x_1, \beta_2 x_2)$ всегда достигается на величине z, поэтому система/3/ в том конусе принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \alpha_i z - \gamma_i x_i \\ \dot{z} = -z \end{cases} \qquad /3'/$$

Аналогично в конусе №2 /№3/ $min(z, \beta_1 x_1, \beta_2 x_2)$ достигается на величине $\beta_1 x_1 (\beta_2 x_2)$ и система /3/ для конуса №2 принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \alpha_i \beta_1 x_1 , \\ \dot{z} = -\beta_1 x_1 \end{cases} \qquad /3''/$$

и для конуса № 3.

$$\begin{cases} x_i = \alpha_i \beta_2 x_2 - \gamma_i x_i \\ \dot{z} = -\beta_2 x_2 \end{cases} \qquad /3'''/$$

2. Рассмотрим поведение траекторий системы /3/. Начнем с кону-

*/ Правая часть системы/3/удовлетворяет условию Липшица,что и обеспечивает единственность решения любой задачи Коши.

са № I. Общее решение в этом конусе имеет вид:

$$X(t)=C_1^{(1)}e^{-\gamma_1 t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2^{(1)}e^{-\gamma_2 t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+C_3^{(1)}e^{-t}\begin{pmatrix}\frac{\alpha_1}{\gamma_1-1}\\ \frac{\alpha_2}{\gamma_2-1}\\ 1\end{pmatrix}, \qquad /7/$$

где $C_1^{(1)}=x_1^0-\frac{\alpha_1 z^0}{\gamma_1-1}$; $C_2^{(1)}=x_2^0-\frac{\alpha_2 z^0}{\gamma_2-1}$; $C_3^{(1)}=z^0$.

Могут быть три возможности: I/ точка траектории при $t\to\infty$ стремится к нулю, не пересекая ни одной из плоскостей, ограничивающих конус № I сверху; 2/ точка достигает плоскости $z=\beta_1 x_1$ /правой/ ; 3/ точка достигает плоскости $z=\beta_2 x_2$ /левой/. Найдем условия существования времени $t_1^*>0$, при котором траектория пересекает плоскость $z=\beta_2 x_2$. Подставив в уравнение этой плоскости компоненты решения /7/, получим, что в момент t_1^* должно быть

$$e^{(\gamma_2-1)t_1^*}=\frac{\beta_2 C_2^{(1)}}{C_3^{(1)}\left(1-\frac{\beta_2\alpha_2}{\gamma_2-1}\right)} .$$

Отсюда

$$t_1^*=\frac{1}{\gamma_2-1}\ln\frac{\beta_2 C_2^{(1)}}{C_3^{(1)}\left(1-\frac{\beta_2\alpha_2}{\gamma_2-1}\right)} .$$

Конечное $t_1^*>0$ существует тогда и только тогда, когда выполняются следующие четыре неравенства:

$$\begin{aligned}&\gamma_2>1,\\ &\gamma_2-1-\beta_2\alpha_2>0,\\ &(\gamma_2-1)x_2^{(0)}-\alpha_2 z^0>0,\\ &\beta_2 x_2^0-z^0>0.\end{aligned}$$

Заметим, что первое неравенство следует из второго, а последнее неравенство означает лишь, что начальные данные (x_1^0, x_2^0, z^0) взяты в конусе № I. Заметим, наконец, что из второго неравенства и из уравнения плоскости $(z=\beta_2 x_2)$ следует, что третье из написанных нами неравенств выполняется автоматически. Таким образом, единственным неравенством, из которого следует, что траектория, начавшаяся в конусе № I, пересечет плоскость $(z=\beta_2 x_2)$, является неравенство относительно коэффициентов:

$$\gamma_2-1-\beta_2\alpha_2>0. \qquad /8/$$

Аналогично выясняется, что для существования конечного момента $t_1^{**}>0$, при котором траектория пересечет плоскость $(z=x_1\beta_1)$,необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\gamma_1-1-\beta_1\alpha_1>0. \qquad /9/$$

При этом

$$t_1^{**}=\frac{1}{\gamma_1-1}\ln\frac{\beta_1 C_1^{(1)}}{C_3^{(1)}\left(1-\frac{\alpha_1\beta_1}{\gamma_1-1}\right)} .$$

Итак, если выполнено неравенство /8/ и не выполнено неравенство /9/, то траектории пересекают левую плоскость; если выполнено нера-

венство /9/ и не выполнено неравенство /8/ все траектории пересекают "правую" плоскость; если выполнены оба неравенства, то траектория пересечет "левую" плоскость, если $t_1^* < t_1^{**}$ и "правую" - в противном случае. Наконец, если не выполнены оба неравенства, то все траектории, не выходя из конуса № I, устремляются к нулю. Это следует из вида общего решения /7/.

Рассмотрим детальнее тот случай, когда выполнены оба неравенства /8/ и /9/. В этом случае, как мы уже отметили, поведение траектории опрделяется тем, какая из величин t_1^* или t_1^{**} -меньше. В выражение этих величин входят начальные данные. Легко проверить, что если начальные данные лежат на поверхности

$$\frac{1}{\gamma_2-1}\ln\frac{[\beta_2(\gamma_2-1)x_2-\alpha_2 z]}{z(\gamma_2-1-\alpha_2\beta_2)}=\frac{1}{\gamma_1-1}\ln\frac{[\beta_1(\gamma_1-1)x_1-\alpha_1 z]}{z(\gamma_1-1-\alpha_1\beta_1)},$$

то траектория, начатая из этих данных, остается на этой поверхности и выходит из конуса № I через ребро $z=\beta_1 x_1=\beta_2 x_2$. Этот случай соответствует равенству $t_1^*=t_1^{**}$.

Отсюда следует, что при одновременном выполнении неравенств/8/ и /9/ траектория, начавшаяся правее поверхности, уходит из конуса № I в конус № 2, а траектория, начавшаяся левее этой поверхности, уходит в конус № 3.

Дальнейший ход этих траекторий мы установим после того, как выясним поведение траекторий в верхних конусах.

Рассмотрим, например, конус № 3. Общее решение в этом конусе имеет вид:

$$X(t)=c_1^{(3)}e^{-\gamma_1 t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2^{(3)}e^{(\alpha_2\beta_2-\gamma_2)t}\begin{pmatrix}\dfrac{\alpha_1\beta_2}{\gamma_1-\gamma_2+\alpha_2\beta_2}\\1\\\dfrac{\beta_2}{\gamma_2-\alpha_2\beta_2}\end{pmatrix}+c_3^{(3)}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad /10/$$

где

$$c_1^{(3)}=\tilde{x}_1^0-\frac{\alpha_1\beta_2}{\gamma_1-\gamma_2+\alpha_2\beta_2}\tilde{x}_2^0,\quad c_2^{(3)}=\tilde{x}_2^0,\quad c_2^{(3)}=z^0-\frac{\beta_2}{\gamma_2-\alpha_2\beta_2}x_2^0 .$$

В этом случае $(\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0, z^0)$ - точка на траектории, в начальный момент лежащая в конусе № 3.

Подставив компоненты этого решения в равенство

$$\beta_1 x_1=\beta_2 x_2 \quad \text{и} \quad z=\beta_2 x_2,$$

найдем, подобно предыдущему,

$$t_3^*=\frac{1}{\alpha_2\beta_2-\gamma_2+\gamma_1}\ln\frac{c_1^{(3)}\beta_1}{\beta_2 c_2^{(3)}\left(1-\dfrac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_2\beta_2-\gamma_1+\gamma_1}\right)}$$

для перехода траектории в правый конус и

$$t_3^{**}=\frac{1}{\alpha_2\beta_2-\gamma_2}\ln\frac{c_3^{(2)}}{\beta_2 c_2^{(3)}\left(1-\dfrac{1}{\gamma_2-\alpha_2\beta_2}\right)}$$

для перехода в конус № I.

Отсюда, требуя чтобы t_3^* и t_3^{**} были положительны

и ограничены, получим, что для перехода траектории в правый конус необходимо выполнить неравенства

$$\alpha_2\beta_2-\gamma_2>\alpha_1\beta_1-\gamma_1, \qquad /11/$$

а для перехода в конус № 1 - неравенства

$$\alpha_2\beta_2-\gamma_2\geqslant 0. \qquad /12/$$

/В случае равенства в /12/ $t_3^{**}=\frac{1}{\beta_2}\frac{z^0}{x_2^0}-1$; в этом случае система/3'''/ имеет кратный корень, и общее решение имеет вид, отличный от /10//.

Итак, для конуса № 3 можно сделать общий вывод: если не выполнены оба неравенства /11/, /12/, то все траектории остаются в конусе № 3; если выполнено /11/ и не выполнено /12/, то все траектории уходят в конус № 2; если выполнено /12/ и не выполнено /11/ - траектории уходят в конус № 1; наконец, если выполнены оба условия /11/ и /12/, то часть траекторий уходит в конус № 2 /для этой части $t_3^* < t_3^{**}$ /,а часть уходит в конус № 1/для этих траекторий $t_3^*<t_3^{**}$ /. Приравнивая t_3^* и t_3^{**} , найдем поверхность,разделяющую эти траектории. Ее уравнение имеет вид:

$$\frac{1}{\alpha_2\beta_2-\gamma_2+\gamma_1}\ln\frac{\beta_1[(\gamma_1-\gamma_2+\alpha_2\beta_2)x_1-\alpha_1\beta_2x_2]}{\beta_2x_2(\alpha_2\beta_2-\alpha_1\beta_1+\gamma_1-\gamma_2)}=\frac{1}{\alpha_2\beta_2-\gamma_2}\ln\frac{(\gamma_2-\alpha_2\beta_2)z-\beta_2x_2}{\beta_2x_2(\gamma_2-\alpha_2\beta_2-1)} .$$

Добавим еще, что если траектория остается в конусе № 3, то она стремится к точке покоя $\left(0,0,\tilde{z}_0-\frac{\beta_2\tilde{x}_2^0}{\gamma_2-\alpha_2\beta_2}\right)$, расположенной на оси OZ . /Это следует из вида решения /10//. Специальным выбором начальных данных эту точку покоя можно привести в начало координат. При таком выборе начальных данных в конце процесса не остается неизрасходованных внешне ресурсов.

Аналогично, рассматривая конус № 2, найдем два условия:

$$\alpha_1\beta_1-\gamma_1>\alpha_2\beta_2-\gamma_2 \qquad /13/$$

и

$$\alpha_1\beta_1-\gamma_1\geqslant 0, \qquad /14/$$

выполнение или невыполнение которых обеспечивает соответствующие 4 возможности поведения совокупности траекторий, начинающихся в конусе № 2. При этом если траектория остается в конусе № 2, то она стремится к точке покоя $\left(0,0,\tilde{z}^0-\frac{\beta_1\tilde{x}_1^0}{\gamma_1-\alpha_1\beta_1}\right)$, расположенной на оси OZ .

3. Займемся теперь выяснением глобального поведения траекторий. Характер траекторий в каждом из конусов определяется выполнением или невыполнением двух неравенств относительно коэффициентов системы. Образуя коньюкции высказываний, соответствующих этим неравенствам, или их отрицаний, мы получим множество возможных систем,каждая из котррых обладает характерным только для нее поведением траекторий. Всего таких коньюкций будет 2^6 / число шестиразрядных чисел в алфавите $\{0,1\}$/. Однако, высказывания не являются независи-

мыми друг от друга. Обозначим высказывания:

$$y_1 \sim \gamma_2 - \alpha_2\beta_2 > 1,$$
$$y_2 \sim \gamma_1 - \alpha_1\beta_1 > 1,$$
$$y_3 \sim \gamma_2 - \alpha_2\beta_2 < \gamma_1 - \alpha_1\beta_1,$$
$$y_4 \sim \gamma_2 - \alpha_2\beta_2 \leq 0,$$
$$y_5 \sim \gamma_1 - \alpha_1\beta_1 < \gamma_2 - \alpha_2\beta_2,$$
$$y_6 \sim \gamma_1 - \alpha_1\beta_1 \leq 0.$$

Легко заметить, что относительно логических переменных $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ выполняются тождества:

$$y_1 \wedge y_4 \equiv 0, \quad y_3 \wedge y_5 \equiv 0, \quad y_2 \wedge y_6 \equiv 0, \quad y_2 \wedge y_4 \wedge y_5 \equiv 0.$$
$$y_1 \wedge y_3 \wedge y_6 \equiv 0, \quad y_4 \wedge y_5 \wedge \bar{y}_6 \equiv 0, \quad \bar{y}_4 \wedge \bar{y}_5 \wedge y_6 \equiv 0, \quad y_1 \wedge \bar{y}_2 \wedge y_3 \equiv 0.$$
$$\bar{y}_1 \wedge y_2 \wedge \bar{y}_3 \equiv 0, \quad y_1 \wedge \bar{y}_2 \wedge \bar{y}_3 \wedge \bar{y}_5 \equiv 0, \quad \bar{y}_1 \wedge y_2 \wedge \bar{y}_3 \wedge \bar{y}_5 \equiv 0.$$
$$\bar{y}_3 \wedge \bar{y}_5 \wedge y_4 \wedge \bar{y}_6 \equiv 0, \quad \bar{y}_3 \wedge \bar{y}_5 \wedge \bar{y}_4 \wedge y_6 \equiv 0.$$

Поэтому все шестиместные коньюкции, куда входят левые части написанных тождеств, также будут равны нулю. Таких коньюкций будет всего 49. Таким образом, остается 15 возможных систем. Составив коньюкцию, соответствующую каждой из этих систем, можно сразу же определить глобальное поведение траекторий во всем первом ортанте. Выпишем все эти коньюкции и рядом отметим ход траекторий. При этом символ $i \to k$ будет обозначать, что траектории, начавшиеся в i-м конусе, переходят в k-й конус, $i,k = 1,2,3$.

I	$\bar{y}_1 \wedge \bar{y}_2 \wedge \bar{y}_3 \wedge \bar{y}_4 \wedge \bar{y}_5 \wedge \bar{y}_6$	, I → I, 2 → 2, 3 → 3,
2	$\bar{y}_1 \wedge \bar{y}_2 \wedge \bar{y}_3 \wedge \bar{y}_4 \wedge y_5 \wedge \bar{y}_6$	, I → I, 2 → 3, 3 → 3,
3	$\bar{y}_1 \wedge \bar{y}_2 \wedge \bar{y}_3 \wedge \bar{y}_4 \wedge y_5 \wedge y_6$	, I → I, 2 → I, 2 → 3,3 → 3,
4	$\bar{y}_1 \wedge \bar{y}_2 \wedge \bar{y}_3 \wedge y_4 \wedge \bar{y}_5 \wedge y_6$	, I → I, 2 → I, 3 → I,
5	$\bar{y}_1 \wedge \bar{y}_2 \wedge \bar{y}_3 \wedge y_4 \wedge y_5 \wedge y_6$	, I → I, 2 → I, 2 → 3 → I,
6	$\bar{y}_1 \wedge \bar{y}_2 \wedge y_3 \wedge \bar{y}_4 \wedge \bar{y}_5 \wedge \bar{y}_6$	, I → I, 2 → 2, 3 → 2,
7	$\bar{y}_1 \wedge \bar{y}_2 \wedge y_3 \wedge y_4 \wedge \bar{y}_5 \wedge \bar{y}_6$	, I → I, 2 → 2, 3 → I,3 → 2,
8	$\bar{y}_1 \wedge \bar{y}_2 \wedge y_3 \wedge y_4 \wedge \bar{y}_5 \wedge y_6$	, I → I, 3 → I, 3 → 2 → I,
9	$\bar{y}_1 \wedge y_2 \wedge y_3 \wedge \bar{y}_4 \wedge \bar{y}_5 \wedge \bar{y}_6$	, I → 2, 2 → 2, 3 → 2,
I0	$\bar{y}_1 \wedge y_2 \wedge y_3 \wedge y_4 \wedge \bar{y}_5 \wedge \bar{y}_6$	, 2 → 2, 3 → 2, 3 → I → 2,
II	$y_1 \wedge \bar{y}_2 \wedge \bar{y}_3 \wedge \bar{y}_4 \wedge y_5 \wedge \bar{y}_6$	, I → 3, 2 → 3, 3 → 3,
I2	$y_1 \wedge \bar{y}_2 \wedge \bar{y}_3 \wedge \bar{y}_4 \wedge y_5 \wedge y_6$	, 2 → I — 3,2 → 3, → 3 → 3,
I3	$y_1 \wedge y_2 \wedge \bar{y}_3 \wedge \bar{y}_4 \wedge \bar{y}_5 \wedge \bar{y}_6$	, I → 2, I → 3, 2 → 2,3 → 3,
I4	$y_1 \wedge y_2 \wedge \bar{y}_3 \wedge \bar{y}_4 \wedge y_5 \wedge \bar{y}_6$	, I → 3, I → 2 → 3,3 → 3,
I5	$y_1 \wedge y_2 \wedge y_3 \wedge \bar{y}_4 \wedge \bar{y}_5 \wedge \bar{y}_6$	, I → 3, I → 2 → 3,3 → 3.

Из этой таблицы видно, что система /3/ никогда не может иметь не только периодических решений, но и решений, являющихся затухающими колебаниями. В самом деле, ни в одном из указанных случаев траектория, начавшаяся в каком-либо конусе и перешедшая в соседний, не возвращается в первоначальный конус. Если же траектория не покида-

ет конуса, то как мы выяснили в п 2, Она без затухающих колебаний стремится к точке покоя.

Совокупность систем, приведенных в таблице, можно разбить на пять групп. К первой группе отнесем только одну систему № I. Она характерна тем, что в каком бы конусе траектория ни началась, она в нем и остается.

Ко второй группе отнесем вторую и шестую системы. Траектории этих систем, начинающиеся в двух конусах, в них и остаются. А из оставшегося конуса все траектории переходят в один из соседних.

К третьей группе относятся четвертая, девятая и одиннадцатая системы. Траектории этих систем, начавшиеся в одном из конусов, там и остаются. В этот же конус переходят траектории из остальных конусов.

Четвертая группа состоит из третьей, седьмой и тринадцатой систем. Траектории этих систем, начавшиеся в двух конусах, в них и остаются. Оставшийся конус делится на две части некоторой поверхностью так, что из разных частей траектории уходят в разные соседние конуса.

Наконец, пятая группа содержит оставшиеся шесть систем. Траектории этих систем, начавшиеся в одном из конусов, - назовем его конечным - в нем и остаются. Один из соседних конусов делится на две части так, что из одной части траектории непосредственно переходят в конечный конус, а из другой - также попадают в конечный конус, проходя при этом через другой соседний конус.

Можно сделать общий вывод, справедливый для всех систем: траектория, начавшаяся в любом конусе, в конце концов устремляется к точке покоя, расположенной на оси OZ . Если траектория стремится к точке покоя, оставаясь в конусе № I, точка покоя совпадает с началом координат. В остальных случаях точка покоя совпадает с началом координат только при специальном выборе начальных данных /начальные данные должны быть выбраны на некоторой плоскости/.

4. Рассмотрим теперь тот случай, когда одно из γ_i равно нулю, то есть одно из веществ не выводится из системы. Пусть, например, $\gamma_2=0$. Тогда, как легко видеть, высказывание y_1 всегда ложно, а высказывание y_4 всегда истинно. Формальное множество логических возможностей сужается до I6 коньюкций. Используя очевидные тождества $y_3 \wedge y_5 \quad 0$, $\bar{y}_3 \wedge \bar{y}_6 \quad 0$ и $y_2 \wedge y_6 \quad 0$, мы выделим из этого множества всего пять реализуемых случаев. Перечислим их, указав рядом ход траекторий соответствующих систем:

I $\bar{y}_2 \wedge \bar{y}_3 \wedge \bar{y}_5 \wedge y_6$, I → I, 3 → I, 2 → I
2 $\bar{y}_2 \wedge y_3 \wedge \bar{y}_5 \wedge \bar{y}_6$, I → I, 2 → 2, 3 → I, 3 → 2,
3 $\bar{y}_2 \wedge \bar{y}_3 \wedge y_5 \wedge y_6$, I → I, 2 → I, 2 → 3 → I,
4 $\bar{y}_2 \wedge y_3 \wedge \bar{y}_5 \wedge y_6$, I → I, 3 → I, 3 → 2 → I,
5 $y_2 \wedge y_3 \wedge \bar{y}_5 \wedge \bar{y}_6$, 2 → 2, 3 → 2, 3 → I → 2,

Из этой таблицы видно, что при $\gamma_2 = 0$ траектория не может остаться

в конусе № 3.

В первом, третьем и четвертом случаях траектория всегда оканчивается в конусе № I. Из решения /7/ при $\gamma_2=0$ видно, что точка покоя в этом случае лежит на оси OX_2. Ее координаты $0, x_2^\circ+\alpha_2 z^\circ, 0$; она никогда не совпадает с началом координат.

Во втором случае часть траекторий, а в пятом случае все траектории оканчиваются в конусе № 2. Необходимым условием для того,чтобы траектории оканчивались в конусе № 2, является неравенство

$$\gamma_1-\alpha_1\beta_1>0.$$

Это следует из того, что для второй и пятой систем общей является коньюкция $y_3\wedge\bar{y}_5\wedge\bar{y}_6$.

Точка покоя для траектории, оканчивающейся в конусе № 2, лежит на плоскости X_2OZ [ж/]. Это следует из формулы общего решения в конусе № 2:

$$X(t)=C_1^{(2)}e^{(\alpha_1\beta_1-\gamma_1)t}\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_1-\gamma_1}\\ -\dfrac{\beta_1}{\alpha_1\beta_1-\gamma_1}\end{pmatrix}+C_2^{(2)}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+C_3^{(2)}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

где $C_1^{(2)}=x_1^\circ$, $C_2^{(2)}=x_2^\circ-x_1^\circ\dfrac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_1-\gamma_1}$, $C_3^{(2)}=z^\circ+x_1^\circ\dfrac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_1-\gamma_1}$.

Из этой же формулы видно, что специальным выбором начальных данных точку покоя можно переместить на ось OX_2 /для этого нужно, чтобы $C_3^{(2)}=0$ /, но она никогда не совпадает с началом координат.

5. Рассмотрим теперь случай, когда одно из $\beta_i=\infty$ /одно из веществ не потребляется в системе/. Пусть, например, $\beta_1=\infty$. В этом случае общая система имеет вид:

$$\begin{cases}\dot{x}_i=\alpha_i\min(z,\beta_2x_2)-\gamma_i x_i,\\ \dot{z}=-\min(z,\beta_2x_2).\end{cases}\qquad /15/$$

Первый контакт делится только на два конуса - конус № I, определяемый неравенствами:

$$\left.\begin{aligned}&z\geqslant0\\&z\leqslant\beta_2x_2\\&x_1\geqslant0\end{aligned}\right\}$$

и конус № 2, для которого

$$\left.\begin{aligned}&z\geqslant\beta_2x_2\\&x_2\geqslant0\\&x_1\geqslant0\end{aligned}\right\}$$

В каждом из этих конусов система /15/ линейна. В конусе № I имеем:

$$\begin{aligned}&\dot{x}_i=\alpha_i z-\gamma_i x_i\\&\dot{z}=-z,\end{aligned}$$

а в конусе № 2

[ж/] При $\gamma_2=0$ любая точка плоскости X_2OZ является точкой покоя для системы /3/.

$$\dot{x}_1 = \alpha_i \beta_2 x_2 - \gamma_i x_i ,$$
$$\dot{z} = -\beta_2 x_2 .$$

Соответствующие общие решения имеют вид:

$$X(t) = C_1 e^{-\gamma_1 t} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + C_2 e^{-\gamma_2 t} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{vmatrix} \frac{\alpha_1}{\gamma_1 - 1} \\ \frac{\alpha_2}{\gamma_2 - 1} \\ 1 \end{vmatrix} , \qquad /16/$$

где $C_1 = x_1^\circ - z\frac{\alpha_1}{\gamma_1 - 1}$, $C_2 = x_2^\circ - z^\circ \frac{\alpha_2}{\gamma_2 - 1}$, $C_3 = z^\circ$.

и

$$X(t) = C_1 e^{-\gamma_1 t} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + C_2 e^{(\alpha_2\beta_2 - \gamma_2)t} \begin{vmatrix} \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2\beta_2 - \gamma_2 + \gamma_1} \\ 1 \\ \frac{\beta_2}{\gamma_2 - \alpha_2\beta_2} \end{vmatrix} + C_3 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} , \qquad /17/$$

где $C_1 = x_1^\circ - x_2^\circ \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2\beta_2 - \gamma_2 + \gamma_1}$, $C_2 = x_2^\circ$, $C_3 = z^\circ - x_2^\circ \frac{\beta_2}{\gamma_2 - \alpha_2\beta_2}$.

Подставив в равенство $z = \beta_2 x_2$ координаты решения /16/, /17/, найдем условия перехода траектории из нижнего конуса в верхний:

$$\gamma_2 - \alpha_2\beta_2 > 1$$

и из верхнего конуса в нижний:

$$\gamma_2 - \alpha_2\beta_2 \le 0 .$$

Сопоставляя эти условия, заключаем, что если

$$0 < \gamma_2 - \alpha_2\beta_2 < 1 ,$$

то траектории остаются в тех конусах, в которых они начались; если

$$\gamma_2 - \alpha_2\beta_2 > 1 ,$$

то все траектории оканчиваются в верхнем конусе; наконец, если

$$\gamma_2 - \alpha_2\beta_2 \le 0 ,$$

то все траектории оканчиваются в нижнем конусе.

Из решений /16/ и /17/ видно, что в верхнем конусе точка покоя имеет координаты $\left(0,\ 0,\ z^\circ - \frac{\beta_2}{\gamma_2 - \alpha_2\beta_2} x_2^\circ\right)$, а в нижнем конусе она совпадает с началом координат.

6. Напомним, что наша система описывает процесс с увеличением x_1 и x_2. В этом пункте мы рассмотрим вопрос о том, какое количество x_1 и x_2 можно извлечь, двигаясь по той или иной траектории. Мы ограничимся только тем случаем, когда траектория начинается в первом конусе.

Прежде всего рассмотрим траектории, остающиеся в первом конусе для всех моментов времени. Системы, обладающие такими траекториями отмечены коньюкцией $\bar{y}_1 \wedge \bar{y}_2$, что соответствует одновременному выполнению условий:

$$\begin{cases} \gamma_2 < \alpha_2\beta_2 + 1 , \\ \gamma_1 < \alpha_1\beta_1 + 1 . \end{cases} \qquad /18/$$

Этим условиям удовлетворяют первые восемь систем нашей таблицы.

Количество x_1, извлеченное в этом случае за все время дей-

ствия процесса, выразится интегралом:

$$X_1 = \gamma_1 \int_0^\infty x_1^{(1)}(t)dt = \gamma_1 \int_0^\infty \overline{c_1^{(1)}e^{-\gamma_1 t} + \frac{\alpha_1}{\gamma_1 - 1}c_3^{(1)}e^{-t}} \quad dt$$

Подсчет этого интеграла дает

$$X_1 = x_1^o + \alpha_1 z^o.$$

Аналогично

$$X_2 = x_2^o + \alpha_2 z^o.$$

Заметим, что полученные величины не зависят от интенсивностей γ_1 и γ_2. Лишь бы эти интенсивности удовлетворяли условиям /18/. Заметим еще, что добытое количество X_2 в точности равно излишку второго вещества, который получается, если x_2 не выводить из системы /см. координаты точки покоя для траекторий первого конуса при $\gamma_2 = 0$/. Аналогичный вывод справедлив, разумеется, и для X_1.

Рассмотрим теперь траектории, начинающиеся в первом конусе и оканчивающиеся в третьем /кратко траектории $1 \to 3$ /. Такими траекториями обладают четыре системы с одиннадцатой по четырнадцатую. Они характеризуются коньюкцией $y_1 \wedge \bar{y}_3$, что соответствует неравенствам:

$$\begin{cases} \gamma_2 > \alpha_2 \beta_2 + 1, \\ \gamma_2 \geq \alpha_2 \beta_2 + \gamma_1 - \alpha_1 \beta_1. \end{cases} \qquad /19/$$

Из этих условий видно, что интенсивность γ_2 во всяком случае больше, чем в предыдущем случае. Найдем количества X_1 и X_2, извлекаемые при движении по траекториям, соответствующим этому значению γ_2.

Вычислив интеграл $\gamma_1 \int_0^{t_1^*} x_1^{(1)}(t)dt$, где $x_1^{(1)}(t)$ – первая компонента решения /7/, и интеграл $\gamma_1 \int_{t_1^*}^\infty x_1^{(3)}(t)dt$ где $x_1^{(3)}(t)$ – – первая компонента решения /10/, получим

$$X_1 = \gamma_1 \int_0^{t_1^*} x_1^{(1)}(t)dt + \gamma_1 \int_{t_1^*}^\infty x_1^{(3)}(t)dt =$$

$$= x_1^o + \alpha_1 z^o - \frac{\alpha_1 \beta_2 e^{-\gamma_2 t_1^*} c_2^{(1)}(\gamma_2 - 1)}{\gamma_2 - \alpha_2 \beta_2}. \qquad /20/$$

Заметим, что дробь, стоящая справа, всегда положительна при сделанных предположениях. Таким образом, увеличение интенсивности так, что выполняются неравенства /19/, при движении по траектории из конуса № 1 в конус № 3, приводит к уменьшению глобальной добычи первого вещества.

Выясним аналогичный вопрос относительно $x_2(t)$. Имеем

$$X_2 = \gamma_2 \int_0^{t_1^*} x_2^{(1)}(t)dt + \gamma_2 \int_{t_1^*}^\infty x_2^{(3)}(t)dt,$$

где $x_2^{(1)}$ и $x_2^{(3)}$ - вторые компоненты решений /7/ и /10/. Подсчитав эти интегралы, получим

$$X_2 = x_2^o + \alpha_1 z^o - \frac{\alpha_2\beta_2 e^{-\gamma_2 t_1^*} C_2^{(1)}(\gamma_2 - 1)}{\gamma_2 - \alpha_2\beta_2}. \qquad /21/$$

Дробь, стоящая справа, только положительным множителем отличается от дроби в правой части /19/. Таким образом, количество X_2 также уменьшилось.

Однако при выполнении условий /19/ не все траектории, начавшиеся в конусе № I, переходят в конус № 3 и там остаются. В самом деле, в системе 13 часть траекторий уходит в конус № 2 и там оканчивается, а в системе 14 часть траекторий попадает в конус № 3 не непосредственно, а только пройдя через конус № 2. И чтобы ответить на вопрос, как влияет увеличение γ_2 на глобальную добычу X_1 и X_2 при движении по в с е м траекториям, начавшимся в конусе № I, мы должны еще подсчитать величины X_1 и X_2, соответствующие движению по траектории $1 \to 2$ и $1 \to 2 \to 3$.

Имея общее решение для второго конуса:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \\ z^{(2)}(t) \end{pmatrix} = C_2^{(2)} e^{(\alpha_1\beta_1 - \gamma_1)t} \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_1 - \gamma_1 + \gamma_2} \\ \dfrac{\beta_1}{\alpha_1\beta_1 - \gamma_1} \end{pmatrix} + C_1^{(2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\gamma_2 t} + C_3^{(2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и помня о том, что для 13 и 14 систем $\alpha_1\beta_1 - \gamma_1 < 0$, мы легко найдем для траектории $1 \to 2$ соответствующие интегралы:

$$X_1 = \gamma_1 \int_0^{t_1^{**}} x_1^{(1)}(t)dt + \gamma_1 \int_{t_1^{**}}^{\infty} x_1^{(2)}(t)dt = x_1^o + \alpha_1 z^o - \frac{\alpha_1\beta_1 e^{-\gamma_1 t_1^{**}} C_1^{(1)}(\gamma_1 - 1)}{\gamma_1 - \alpha_1\beta_1} \qquad /22/$$

и

$$X_2 = \gamma_2 \int_0^{t_1^{**}} x_2^{(1)}(t)dt + \gamma_2 \int_{t_1^{**}}^{\infty} x_2^{(2)}(t)dt = x_2^o + \alpha_2 z^o - \frac{\alpha_2\beta_1 e^{-\gamma_1 t_1^{**}} C_1^{(1)}(\gamma_1 - 1)}{\gamma_1 - \alpha_1\beta_1}. \qquad /23/$$

Как видим, и на этих траекториях мы получаем меньшее количество X_1 и X_2.

Осталось рассмотреть систему 14 и ее траектории $1 \to 2 \to 3$. Имеем в этом случае:

$$X_1 = \gamma_1 \int_0^{t_1^{**}} x_1^{(1)}(t)dt + \gamma_1 \int_{t_1^{**}}^{t_2^*} x_1^{(2)}(t)dt + \int_{t_2^*}^{\infty} x_1^{(3)}(t)dt =$$

$$= x_1^o + \alpha_1 z^o - C_1^{(1)} e^{-\gamma_1 t_1^{**}} - \frac{\alpha_1\gamma_1}{\gamma_1 - 1} C_3^{(1)} e^{-t_1^{**}} +$$

$$+ \frac{\gamma_1 C_2^{(2)}}{\alpha_1\beta_1 - \gamma_1}\left[e^{(\alpha_1\beta_1 - \gamma_1)t_2^*} - e^{(\alpha_1\beta_1 - \gamma_1)t_1^{**}}\right] +$$

$$+C_1^{(3)}e^{-\gamma_1 t_2^*} + \frac{C_2^{(3)}\gamma_1\alpha_1\beta_1 e^{(\alpha_2\beta_2-\gamma_2)t_2^*}}{(\gamma_1-\gamma_2+\alpha_2\beta_2)(\gamma_2-\alpha_2\beta_2)} . \qquad /24/$$

Пользуясь равенствами склейки траекторий

$$x_i^{(3)}(t_2^*) = x_i^{(2)}(t_2^*)$$

и

$$x_i^{(2)}(t_1^{**}) = x_1^{(1)}(t_1^{**}),$$

мы выразим константы $C_i^{(3)}$ и $C_i^{(2)}$ через константы $C_i^{(1)}$. Подставив эти выражения в /24/, получим

$$X_1 = x_1^0 + \alpha_1 z^0 - C_2^{(2)}\alpha_1\beta_1\frac{(\alpha_1\beta_1-\gamma_1+\gamma_2-\alpha_2\beta_2)}{(\gamma_2-\alpha_2\beta_2)(\gamma_1-\alpha_1\beta_1)}e^{(\alpha_1\beta_1-\gamma_1)t_2^*} -$$

$$-C_1^{(1)}e^{-\gamma_1 t_1^{**}} + C_1^{(1)}\frac{(\gamma_1-1)\gamma_1 e^{-\gamma_1 t_1^{**}}}{(\gamma_1-1-\alpha_1\beta_1)(\gamma_1-\alpha_1\beta_1)} - \frac{\alpha_1\gamma_1 C_3^{(1)}}{\gamma_1-1}e^{-t_1^{**}}.$$

Группируя последние три слагаемых /вынося в них за скобку $e^{-\gamma_1 t_1^{**}}$/, получим окончательно:

$$X_1 = x_1^0 + \alpha_1 z^0 - C_2^{(2)}\alpha_1\beta_1\frac{(\alpha_1\beta_1-\gamma_1+\gamma_2-\alpha_2\beta_2)}{(\gamma_2-\alpha_2\beta_2)(\gamma_1-\alpha_1\beta_1)}e^{(\alpha_1\beta_1-\gamma_1)t_2^*} -$$

$$-\frac{\alpha_1\beta_1(\gamma_1-1)}{\gamma_1-\alpha_1\beta_1}C_1^{(1)}e^{-\gamma_1 t_1^{**}}. \qquad /25/$$

Последние два слагаемых справа - отрицательны. Таким образом, и при движении по траектории $1\to2\to3$ мы получаем меньшее количество X_1, чем при движении по траектории $1\to1$. Более того, из сравнения /22/ и /25/ видно, что это количество меньше, чем при движении по траекториям $1\to2$.

Аналогичный вывод справедлив и для X_2. В наше рассмотрение не вошла только последняя 15-я система. В отличие от /19/ для нее характерны неравенства:

$$\gamma_2 > \alpha_2\beta_2 + 1,$$

$$\gamma_2 < \alpha_2\beta_2 + \gamma_1 - \alpha_1\beta_1. \qquad /26/$$

Ее траектории, начинаются в первом конусе, попадают во второй конус либо непосредственно, либо проходя через третий. Исследование в этом случае практически ничем не отличается от только что проведенного для системы 14.

Таким образом, любое увеличение интенсивностей γ_1 и γ_2 в нарушение условий /18/ приводит в итоге к меньшим глобальным количествам X_1 и X_2, извлеченным из процессов.

Поступила в редакцию 31.3.1970 г.

Литература

1. Ю.И.Гильдерман, К.Н.Кудрина, И.А.Полетаев, Системы с лими-

тирующим фактором. В сб. "Исследования по кибернетике". Изд-во. "Советское радио" /в печати/.

2. Ю.И.Гильдерман, К.Н.Кудрина, И.А.Полетаев, Модели с лимитирующим фактором. Тезисы Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики, Новосибирск, стр. 18. 1969.