Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1970 г. выпуск 4-5.
УДК.62.501.

О ПРИМЕНЕНИИ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В СЛУЧАЕ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ И В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ДИСКРЕТНЫХ ПРОЦЕССОВ

Ю.М.Волин, Г.М.Островский

В статье рассматривается подход, позволяющий эффективно использовать принцип максимума Понтрягина для решения оптимальных задач в случае особых и дискретных управлений.

§ I. Оптимальные задачи с особыми управлениями.

Рассмотрим задачу оптимизации непрерывной системы:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x)w + r(x) = F(x,w), \quad x(0)=x^0, \quad 0 \le t \le \bar{t}\ ; \qquad /1/$$

$$\frac{dx_0}{dt} = \varphi_0(x)w + r_0(x) = F_0(x,w), \quad x_0(0) = 0\ ; \qquad /2/$$

$$w \in W\ ; \qquad /3/$$

$$x_0(\bar{t}) = max\ ; \qquad /4/$$

где $x = (x_1,\dots,x_n)$ - вектор-столбец фазовых переменных, $w=(w_1,\dots,w_m)$ - вектор-столбец распределенных управлений, φ - матрица размерности $n\times n$. Для простоты изложения мы ограничимся случаем свободного правого конца.

Применение принципа максимума Понтрягина [I] к задаче /I/ - /4/ приводит к условию максимума:

$$H(x(t),\psi(t),w(t)) = \max_{w\in W} H(x(t),\psi(t),w); \qquad /5/$$

$$H = F_0(x,w) + \psi F(x,w); \qquad /6/$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\psi H_x \ , \quad \psi(\bar{t}) = 0. \qquad /7/$$

Сопряженная переменная ψ рассматривается как вектор-строка. Так как $H(x,\psi,w)$ линейна относительно w :

$$H = a(x,\psi)w + b(x,\psi), \qquad /8/$$

то $\max_{w\in W} H$ при $a \ne 0$ достигается на границе W . Если же $a \equiv 0$ на $[0,\bar{t}]$ /или на подынтервале $[t_1,t_2]$ интервала $[0,\bar{t}]$ /, то имеет место случай особого управления [2,3] . Особые управления часто имеют место в линейных /относительно управлений/ системах. В [4], например, показано, что в задаче оптимального распределения хладоагента в химическом реакторе оптимальное управление является особым. В последнее время интерес к особым управлениям возрос также в связи с тем, что в случае скользящего режима [5,6] оптимальное управление для расщепленной задачи всегда оказывается особым. Вве-

дение же в рассмотрение скользящих режимов практически снимает проблему существования: в то время как оптимальное управление в обычном смысле существует далеко не всегда / и требуются специальные условия для его существования [6] /, оптимальное управление как скользящий режим существует практически всегда. В случае особого управления условие максимума /6/ выполняется тривиально и не может служить для определения оптимального управления.

Поступим следующим образом. Введем в уравнение /2/ дополнительный член

$$\frac{d\tilde{x}_0}{dt} = \varphi_0(x)w + r_0(x) - \frac{\alpha^2}{2} w^T w\,,\ \tilde{x}_0(0) = 0, \qquad /2^*/$$

где w^T - транспонированный вектор, а α^2 - малый параметр. Задачу /I/-/4/ назовем аппроксимирующей задачей /АЗ/ для задачи /I/-/4/.

Т е о р е м а I. В АЗ функция Понтрягина H имеет единственный глобальный максимум в области W /следовательно, особые управления в АЗ невозможны/.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы легко вытекает из отрицательной определенности функции H по w и выпуклости множества W

Т е о р е м а 2. Если $\alpha_i \to 0$ и $w_i^{(i)}(t)$, $x^{(i)}(t)$ - решения АЗ при $\alpha = \alpha_i$, то $w^{(i)}(t)$ есть максимизирующая последовательность управлений для задачи /I/ - /4/.

В самом деле, пусть $w(t)$, $x(t)$ - некоторое решение /I/ - /3/. Из /2*/ следует

$$x_0(\bar{t}) \leqslant \tilde{x}_0(\bar{t}) + \frac{\alpha^2}{2}\int_0^{\bar{t}} |w^T w|\,dt\,.$$

Отсюда

$$x_0(\bar{t}) \leqslant \tilde{x}_0^{(i)}(\bar{t}) + \frac{\alpha_i^2}{2}\int_0^{\bar{t}} |w^T w|\,dt\,,$$

а это и означает, что $\tilde{w}^{(i)}(t)$ есть максимизирующая последовательность.

Если W - ограниченное множество, то, как легко убедиться, последовательность $x^{(i)}(t)$ содержит подпоследовательность $x^{(n_i)}(t)$, равномерно сходящуюся к $\bar{x}(t)$. В силу выпуклости W /см. [6] /, $\bar{x}(t)$ оказывается решением уравнения /I/, и по $\bar{x}(t)$ может быть найдено оптимальное управление $\bar{w}(t)$. Если задача /I/ - /4/ имеет единственное решение $\bar{w}(t)$, $\bar{x}(t)$, то $x^{(i)}(t)$ равномерно сходится к $\bar{x}(t)$. Изложенный подход к решению оптимальных задач может быть назван методом невырожденной аппроксимации, поскольку особое управление можно рассматривать как своего рода вырожденный случай, и в предложенном методе строится вспомогательная аппроксимирующая задача, в которой особые управления исключаются.

Для решения АЗ могут быть применены численные алгоритмы, основанные на принципе максимума Понтрягина, например, метод Ньютона

по начальным данным [7 - 9], метод квазилинеаризации [10] или метод Черноусько и Крылова [11]. При практической реализации указанных алгоритмов целесообразно задаваться сначала не слишком малыми значениями α^2 /чем меньше α^2, тем большие трудности могут возникнуть при решении краевой задачи, соответствующей исходной оптимальной задаче/ и постепенно их уменьшать, используя решение, полученное при старом α^2 в качестве начального приближения при новом α^2.

Предыдущие результаты легко обобщаются на случай оптимизации последовательности блоков с распределенными параметрами/частный случай задачи оптимизации разрывной системы [9] /:

$$\frac{dx^{(k)}}{dt}=\varphi^{(k)}(x^{(k)})w^{(k)}+r^{(k)}(x^{(k)}) \qquad k=1,\dots,N;\ 0\le t\le \bar{t}_k; \qquad /9/$$

$$\frac{dx_0^{(k)}}{dt}=\varphi_0^{(k)}(x^{(k)})w^{(k)}+r_0^{(k)}(x^{(k)}); \qquad /10/$$

$$x^{(k)}(0)=g^{(k)}(x^{(k-1)}(t_{k-1})),\quad k=2,\dots,N; \qquad /11/$$

$$x_0^{(k)}(0)=g_0^{(k)}(x^{(k-1)}(t_{k-1})).\ k=2,\dots,N; \qquad /12/$$

$$x^{(1)}(0)=x^0,\ x_0^{(1)}(0)=0; \qquad /13/$$

$$w^{(k)}\in W_k,\quad k=1,\dots,N; \qquad /14/$$

$$x_0(\bar{t}_N)=max. \qquad /15/$$

Задача /1/ - /4/ является частным случаем задачи /9/ - /15/ /при $k=1$ /.

АЗ получается заменой уравнений /10/ уравнением

$$\frac{d\tilde{x}_0^{(k)}}{dt}=\varphi_0^{(k)}(x^{(k)})w^{(k)}+r_0^{(k)}(x^{(k)})-\frac{\alpha^2}{2}(w^{(k)})^T w^{(k)}.$$

Все вышеприведенные утверждения для задачи /1/ - /4/ сохраняются в силе. Необходимо только отметить, что в точках $\bar{t}_k$ появляются дополнительные условия для сопряженного вектора /см.[9]/:

$$\psi^{(k-1)}(\bar{t}_{k-1})=\psi^{(k)}(\bar{t}_k)\frac{\partial g^{(k)}}{\partial x^{(k-1)}},\ k=2,\dots,N. \qquad /16/$$

§ 2. Оптимальные задачи для дискретных процессов

Пусть задача оптимизации дискретного процесса задана в виде:

$$y^{(k)}=f^{(k)}(y^{(k-1)},u^{(k)}), \qquad k=1,\dots,N, \qquad /17/$$

$$y_0^{(k)}=f_0^{(k)}(y^{(k-1)},u^{(k)})+y_0^{(k-1)}, \qquad /18/$$

$$y^{(0)}=y^0,\ y_0^{(0)}=0, \qquad /19/$$

$$u\in U:\ Du+p\le 0, \qquad /20/$$

$$y_0^{(N)}=max, \qquad /21/$$

где $y^{(k)}$ - векторы фазовых переменных, $u^{(k)}$ - векторы управлений, P - матрица размерности $s\times m$. Предполагается, что неравенство /20/ задает выпуклый многогранник /для любого u, если $\widehat{P}$ - матрица размерности $\widehat{s}\times m$, составленная из строк P, для которых в /20/ выполняются строгие равенства, $\widetilde{P}$ имеет ранг $\widetilde{s}$ /. Как известно, для дискретных процессов справедлив так называемый дискретный принцип максимума [12]. Последний, однако, оказывается в вычислительном отношении существенно более слабым, чем принцип максимума Понтрягина. Основной трудностью, ограничивающей применение дискретного принципа максимума, является возможная многоэкстремальность функций Понтрягина, приводящая к комбинаторным сложностям. Другие трудности связаны со сложностью нахождения точек, удовлетворяющих дискретному принципу максимума, поскольку такими точками являются не только стационарные точки и точки локального максимума, но также и особые точки, не обладающие "удобной" аналитической характеристикой [14].

Распространим подход, развитый в § I, на случай оптимизации дискретных процессов. Прежде всего перейдем к эквивалентной задаче оптимизации последовательности непрерывных блоков:

$$\frac{dx^{(k)}}{dt}=f^{(k)}_{u^{(k)}}(z^{(k)},v^{(k)})w^{(k)},\qquad 0\le t\le 1;\ k=1,\dots,N, \tag{22}$$

$$\frac{dx_0^{(k)}}{dt}=f^{(k)}_{0u^{(k)}}(z^{(k)},v^{(k)})w^{(k)}, \tag{23}$$

$$\frac{dv^{(k)}}{dt}=w^{(k)},$$

$$0\le t\le 1;\ k=1,\dots,N,$$

$$\frac{dz^{(k)}}{dt}=0, \tag{25}$$

$$x^{(k)}(0)=f^{(k)}(x^{(k-1)}(1),0),\ k=2,\dots,N, \tag{26}$$

$$x_0^{(k)}(0)=f_0^{(k)}(x^{(k-1)}(1),0)+x_0^{(k-1)}(1),\ k=2,\dots,N, \tag{27}$$

$$z^{(k)}(0)=x^{(k-1)}(1),\ k=2,\dots,N, \tag{28}$$

$$v^{(k)}(0)=0,\ k=1,\dots,N, \tag{29}$$

$$x^{(1)}(0)=f^{(1)}(y^0,0),\ x_0^{(1)}(0)=f_0^{(1)}(0,0), \tag{30}$$

$$w\in W: Pw+p\le 0, \tag{31}$$

$$x_0^{(N)}(1)=max. \tag{32}$$

Легко проверяется, что задача /22/ - /32/ эквивалентна задаче /17/-/21/ в следующем смысле: если $W^{(k)}, x^{(k)}, x_0^{(k)}, v^{(k)}, z^{(k)}$ удовлетворяют условиям /22/ - /31/, то $u^{(k)}, y^{(k)}, y_0^{(k)}$, определенные равенствами

$$y^{(k)}=x^{(k)}(1),\ y_0^{(k)}=x_0^{(k)}(1),\ u^{(k)}=v^{(k)}(1), \qquad /33/$$

удовлетворяют условиям /17/ - /20/; наоборот, если $u^{(k)}, y^{(k)}, y_0^{(k)}$ удовлетворяют условиям /17/ - /20/, то для $W^{(k)}(t)\equiv u^{(k)}$ выполняется неравенство /31/ и для $x^{(k)}, x_0^{(k)}, v^{(k)}, z^{(k)}$, определенных условиями /22/ - /30/, выполнены равенства /33/. К задаче /22/-/32/ может быть теперь применена рассмотренная ранее аппроксимирующая схема. В АЗ уравнение /23/ заменяется уравнением

$$\frac{d\tilde{x}_0^{(k)}}{dt}=f^{(k)}_{0u^{(k)}}(z^{(k)},v^{(k)})W^{(k)}-\frac{\alpha^2}{2}(W^{(k)})^T W^{(k)}. \qquad /23^*/$$

Сопряженная система для данной задачи запишется следующим образом:

$$\varphi^{(k)}=const,\ k=1,\dots,N; \qquad /34/$$

$$\frac{d\mu^{(k)}}{dt}=-\frac{\partial H_k}{\partial v^{(k)}},\ k=1,\dots,N, \qquad /35/$$

$$\varphi^{(k-1)}=\varphi^{(k)}\frac{\partial f^{(k)}}{\partial y^{(k-1)}}(x^{(k-1)}(1),0)+\frac{\partial f_0^{(k)}}{\partial y^{(k-1)}}(x^{(k-1)}(1),0),\ k=2,\dots,N, \qquad /36/$$

$$\mu^{(k)}(1)=0,\ k=1,\dots,N, \qquad /37/$$

$$\varphi^{(N)}(1)=0, \qquad /38/$$

$$H_k=f^{(k)}_{0u^{(k)}}(z^{(k)},v^{(k)})W^{(k)}+\varphi^{(k)}f^{(k)}_{u^{(k)}}(z^{(k)},v^{(k)})W^{(k)}-$$
$$-\frac{\alpha^2}{2}(W^{(k)})^T W^{(k)}. \qquad /39/$$

Условие максимума функций H_k имеет вид принципа максимума Понтрягина:

$$H_k(z^{(k)},v^{(k)}(t),W^{(k)}(t))=\max_{PW^{(k)}+p\le 0} H_k\ (z^{(k)},v^{(k)}(t),W^{(k)}). \qquad /40/$$

Поступила в редакцию 15.2.1970 г.

Литература

1. Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1969.

2. Л.И.Розоноэр, Принцип максимума Л.С.Понтрягина в теории оптимальных систем, Автоматика и телемеханика, 20, № 10 - 12 /1959/.

3. Р.Габасов, О необходимых условиях оптимальности для особых управлений, Известия АН СССР, Техническая кибернетика, №5. 1968.

4. Ю.М.Волин, Г.М.Островский, М.Г.Слинько, Об одном "парадоксе" в задаче об определении оптимальной температурной кривой, Кинетика и катализ, 9, вып. 6. /1968/.

5. Р.В.Гамкрелидзе, О скользящих оптимальных режимах, ДАН СССР, 143, № 6 /1962/.

6. И.Б.Вапнярский, Теорема существования оптимального управления в задаче Больца, некоторые ее применения и необходимые условия оптимальности скользящих и особых режимов, Ж. вычислит. матем. и математич. физики, 7, № 2 /1967/.

7. А.В.Федотов, Ю.М.Волин, Г.М.Островский, М.Г.Слинько, Применение принципа максимума для определения оптимальных условий химических процессов, Теорет. осн. химич. технол., 2, № 1. /1968/.

8. Г.М.Островский, Ю.М.Волин, Об одном методе расчета оптимальных систем. Известия АН СССР, Техническая кибернетика, № 2. 1968.

9. Ю.М.Волин, Г.М.Островский, Принцип максимума для разрывных систем и его применение к задачам с фазовыми ограничениями, Радиофизика /в печати/.

10. Г.М.Островский, В.В.Борисов, Ю.М.Волин, Л.Н.Шумунов, О применении метода квазилинеаризации для расчета оптимальных систем, Радиофизика, 11, № 7 / 1968/.

11. И.А.Крылов, Ф.Л.Черноусько, О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления, Ж. вычислит. матем. и математич. физики, 2, № 6 /1962/.

12. Фан Лянь-Цень, Вань Чу-Сен, Дискретный принцип максимума, Изд-во "Мир", 1967.

13. А.И.Пропой, О принципе максимума для дискретных систем управления, Автоматика и телемеханика, № 7. 1965.

14. Г.М.Островский, Ю.М.Волин, Методы расчета и оптимизации сложных схем, Изд-во "Химия" /в печати/.