Управляемые системы, ИМ;ИК СО АН СССР 1970 г. выпуск 6.
УДК.519.95.

ОДИН МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР КАЧЕСТВА

Е.П.Волокитин, И.А.Красс

Метод построения "полупроницаемых поверхностей", предложенный Р.Айзексом в [1] для исследования дифференциальных игр с непрерывно дифференцируемой во всем пространстве игры функцией платы, не применим к играм качества /играм типа "выиграл - не выиграл"/ потому что функция платы в этом случае существенно разрывна.

Аналог этого метода, предложенный там же, для анализа игр качества, к сожалению, очень часто не позволяет провести исследование игры до конца. Это происходит по двум причинам: во-первых, аналоги "полупроницаемых поверхностей" существуют не во всем пространстве игры, а во-вторых, часто движение по такой "полупроницаемой поверхности" отнюдь не является оптимальной стратегией для обоих игроков.

В данной статье предложен метод, который может быть назван "методом желательных направлений", по идее близкий к методу "желательных направлений" в выпуклом программировании [4] , и который позволяет решить некоторые игры качества.

Леммы и теоремы, доказанные ниже, будут по возможности иллюстрироваться на дифференциальной игре качества "на выживание" двух линейных одномерных математико - экономических моделей. Исследование игр подобного рода /в дискретном варианте такие игры рассматривались в [2] , [3] / представляет и самостоятельный интерес.

§ 1. Определения, основной пример

В данной статье рассматривается дифференциальная игра двух игроков P и E , описываемая уравнениями

$$\dot{z} = f(z, \varphi, \psi), \tag{1}$$

где $z \in Z \subset R_n$ - состояние игры, $\varphi \in R_m$ - управление игрока P, $\psi \in R_m$ - управление игрока E , функция $f(z, \varphi, \psi)$ предполагается непрерывной по всем переменным.

Следуя [1] , мы будем считать, что каждый игрок определяет свою "линию поведения" путем выбора стратегии, то есть выбирает каким-то образом функции $\varphi(z, t)$ и $\psi(z, t)$, которые мы будем считать кусочно-дифференцируемыми функциями[*] по обеим переменным. Кроме того, мы будем считать, что состояние $z \in Z$, где Z называется пространством игры, $\varphi \in \Phi \subset R_m$ - множество управлений игрока P , $\psi \subset \Psi \subset R_m$ - множество управлений игрока E. Предполагается, что Φ и

[*] Функция называется кусочно-дифференцируемой, если она не имеет производной лишь на счетном числе поверхностей.

Ψ - компакты.

Пространство игры ограничивается поверхностью Ω, состоящей из трех частей: Ω_P, Ω_E, Ω_D. Если игра, начатая из состояния $z(t_0)$ за конечный промежуток времени Δt приходит к ситуации $z(t_0+$ $+\Delta t) \in \Omega_P$, то считается, что игру выиграл игрок P, аналогично, если $z(t_0+\Delta t)\in\Omega_E$, то игру выиграл игрок E; если $z(t_0+\Delta t)\in\Omega_D$ то игра оканчивается вничью /то есть $\Omega_P, \Omega_E, \Omega_D$ - терминальные поверхности игры/.

Все поверхности являются кусочно-дифференцируемыми, а те их них, которые имеют размерность $(n-1)$,- односторонними, причем положительное направление нормали то, которое направлено внутрь пространства игры Z /множество Z предполагается телесным/.

Множество единичных нормалей к поверхности Ω_P обозначим $\tilde{N}_P^1$, соответсвенно, конус, порожденный множеством $\tilde{N}_P^1$, обозначим N_P^1 и будем называть конусом нормалей к поверхности Ω_P. Если какое-либо из множеств Ω_P, Ω_E, Ω_D имеет размерность, меньшую, чем $(n-1)$, соответствующий конус нормалей считается пустым.

В дальнейшем мы будем часто говорить о конусе нормалей N к той или иной поверхности, подразумевая конструкцию, приведенную выше. Само пересечение конуса N с единичной сферой будем обозначать $\tilde{N}$. Все конусы, рассматриваемые в работе, таковы, что пересечение их границы с поверхностью единичной сферы в R_n есть параметризуемая кривая в R_n $x = x(t)$, где $t\in[0,1]$, $x(t)\in R_n$, причем $x(0)=x(1)$ Если эту кривую, полученную с помощью конуса N обозначить $P(N)$, то луч, проведенный из вершины конуса в направлении $\nu\in P(N)$ называется образующей конуса.

Выпуклая замкнутая оболочка N_P конуса N_P^1 называется конусом терминальных нормалей игрока P. Аналогично определяются конусы N_E, N_D.

Прежде чем переходить к более сложным определениям и доказательству некоторых утверждений, опишем основной пример - игру J.

Два игрока, P и E, запасы которых обозначим через $x(t)\geqslant 0$ и $y(t)\geqslant 0$, соответственно, вступают в конфликтное взаимодействие, в котором целью каждого из игроков является полное уничтожение ресурсов противника. Известно, что при отсутствии взаимодействия игроки пополняют свои запасы с помощью производства, протекающего по экспоненциальному закону:

$$\dot{x} = \alpha x, \quad \dot{y} = \beta y,$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$. В каждый момент времени игрок P, которому известны лишь текущие значения величин x и y, делит свои запасы x на две части: выделяет часть φx для нападения на противника, а $(1-\varphi)x$ оставляет для пополнения запасов с помощью производства $(0\leqslant \varphi\leqslant 1)$. Аналогично поступает игрок E /которому также известны лишь величины x и y в данный момент времени/,деля свои запасы на части ψy и $(1-\psi)y$ $(0\leqslant\psi\leqslant 1)$. Далее, вмешательство игрока

$P(E)$ позволяет ему снизить темп производства запасов противника на величину, пропорциональную количеству запасов φx (ψy), выделенных для нападения. Таким образом,

$$\dot{x} = \alpha(1-\varphi)x - \sigma_2 \psi y, \qquad /2/$$
$$\dot{y} = \beta(1-\psi)y - \sigma_1 \varphi x,$$

где коэффициенты σ_1, σ_2 $(= const, \sigma_1 > 0,\ \sigma_2 > 0)$ можно рассматривать как меру эффективности оружия соответствующей стороны.

В данном случае $Z = R_2^+$, $\Phi = \Psi = [0,1]$. Терминальной поверхностью Ω служит граница положительного квадранта, при этом Ω_P есть строго положительная часть оси Ox, Ω_E - строго положительная часть оси Oy. Множество Ω_D состоит из единственной точки O - начала координат, в связи с чем множество $\tilde{N}_D^1$ пусто. Кроме того, заметим, что множество $\tilde{N}_P^1$ в данном случае содержит единственную нормаль $\nu_P = (0,1)$, множество $\tilde{N}_E^1$ - единственную нормаль $\nu_E = (1;0)$.

§ 2. Существование непроигрышных стратегий.

Будем предполагать, что для $z \in \Omega_P$ выполняется

$$\min_{\nu \in \tilde{N}_P} \min_{\varphi} \max_{\psi} (\nu, f(z,\varphi,\psi)) < 0, \qquad /3/$$

где $(\nu, f(z,\varphi,\psi))$ - скалярное произведение соответствующих векторов. Это условие является обобщением определения допустимой области [1], то есть области на терминальной поверхности, обладающей тем свойством, что игрок P имеет возможность окончить игру, начатую из точек, достаточно близких к ней.

Аналогично,

$$\min_{\nu \in \tilde{N}_E} \min_{\psi} \max_{\varphi} (\nu, f(z,\varphi,\psi)) < 0 \qquad /4/$$

для всех $z \in \Omega_E$.

В случае игры $\mathcal{J}$ неравенства /3/ и /4/ сводятся соответсвенно к $-\sigma_1 x < 0$ и $-\sigma_2 y < 0$, то есть $x > 0$, $y > 0$.

Определение 1. ε - активной зоной игрока P называется множество $A_P(\varepsilon) \subset Z$ такое, что $A_P(\varepsilon) \cap \Omega_P \neq \emptyset$ и для любой точки $z \in A_P(\varepsilon)$ выполняется

$$\min_{\nu \in \tilde{N}_P} \min_{\varphi} \max_{\psi} (\nu, f(z,\varphi,\psi)) \leq -\varepsilon < 0, \qquad /5/$$

Ввиду непрерывности функции $\delta(z) = \min_{\nu \in \tilde{N}_P} \min_{\varphi} \max_{\psi} (\nu, f)$ /что следует из непрерывности функции $f(z,\varphi,\psi)$ и компактности множеств $\tilde{N}_P$, Φ, Ψ / легко видеть, что ε - активные зоны существуют. Более того, имеет место включение $A_P = \bigcup_{\varepsilon > 0} A_P(\varepsilon) \supset \Omega_P$. Аналогично определяются множества $A_E(\varepsilon)$ и A_E.

В случае игры $\mathcal{J}$ непосредственно подсчитываем

$$A_P(\varepsilon) = \{(x,y) \in R_2^+ / \beta y - \sigma_1 x \leq -\varepsilon\},$$
$$A_E(\varepsilon) = \{(x,y) \in R_2^+ / \alpha x - \sigma_2 y \leq -\varepsilon\},$$

$$A_P=\{(x,y)\in R_2^+ / \beta y-\sigma_1 x<0\},$$
$$A_E=\{(x,y)\in R_2^+ / \alpha x-\sigma_2 y<0\}.$$

О п р е д е л е н и е 2. Пусть N - конус в пространстве R_n. Будем называть $\mathcal{E}$ - окрестностью $N(\mathcal{E})$ конуса N конус:

$$N(\mathcal{E})=\{\nu\in R_n / \max_{\nu_1\in\tilde{N}}(\frac{\nu}{\|\nu\|},\nu_1)\geqslant\mathcal{E}\}. \qquad /6/$$

Множество $N+\{Z_0\}=\{z/z=z_1+z_0,z_1\in N\}$ будем называть конусом N с вершиной в точке Z_0, а $[N+\{z_0\}]=(N+\{z_0\})\setminus\{z_0\}$ тупым конусом N с вершиной в точке z_0.

Л е м м а 1. Пусть для всех $t\in[t_0,t_1]$ существуют стратегии $\varphi(z,t)$, $\psi(z,t)$ игроков такие, что $f[z(t),\varphi(z(t),t),\psi(z(t),t)]\in N$

где
$$z(t)=z(t_0)+\int_{t_0}^{t}f(z,\varphi(z,t),\psi(z,t))dt$$

а N - некоторый выпуклый замкнутый конус в R_n. Тогда $z(t)\in N+\{z_0\}$ для всех $t\in[t_0,t_1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольную сумму Римана интеграла

$$\int_{t_0}^{t}f(z,\varphi,\psi)dt,$$

которая имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}f[z(t_i),\varphi(z(t_i),t_i),\psi(z(t_i),t_i)]\Delta t_i=r_n.$$

Так как

$$f[z(t_i),\varphi(z(t_i),t_i),\psi(z(t_i),t_i)]\in N$$

и конус N выпуклый, получаем, что $r_n\in N$. Но

$$\int_{t_0}^{t}f(z,\varphi,\psi)dt=\lim_{n\to\infty}r_n,$$

когда $\max\Delta t_i\to 0$, и ввиду замкнутости конуса N имеем

$$\int_{t_0}^{t}f(z,\varphi,\psi)dt\in N \quad \text{или} \quad z(t)-z_0\in N$$

ч.т.д.

Т е о р е м а 1. Пусть существует $\mathcal{E}>0$ такое, что

$$[-N_P(\mathcal{E})+\{z_0\}]\subset \mathring{A}_P(\mathcal{E})\cup(R_n\setminus Z), \qquad /7/$$

и пусть $z_0=z(t_0)\in A_P(\mathcal{E}_1)$ для некоторого $\mathcal{E}_1>\mathcal{E}$. Тогда у игрока P существует стратегия $\tilde{\varphi}$ такая, что траектория игры не выходит из $\mathcal{E}$ - активной зоны игрока P при любой стратегии игрока E.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения следует, что условие $z(t_0)\in A_P(\mathcal{E}_1)$ равносильно существованию $\varphi_0\in\Phi$, для которого

$$\min_{\nu\in\tilde{N}_P}(\nu,f[z(t_0),\varphi_0,\psi])\leqslant-\mathcal{E}_1$$

для любого $\varphi \in \Psi$, или

$$\max_{\nu \in \bar{N}_\rho} (\nu, -f[z(t_0), \varphi_0, \psi]) \geqslant \varepsilon_1$$

то есть $-f[z(t_0), \varphi_0, \psi] \in N_\rho(\varepsilon_1)$.

Исходя из определения, $N_\rho(\varepsilon_1) \subset \mathring{N}_\rho(\varepsilon)$, поэтому, ввиду компактности Ψ, существует $\Delta t > 0$ такое, что при любой стратегии $\psi(z, t)$ игрока E выполняется $-f[z(t), \varphi_0, \psi(z(t), t)] \in N_\rho(\varepsilon)$ для любого $t \in [t_0, t_0 + \Delta t_0] = [t_0, t_1]$.

На основе леммы получаем:

$$z(t_1) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} f[z(t), \varphi_0, \psi(z(t), t)]dt \in -N_\rho(\varepsilon) + \{z_0\}.$$

Отсюда, ввиду /7/,

$$z(t_1) \in \mathring{A}_\rho(\varepsilon) \cup \overline{(R_n \setminus Z)}. \qquad /8/$$

Из /8/ следует, что либо $z(t_1) \in R_n \setminus Z$, и тогда игра закончена, либо $z(t_1) \in A_\rho(\varepsilon)$, а тогда существует шар $U(r, z(t_1)) \in \mathring{A}_\rho(\varepsilon)$ радиуса r с центром в точке $z(t_1)$, такой, что для любого $z \in U(r, z(t_1))$ существует $\bar{\varphi}(z) \in \Phi$, для которой

$$-f(z, \bar{\varphi}(z), \psi) \in N_\rho(\varepsilon) \qquad /9/$$

при любом $\psi \in \Psi$. Рассуждая, как и выше, находим $\Delta t_1 > 0$, такое что $z(t) \in [-N_\rho(\varepsilon) + \{z_0\}]$ для всех $t \in [t_1, t_1 + \Delta t_1] = [t_1, t_2]$. Или, ввиду /7/, $z(t_2) \in A_\rho(\varepsilon) \cup \overline{(R_n \setminus Z)}$.

Продолжая этот процесс, по индукции строим последовательность $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$. Если $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = +\infty$, то теорема доказана, если же $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = t_\omega$, то для любого n имеем:

$$z(t_n) \in -N_\rho(\varepsilon) + \{z_0\}.$$

Отсюда, ввиду замкнутости $-N_\rho(\varepsilon) + \{z_0\}$, заключаем, что $z(t_\omega) \in -N_\rho(\varepsilon) + \{z_0\}$ и, как и выше, устанавливаем существование $\Delta t_{\omega+1} > 0$ такого, что $z(t) \in -N_\rho(\varepsilon) + \{z_0\}$ для всех $t \in [t_\omega, t_\omega + \Delta t_{\omega+1}]$. Переходя к трансфинитной индукции, получаем нужное утверждение, причем искомая стратегия $\bar{\varphi}$ определяется так: $\bar{\varphi} = \varphi_0$, для $t \in [t_0, t_0 + \Delta t_0]$, $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(z)$ для $t > t_1$ /см. /9//.

С л е д с т в и е 1. Из доказательства следует, что в условиях теоремы $z(t) \in -N_\rho(\varepsilon) + \{z_0\}$ при всех t, если игрок P выбирает стратегию $\bar{\varphi}$.

С л е д с т в и е 2. Если $A_\rho(\varepsilon) \cap (\Omega_E \cup \Omega_D) = \emptyset$, то тогда выбор стратегии $\bar{\varphi}$ обеспечивает игроку P либо победу, либо дает возможность продолжить игру неограниченно долго.

В случае игры $\mathfrak{I}$, как уже отмечалось,

$$A_\rho(\varepsilon) = \{(x, y) \in R_2^+ / \beta y - \sigma_1 x \leqslant -\varepsilon\},$$

$$N_p(\varepsilon)=\{(x,y)\in R_2^+ / \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \geqslant \varepsilon\}.$$

На рис. I прямая AB есть $\beta y-\sigma_1 x=-\varepsilon$. Угол δ_1 таков, что $tg\,\delta_1=\frac{\sigma_1}{\beta}$. Угол δ_2 таков, что $\cos\delta_2 \geqslant \varepsilon$.

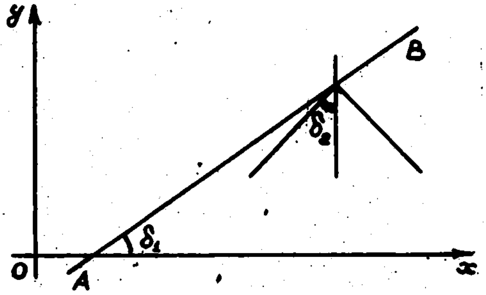

Рис. I.

Условие /7/ теоремы обеспечивается при выполнении неравенства

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\sigma_1\right) \leqslant \cos\delta_2,$$

или

$$\frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2+\beta^2}} < \varepsilon \leqslant \cos\delta_2.$$

При этом, если точка $z_0\in A_p(\varepsilon_1)$, где $\varepsilon_1<\varepsilon$, то у игрока P существует непроигрышная стратегия $\bar{\varphi}$.

Основной недостаток теоремы I заключается в том, что если $A_p(\varepsilon)\cap \cap\Omega_E \neq \phi$ в игре $\mathcal{J}$ не имеет места, то даже при выполнении всех условий теоремы игрок E может выиграть. Кроме того, теорема I не дает возможности исследовать начальные состояния, если $z_0 \notin A_p(\varepsilon_1)$.

Поэтому мы вместо конусов $N_p(\varepsilon)$ введем конусы желательных направлений N_p^*. Пусть $\nu\in R_n$, $\|\nu\|=1$, $z_0\in R_n$; луч проведенный из точки z_0 в направлении $-\nu$, обозначим $\Lambda(\nu,z_0)$,

$$\Lambda(\nu,z_0)=\{z / z=z_0-\nu t,\ t\geqslant 0\}.$$

Определение 3. Пусть $z_0\in Z$, конус желательных направлений игрока P в точке z_0 есть

$$N_p^*(z_0)=\{\nu / \Lambda(\tfrac{\nu}{\|\nu\|}, z_0)\cap\Omega_p\neq\phi\}. \qquad /10/$$

Аналогично вводятся конусы N_E^* и N_D^*. Ввиду выпуклости Ω_p, Ω_E, Ω_D, введенные конусы тоже выпуклые.

Лемма 2. Имеет место включение $N_p^*\subset N_p(0)$.

Доказательство. Пусть $\nu\in N_p^*$, тогда $\Lambda(\frac{\nu}{\|\nu\|}, z_0)\cap \cap\Omega_p\neq\phi$. Пусть $z_1\in\Lambda(\frac{\nu}{\|\nu\|}, z_0)\cap\Omega_p$ и ν_1 - нормаль в точке z_1 к поверхности Ω_p. Тогда, очевидно, $(\frac{\nu}{\|\nu\|}, \nu_1)\geqslant 0$ / ν_1 - направлена внутрь области Z /. Отсюда $max(\frac{\nu}{\|\nu\|}, \nu_1)\geqslant 0$, то есть $\frac{\nu}{\|\nu\|}\in N_p(0)$, что и требовалось доказать.

О строении множеств $N_p^*(z)$ при различных z говорят

Лемма 3. Пусть $z_1\in(-N_p^*(z_0)+\{z_0\})\cap Z$, тогда $N_p^*(z_1)\supset N_p^*(z_0)$.

Доказательство. Пусть $\nu\in N_p^*(z_0)$. Рассмотрим луч $L_1=\Lambda(\nu, z_1)$. Этот луч не пересекает образующих конуса $-N_p^*(z_0)+\{z_0\}$. Действительно, предположим противное, и пусть луч L_1 пересекает

образующую L_2 конуса $-N_p^*(z_0)+\{z_0\}$. Проведем через L_1 и L_2 двумерную плоскость. Тогда в этой плоскости лежит луч $L_3=\Lambda(\nu, z_0)$, параллельный L_1 и исходящий из вершины z_0.

Очевидно, что луч L_3 и точка z_1 лежат в разных полуплоскостях, на которые разбивается данная плоскость прямой, проведенной через луч L_2 /то есть по разные стороны от образующей L_2 /. Так как $z_1\in(-N_p^*(z_0)+\{z_0\})\cap Z$, то $z_1-z_0\in -N_p^*(z_0)$, то есть луч $L_4=\Lambda\left(\frac{z_1-z_0}{\|z_1-z_0\|}, z_0\right)$ также лежит в конусе $-N_p^*(z_0)$/. Если лучи L_3, L_4 лежат в одной грани, то $\nu\in N_p^*(z_1)$, то есть утверждение леммы справедливо; если же L_3 и L_4 не лежат в одной грани, то они лежат по разные стороны образующей L_2, что противоречит выпуклости конуса $N_p^*(z_0)$.

Итак,

$$\Lambda(\nu, z_1)\cap Z\subset(-N_p^*(z_0)+\{z_0\})\cap Z .$$

Границей компакта $(-N_p^*(z_0)+\{z_0\})\cap Z$ является поверхность, составленная из образующих конуса $-N_p^*(z_0)+\{z_0\}$ и Ω_p. Так как луч $\Lambda(\nu, z_1)$ не пересекает образующих конуса, то $\Lambda(\nu,z_1)\cap\Omega_p\neq\emptyset$, то есть $\nu\in N_p^*(z_1)$, что и требовалось доказать.

В случае игры $\mathcal{J}$ соответствующая геометрическая картина имеет вид /см. рис. 2/:

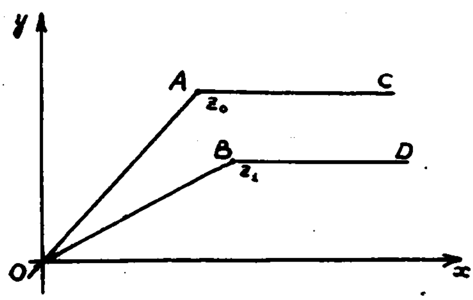

Рис. 2.

$\sphericalangle OAC$ есть конус $-N_p^*(z_0)+\{z_0\}$

$\sphericalangle OBD$ есть конус $-N_p^*(z_1)+\{z_1\}$

Лемма утверждает, что $\sphericalangle OAC > \sphericalangle OBD$.

Ниже будем предполагать, что при всех $z\in Z$ конусы $N_p^*(z)$, $N_E^*(z)$, $N_D^*(z)$ попарно не пересекаются. /Очевидно, что требование попарного непересечения терминальных поверхностей Ω_p, Ω_E, Ω_D является необходимым условием, при котором выполняется это предположение/.

Т е о р е м а 2. Если траектория $z(t)$ такова, что в каждый момент времени $\dot z(t)\in -N_p^*(z(t))$, то эта траектория не может окончиться в точке $\bar z\in\Omega_E\cup\Omega_D$; кроме того, выполняется соотношение $z(t)\in(-N_p^*(z(t_0))+\{z(t_0)\}\cap Z$ для всех t.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, если в некоторый момент времени $\bar t$ $z(\bar t)=\bar z\in\Omega_E\cup\Omega_D$, то $\dot z(\bar t)\notin -N_p^*(\bar z)$ /непосредственно по определению конуса $N_p^*(z)$ /, а это противоречит условию теоремы. Это рассуждение доказывает первую часть теоремы.

Для доказательства второй части теоремы предположим противное, то есть существует $t_1>t_0$, такое что $z(t_1)\notin(-N_p^*(z(t_0))+\{z(t_0)\}$.

Тогда должен существовать момент $t_2 > t_0$ такой, что $z(t_2) \in (-N_\rho^*(z(t_0)) + \{z(t_0)\})$ и луч $L = \Lambda\left(\frac{\dot z(t_2)}{\|\dot z(t_2)\|}, z(t_2)\right)$ пересекает образующую L_1 конуса $-N_\rho^*(z(t_0))$ в точке, не лежащей на поверхности $\mathcal{P}_\rho$. В противном случае рассуждения аналогичные приведенным в первой части теоремы, показывают, что $z(t) \in (-N_\rho^*(z(t_0)) + \{z(t_0)\})$.

Так как по условию, $-\frac{\dot z(t_2)}{\|\dot z(t_2)\|} \in N_\rho^*(z(t_2))$, то пересечение $L \cap \mathcal{P}_\rho$ не пусто, и поэтому существует точка z, лежащая в этом пересечении. Так как $z \in \mathcal{P}_\rho$, то существует направление ν_2 такое, что $z \in \Lambda(\nu_2, z(t_0)) \cap \mathcal{P}_\rho$. Очевидно, что через лучи L, L_1, $L_2 = \Lambda(\nu_2, z(t_0))$ можно провести двумерную плоскость π, причем $z(t_0) \in \pi, z(t_2) \in \pi$.

По предположению, $z(t_2) \in (-N_\rho^*(z(t_0)) + \{z(t_0)\})$ и поэтому луч

$$L_3 = \Lambda\left(\frac{z(t_2) - z(t_0)}{\|z(t_2) - z(t_0)\|}, z(t_0)\right) \subset \left(-N_\rho^*(z(t_0)) + \{z(t_0)\}\right)$$

проходит через точку $z(t_2)$, так как $z(t_0) \in L_3$, то $L_3 \in \pi$. Мы получаем такую же ситуацию, как и в лемме 3. То есть момента $t_1 > t_0$ такого, что $z(t_1) \notin (-N_\rho^*(z(t_0)) + \{z(t_0)\})$ не существует, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. I. Допустим, что в ходе некоторой партии игрок P в каждый момент времени в состоянии выбрать управление $\bar\varphi \in \Phi$ таким образом, что

$$-f(z, \bar\varphi, \psi) \in N_\rho^*(z) \quad \forall \psi \in \Psi. \qquad /11/$$

Тогда эта партия может закончиться лишь выигрышем игрока P.

З а м е ч а н и е 2. Если предположить, что все терминальное множество $\mathcal{P}_\rho$ является допустимой областью в смысле Айзекса /см.[I]/, то есть в любой точке $z \in \mathcal{P}_\rho$ справедливо неравенство

$$\min_\varphi \max_\psi (\nu(z), f(z, \varphi, \psi)) < -\varepsilon < 0,$$

где $\nu(z)$ - вектор нормали к $\mathcal{P}_\rho$ в точке z, направленной внутрь Z, то из соображений непрерывности можно утверждать, что найдется окрестность $G \subset Z$ поверхности $\mathcal{P}_\rho$, в каждой точке которой игрок P может добиться выполнения условия /11/.

З а м е ч а н и е 3. Аналогичные рассуждения применимы к игроку E.

Для случая рассматриваемой игры конус $-N_\rho^*(z) + \{z\}$ изображен на рис. 3. Здесь $\nu \in -N_\rho^*(z)$, если

$$(\nu, \nu_\rho) < 0, \ (\nu, \nu_E) \geqslant 0$$

или

$$\left(\frac{\nu}{\|\nu\|}, \nu_\rho\right) < \cos\delta(z),$$

где

$$\cos\delta(z) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

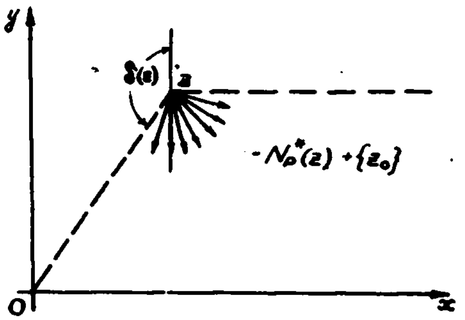

Рис. 3.

Найдем множество O_p, в каждой точке которого игрок P имеет возможность обеспечить выполнение условия /II/.

Имеем:

$$\min_{\varphi}(\nu_p, f(z,\varphi,\psi)) = \min_{\varphi}\{\beta(1-\psi)y - \sigma_1\varphi x\} = (\nu_p, f(z,\overline{\varphi},\psi)) = \beta(1-\psi)y - \sigma_1 x,$$

где $\overline{\varphi} = 1$. Тогда $f(z,\overline{\varphi},\psi) \in -N_p^*(z)$, если справедливо одно из условий:

$$(\nu_p, f(z,\overline{\varphi},\psi)) < 0, \ (\nu_E, f(z,\overline{\varphi},\psi)) \geqslant 0 \ \ \forall\psi \qquad /12/$$

или же

$$\left(\nu_p, \ \frac{f(z,\overline{\varphi},\psi)}{\|f(z,\overline{\varphi},\psi)\|}\right) < \cos\delta(z) \ \ \forall\psi, \qquad /13/$$

то есть

$$\beta(1-\psi)y - \sigma_1 x < 0, \ -\sigma_2\psi y \geqslant 0 \ \ \forall\psi, \qquad /12'/$$

или

$$\frac{\beta(1-\psi)y - \sigma_1 x}{\sqrt{[\sigma_2\psi y]^2 + [\beta(1-\psi)y - \sigma_1 x]^2}} < -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \ \forall\psi. \qquad /13'/$$

Мы видим, что условие /12/ не выполняется при $y \neq 0$, следовательно, множество O_p должно определяться условием /13/.

Если обозначить через $F(\psi)$ левую часть неравенства /13'/, то это неравенство можно переписать в виде:

$$\max_{\psi\in[0,1]} F(\psi) < -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad /13''/$$

Нетрудно показать, что $F(\psi)$ при $\beta y - \sigma_1 x \neq 0$ не имеет точек экстремума внутри отрезка $[0,1]$, а значит $F(\psi)$ достигает своего максимума на концах этого отрезка.

$$F(0) = \frac{\beta y - \sigma_1 x}{|\beta y - \sigma_1 x|},$$

$$F(1) = \frac{-\sigma_1 x}{\sqrt{\sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2 y^2}} \geqslant -1,$$

При $\beta y - \sigma_1 x > 0$ $F(0) = 1$, а условие /13"/ записывается в виде

$$1 < -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

что неверно, то есть в этом случае условия теоремы не выполняются.

Если же $\beta y - \sigma_1 x < 0$, то $F(0) = -1 \leqslant F(1)$, а условие /13"/ принимает вид

$$-\frac{\sigma_1 x}{\sqrt{\sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2 y^2}} < -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

откуда $\sqrt{\sigma_2}\, y < \sqrt{\sigma_1}\, x$.

Таким образом, мы получаем, что игрок P , применяя стратегию $\tilde{\varphi}(t) \equiv 1$, обеспечивает движение из точки z в желательном для него направления, если $z \in O_P = \{z \in R_2^+ / \beta y - \sigma_1 x < 0,\ \sqrt{\sigma_2}\, y - \sqrt{\sigma_1}\, x < 0\}$.

Мы видим, что решение данной игры зависит от соотношения между параметрами α, β , σ_1 , σ_2 . Будем считать, что имеет место условие

$$\alpha > \beta, \quad \beta^2 > \sigma_1 \sigma_2 . \qquad /14/$$

откуда, в частности, следует, что $\alpha\beta > \sigma_1\sigma_2$. Выполнение этих неравенств дает взаиморасположение лучей, указанное на рис. 4. Таким образом,

$$O_P = \{z \in R_2^+ / \beta y - \sigma_1 x < 0\} .$$

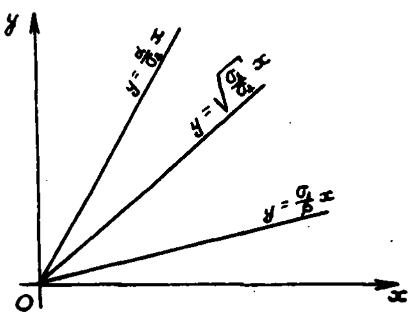

Рис. 4.

Далее, из второй части теоремы 2 следует, что применение игроком P стратегии $\tilde{\varphi}(t) \equiv 1$ не выводит точку z из множества O_P . Кроме того, нетрудно показать, что такая партия оканчивается за конечное время, и, следовательно, на основании замечания I к теореме 2 мы можем утверждать, что партия, начатая из точек множества O_P заканчивается выигрышем игрока P , для чего ему достаточно применять стратегию $\tilde{\varphi}(t) \equiv 1$.

Аналогично можно показать, что вследствие /14/ множество $O_E = \{z \in R_2^+ / \alpha x - \sigma_2 y > 0\}$ обладает тем свойством, что партия, начатая из точек $z \in O_E$, при любом поведении P оканчивается победой игрока E , для чего последнему достаточно применять стратегию $\tilde{\psi}(t) \equiv 1$.

§ 3. "Сужение" пространства игры

Пусть при рассмотрении дифференциальной игры качества $\mathcal{J}$, заданной в пространстве игры Z , ограниченном терминальной поверхностью $\Omega = \Omega_P \bigcup \Omega_E \bigcup \Omega_D$, нам каким-либо образом удалось выделить множество $O_P \subset Z$, имеющее Ω_P в качестве части своей границы и обладающее тем свойством, что игрок P при любом поведении противника E в состоянии выиграть партию, начатую в точке $z \in O_P$.

Допустим, мы можем выделить также множество O_E , имеющее Ω_E частью своей границы и обладающее аналогичными свойствами, с точки зрения игрока E [x].

Тогда естественно рассматривать первоначально заданную игру лишь в части пространства Z , а именно в пространстве игры $Z' = Z \setminus (O_P \bigcup O_E)$ с терминальной поверхностью $\Omega' = \Omega'_P \bigcup \Omega'_E \bigcup \Omega_D$, где в качестве

[x] См. по этому поводу замечания I, 2, 3 к теореме 2.

соответствующих терминальных множеств берутся поверхности, отделяющие множества O_p и O_E от пространства Z.

Может случиться, что в полученной игре $\mathcal{J}$ мы вновь сумеем выделить подобные множества O'_p, O'_E, что позволит нам "сузить" уже пространство Z' игры $\mathcal{J}$. И т.д.

Если этот процесс даст нам возможность исчерпать все пространство Z, то тем самым мы, очевидно, получим решение первоначально заданной игры качества $\mathcal{J}$ /Описанный процесс сужения пространства игры применим лишь в том случае, когда множества O_p, O_E, O'_p, O'_E, ... оказываются замкнутыми. Если же эти множества незамкнуты, то в каждом случае надо выяснить свойства их границ/.

Приемы подобного рода применялись для решения задач в [1], [2], [3].

В рассматриваемом нами примере в качестве множеств O_p и O_E можно взять конусы O_p и O_E, найденные в конце предыдущего параграфа на основании теоремы 2. Новыми терминальными поверхностями $\mathcal{R}'_p$ и $\mathcal{R}'_E$ в данном случае будут лучи $y=\frac{\sigma_1}{\beta}x, x>0$ и $y=\frac{\alpha}{\sigma_2}x$, $x>0$, соответственно. Конусы O_p и O_E являются незамкнутыми. Однако нетрудно показать, что если $z\in\mathcal{R}'_p$, то применение игроком P управления $\bar{\varphi}=0$ дает ему возможность сместить точку z внутрь конуса O_p независимо от выбора управления $\psi\in[0,1]$ противником. Роль луча $\mathcal{R}'_E$ будет выяснена позднее. Поэтому мы можем рассматривать нашу игру, задаваемую уравнениями /2/, лишь в части Z' пространства R_2^+

$$Z'=\{z\in R_2^+ / \beta y-\sigma_1 x\geqslant 0\}.$$

При отыскании множеств O'_p, O'_E, .. мы будем опираться на следующую лемму.

Лемма 4. Пусть в каждой точке z области $O_p\subset Z$ выполнены следующие условия:

1/ $z\in O_p$ единственным образом представима в виде:

$$z=s(z)+\tau(z)\nu_p(s,z),\quad \tau(z)\geqslant 0,$$

и в виде

$$z=r(z)+\gamma(z)\nu_E(s,z),\quad \gamma(z)\geqslant 0,$$

где $s(z)\in\mathcal{R}_p$, $r(z)\in\mathcal{R}_E$, $\nu_p(s,r)$, $\nu_E(r,z)$ – нормали к $\mathcal{R}_p$ и $\mathcal{R}_E$ в точках s и r, соответственно, произвольной, но постоянной, отличной от нуля длины, направленные внутрь Z;

2/ $$\min_{\varphi}\max_{\psi}(\nu_p(s,z),f(z,\varphi,\psi))=(\nu_p(s,z),f(z,\bar{\varphi},\bar{\psi}))\leqslant-\varepsilon<0,$$
$$(\nu_E(r,z),f(z,\bar{\varphi},\psi))\geqslant 0,\quad \forall\psi\in\Psi.$$

Тогда траектория, начатая внутри O_p и целиком проходящая в O_p, оканчивается на $\mathcal{R}_p$ при соответствующем поведении игрока P.

Доказательство.

$$z(t)=s(z)+\tau(z)\nu_p(s,z).$$

Дифференцируя по времени, получаем

$$\dot z = \dot s + \dot\tau \nu_p + \tau \dot\nu_p ,$$

откуда

$$(\nu_p,\dot z) = (\nu_p,\dot s) + \dot\tau \nu_p^2 + \tau(\nu_p,\dot\nu_p).$$

/здесь $\dot\lambda = \dot\lambda(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\lambda}{\partial z_i}\dot z_i$ /. Но $(\nu_p,\dot s)=0$, так как ν_p – нормаль к Ω_p, а $\dot s$ лежит в касательной плоскости к Ω_p, $\nu_p^2 = \|\nu_p\|^2 = const > 0$, а $(\nu_p,\dot\nu_p) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nu_p\|^2 = 0$. И получаем

$$(\nu_p,\dot z) = \dot\tau\|\nu_p\|^2,$$

то есть

$$\dot\tau = \frac{(\nu_p,\dot z)}{\|\nu_p\|^2}.$$

В силу первой части условия 2/ леммы, игрок P, выбирая в каждый момент времени управление $\bar\varphi$, может добиться того, что

$$\dot\tau \leqslant -\frac{\varepsilon}{\|\nu_p\|^2} = -\varepsilon_1 < 0,$$

откуда мы видим, что величина $\tau(z)$ убывает с ненулевой скоростью и за конечное время обратится в нуль. При этом, в силу второй части условия 2/, величина $\gamma(z)$ не убывает, то есть z не приближается к Ω_E. Таким образом, рассматриваемая траектория действительно оканчивается за конечное время $\Delta t \leqslant \frac{\tau(z_0)}{\varepsilon_1}$ на Ω_P. Лемма доказана.

Вернемся к исследуемому примеру. Мы выяснили, что нам достаточно рассмотреть игру в пространстве $Z' = \{z\in R_2^+ / \beta y - \sigma_1 x \geqslant 0\}$, ограниченном терминальной поверхностью $\Omega' = \Omega'_P \cup \Omega_E \cup \Omega_D$, где Ω'_P есть луч $y = \frac{\sigma_1}{\beta}x$, $x>0$. Нормали, о которых говорится в лемме, есть $\nu'_P = (-\sigma_1,\beta)$, $\nu_E = (1,0)$, и условие 1/ леммы, очевидно, выполняется всюду в Z'. Далее,

$$(\nu'_P, f(z,\varphi,\psi)) = \beta^2 y - \alpha\sigma_1 x + \varphi(\alpha-\beta)\sigma_1 x - \psi(\beta^2-\sigma_1\sigma_2)y$$

$$\min_\varphi \max_\psi (\nu'_P, f(z,\varphi,\psi)) = \beta^2 y - \alpha\sigma_1 x,\ \bar\varphi = 0,\ \bar\psi = 0,$$

так как $\alpha>\beta$, $\beta^2 > \sigma_1\sigma_2$.

$$(\nu_E, f(z,\bar\varphi,\psi)) = \alpha x - \sigma_2\psi y \geqslant \alpha x - \sigma_2 y.$$

Рассмотрим множество

$$O'_P = \{z\in R_2^+ / \beta^2 y - \alpha\sigma_1 x < 0,\ \alpha x - \sigma_2 y \geqslant 0\} = \{z\in R_2^+ / \beta^2 y - \alpha\sigma_1 x < 0\}.$$

Оказывается, что если начальная точка z_0 такова, что $\beta^2 y_0 - \alpha\sigma_1 x_0 \leqslant -\varepsilon < 0$, то применение игроком P стратегии $\bar\varphi(t) \equiv 0$ приведет к тому, что $\beta^2 y - \alpha\sigma_1 x \leqslant -\varepsilon$ во все моменты времени, откуда на основе леммы, мы можем утверждать, что игрок P в состоянии выиграть партию, начатую из любой точки множества O'_P, применяя стратегию $\bar\varphi(t) \equiv 0$. Кроме того, можно показать, что если партия начинается в точке z_0, где $\beta^2 y_0 - \alpha\sigma_1 x_0 = 0$, то по - прежнему, придер-

живаясь стратегии $\bar{\varphi}(t) \equiv 0$, игрок P выигрывает эту партию.

Таким образом, достаточно рассматривать игру уже в пространстве

$$Z'' = \{z \in R_2^+ / \beta^2 y - \alpha \sigma_1 x \geqslant 0\},$$

где Ω_p'' есть луч $y = \frac{\alpha}{\beta}\frac{\sigma_1}{\beta} x$, $x > 0$.

Далее, $\nu_p'' = (-\alpha\sigma_1, \beta^2)$ – вектор нормали к Ω_p'', направленный внутрь Z''.

$$(\nu_p'', f(z, \varphi, \psi)) = -\alpha^2\sigma_1 x + \beta^3 y + \varphi(\alpha^2 - \beta^2)\sigma_1 x + \psi(\alpha\sigma_1\sigma_2 - \beta^3) y.$$

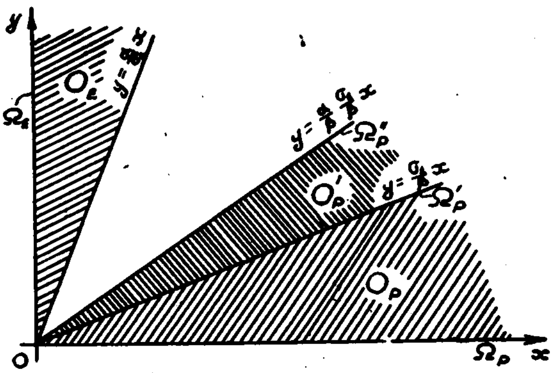

Рис. 5.

$$\min_{\varphi} \max_{\psi} (\nu_p'', f(z, \varphi, \psi)) = \begin{cases} \beta^3 y - \alpha\sigma_1 x, \ \bar{\varphi} = 0, \ \bar{\psi} = 0 & \text{при} \quad \beta^3 > \alpha\sigma_1\sigma_2 \\ \alpha\sigma_1(\sigma_2 y - \alpha x), \ \bar{\varphi} = 0, \bar{\psi} = 1 & \text{при} \quad \beta^3 \leqslant \alpha\sigma_1\sigma_2 \end{cases}$$

Пусть $\beta^3 > \alpha\sigma_1\sigma_2$. Тогда множество

$$O_p'' = \{z \in R_2^+ / \beta^3 y - \alpha^2\sigma_1 x \leqslant 0, \ \alpha x - \sigma_2 y \geqslant 0\}$$

обладает теми же свойствами, что и множество O_p'. Если же $\beta^3 \leqslant \alpha\sigma_1\sigma_2$, то подобными свойствами обладает множество

$$\tilde{O}_p'' = \{z \in R_2^+ / \alpha x - \sigma_2 y > 0\}.$$

И вообще, при выполнении условия $\beta^{k+1} > \alpha^{k-1}\sigma_1\sigma_2$

$$O_p^{(k)} = \{z \in R_2^+ / \beta^{k+1} y - \alpha^k \sigma_1 x \leqslant 0\}.$$

Как только это условие нарушается, то есть $\beta^{k+1} \leqslant \alpha^{k-1}\sigma_1\sigma_2$ /что должно произойти при достаточно больших k, так как $\alpha > \beta$ /, мы получим, что $O_p^{(k)} = \{z \in R_2^+ / \alpha x - \sigma_2 y > 0\}$.

Учитывая тот факт, что $O_E = \{z \in R_2^+ / \alpha x - \sigma_2 y < 0\}$, получаем окончательно, что мы в состоянии предсказать исход партии, начатой в любой точке $z \in Z = R_2^+$, кроме точек луча $y = \frac{\alpha}{\sigma_2} x$, $x > 0$, который обозначим через B.

Выясним роль луча B. Пусть $z_0 = (x_0, y_0) \in B$ и $\varphi = 0, \psi = 1$. Тогда $\dot{x} = \dot{y} = 0$, то есть применение стратегий $\bar{\varphi} \equiv 0$, $\bar{\psi} \equiv 1$ игроками P и E соответственно позволяет им оставаться в точке z_0 неограниченно долго. Отказ же игроком P от стратегии $\bar{\varphi} \equiv 0$ повлечет за собой смещение фазовой точки внутрь O_E, то есть в область возможного выигрыша E. Отказ игроком E от стратегии $\bar{\psi} \equiv 1$ влечет за собой его проигрыш при соответствующем поведении P. /В [1] луч,

обладающий такими свойствами, называется статистическим барьером/.

Если условимся считать бесконечно долгое продолжение игры ничейным результатом, то окончательно мы можем сделать следующее заключение: все пространство игры $Z = R_2^+$ разбивается на три части: в зависимости от того, какой из этих частей принадлежит начальное состояние игры z_0, имеет место любой выигрыш игрока P, либо выигрыш игрока E, либо ничейный результат.

Поступила в редакцию 30.4.1970 г.

Литература

1. Р.Айзекс, Дифференциальные игры, М., "Мир", 1967.

2. Л.Ф.Гринько, И.А.Красс, Об одной игре двух экономических моделей, Исследования по кибернетике, сб. статей. "Советское радио", М., 1970.

3. И.А.Полетаев, Об исследовании моделей производства, Исследования по кибернетике, сб. статей. "Советское радио", М., 1970.

4. Г.Зойтендейк, Методы возможных направлений, ИЛ, М., 1963.