Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1970 г. выпуск 6.
УДК.519.95.

О ДИСКРЕТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ИГР ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

О.А.Малафеев, Л.А.Петросян /Ленинград/

Рассматривается вопрос существования ситуации равновесия в игре с поимкой, задаваемой обобщенными динамическими системами /см. [2] /, и связь таких игр с играми, задаваемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Пусть X -полное локально компактное метрическое пространство. В X рассматриваются два подвижных объекта - игроки P и E, маневренные способности которых описываются посредством семейств отображений $P(x_0, t_0, t)$ и соответственно $E(y_0, t_0, t)$ пространства X на себя. Относительно этих семейств предполагаются выполненными следующие аксиомы. Перечислим их для $P(x_0, t_0, t)$.

1. $P(x_0, t_0, t)$ определено при всех $x_0 \in X$; $t_0, t \in [0, \infty)$ таких, что $t_0 \leq t$, и является непустым компактным множеством пространства X.

2. $P(x_0, t_0, t_0) = x_0$ при всех $x_0 \in X$ и $t_0 \in [0, \infty)$.

3. При всех $t_0, t_1, t_2 \in [0, \infty)$, таких что $t_0 \leq t_1 \leq t_2$,
$$P(x_0, t_0, t_2) = \bigcup_{x_1 \in P(x_0, t_0, t_1)} P(x_1, t_1, t_2).$$

4. $P(x_0, t_0, t)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа по $t_0, t \in [0, \infty)$, $x_0 \in X$.

Аналогичные аксиомы предполагаются выполненными для $E(y_0, t_0, t)$.

Будем говорить тогда, что семейство отображений $P(x_0, t_0, t)$ $(E(x_0, t_0, t))$ определяет в X обобщенную динамическую систему.

О п р е д е л е н и е. Траекторией игрока P, начинающейся в точке $x_0 \in X$, называется отображение $\varphi : [0, T] \to X$, такое, что для всех $t_1, t_2 \in [0, T]$, таких, что $t_1 \leq t_2$,
$$\varphi(t_2) \in P(\varphi(t_1), t_1, t_2).$$

Т е о р е м а I. Траектория игрока P есть непрерывное отображение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. /см. [2]/.

Т е о р е м а 2. Если множество $B \subset X$ компактно, то множество $P(B, t_0, t) = \bigcup_{x_0 \in B} P(x_0, t_0, t)$ также компактно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. /см. [2]/.

Т е о р е м а 3. Для всякой точки $x' \in P(x_0, t_0, t)$ существует траектория φ', соединяющая x_0 и x'.

Д о к а з а т е л ь с т в о. /см. [2]/.

Т е о р е м а 4. Если D - компактное множество, то при всяких $t_0, t \in [0, \infty)$, таких, что $t_0 \leq t$, множество всех траекторий

на $[t_0, t]$, начинающихся в точках множества $D, -\hat{P}(D, t_0, t)$,есть компактное множество в равномерной метрике.

Доказательство. /см. [5]/.

Аналогичным образом определяется траектория ψ игрока E и формулируются теоремы для игрока E , аналогичные теоремам I - 4.

Мы будем интерпретировать множество $P(x_0, t_0, t)(E(y_0, t_0, t))$ как множество тех точек, которых игрок $P(E)$ может достичь из точки $x_0(y_0)$ за время $(t - t_0)$.

Введем в рассмотрение игру $\Gamma(x_0, y_0)$ для игроков P и E с описанными выше маневренными возможностями. Игра $\Gamma(x_0, y_0)$ с полной информацией: каждому игроку в момент времени игры t известны: величина t ; позиции обоих игроков в этот момент, а также маневренные возможности игроков - отображения $P(x_0, t_0, t)$ и $E(y_0, t_0, t)$, которые далее мы будем называть функциями достижимости игроков P и соответственно E . Игроки P и E начинают перемещаться из начальных позиций x_0 и соответственно y_0 в момент времени $t = t_0 = 0$ в соответствии со своими стратегиями u и v,и, в момент времени $t^* = \min\limits_{t \in [0,\infty)} \{t \mid x(t) = y(t)\}$ /здесь $x(t), y(t)$ суть местоположения игроков P и E в момент времени $t \in [0,\infty)$,игра заканчивается, после чего игрок P платит игроку E его выигрыш, равный величине t^* . Если $t^* = \infty$, то мы будем говорить, что игра $\Gamma(x_0, y_0)$ не может быть закончена за конечное время. Далее мы всегда будем предполагать, что эта игра может быть закончена за конечное время. Игрок P , выбирая стратегию u , стремится минимизировать выигрыш, цель игрока E при выборе стратегии v противоположна.

Определение 2. Стратегией u игрока P в игре $\Gamma(x_0, y_0)$ называется пара $(\sigma, K_P^\sigma) = u$, где $\sigma = \{t_0 = 0, t_1 > t_0, \dots, t_k > t_{k-1}, \dots\}$ есть разбиение полупрямой $[0, \infty)$, а K_P^σ - отображение, ставящее в соответствие текущей информации игрока $P - (t_k, x(t_k))$ / в момент времени t_k P находится в позиции $x(t_k)$ / отрезок траектории $\hat{x}(t_k) \in \hat{P}(x(t_k), t_k, t_{k+1})$.

Аналогичным образом определяется стратегия $v = (\sigma', K_E^{\sigma'})$ игрока E .

Антагонистическая игра с полной информацией $\Gamma_i(x_0, y_0, T)(i = 1,2)$ протекает следующим образом. Игроки P и E с описанными выше маневренными возможностями начинают перемещаться из начальных позиций x_0 и соответственно y_0 в момент времени $t_0 = 0$, и в момент времени $t = T$ игра заканчивается, после чего игрок P платит игроку E его выигрыш, равный величине $\rho(x(T), y(T))$ в игре $\Gamma_1(x_0, y_0, T)$ и величине $\min\limits_{t \in [0,T]} \rho(x(t), y(t))$ в игре $\Gamma_2(x_0, y_0, T)$.

Здесь ρ - метрика пространства X . Игрок P стремится минимизировать выигрыш, цель игрока E противоположна. Стратегии в игре $\Gamma_i(x_0, y_0, T)(i = 1, 2)$ подобны таковым в игре $\Gamma(x_0, y_0)$ и отлича-

чаются от них тем, что разбиения σ и σ' задаются на отрезке $[0,T]$.

Пусть σ - фиксированное разбиение отрезка $[0,T]$ и σ' - фиксированное разбиение полупрямой $[0,\infty)$. Введем в рассмотрение дискретные игры

$\Gamma_j^{\sigma'}(x_0,y_0)(j=1,2)$; $\Gamma_{ik}^{\sigma}(x_0,y_0,T)\,(i=1,2;\ k=1,2)$,

вспомогательные к играм $\Gamma(x_0,y_0)$ и $\Gamma_i(x_0,y_0,T)\,(i=1,2)$ соответственно.

Игра $\Gamma_1^{\sigma'}(x_0,y_0)$ протекает следующим образом. Игроки P и E начинают перемещаться из позиций x_0 и соответственно y_0 в момент времени $t_0=0$ и в момент времени $t'=\min\limits_{0\le t_k<\infty}\{t_k\,|\,x(t_k)=y(t_k)\}$ игра заканчивается, после чего игрок P платит игроку E его выигрыш, равный величине t'. Аналогично игре $\Gamma(x_0,y_0)$ игра $\Gamma_1^{\sigma'}(x_0,y_0)$ предполагается заканчиваемой за конечное время. На k-м шаге $(k=1,2,\dots)$ игрок E совершает выбор отрезка траектории $\hat{y}(t_{k-1})\in\hat{E}(y(t_{k-1}),t_{k-1},t_k)$, зная t_{k-1} и позиции обоих игроков в момент времени t_{k-1}, после чего игрок P, в свою очередь, выбирает траектории $\hat{x}(t_{k-1})\in\hat{P}(x(t_{k-1}),t_{k-1},t_k)$, зная t_{k-1}, позиции игроков P и E в момент времени t_{k-1}, а также выбор игрока E на k-м шаге, каждому игроку, кроме того, известно разбиение σ' полупрямой $[0,\infty]$ и маневренные возможности обоих игроков - функции достижимости $P(x_0,t_0,t)$ и $E(y_0,t_0,t)$.

Игра $\Gamma_2^{\sigma'}(x_0,y_0)$ отличается от игры $\Gamma_1^{\sigma'}(x_0,y_0)$ тем, что в ней на k-м шаге $(k=1,2,\dots)$ первым совершает свой выбор игрок P, зная t_{k-1} и позиции обоих игроков в момент t_{k-1}, а игрок E совершает свой выбор вторым, зная сверх того выбор игрока P на этом же шаге.

Дискретные игры $\Gamma_{ik}^{\sigma}(x_0,y_0,T)\,(i=1,2;\ k=1,2)$ определяются аналогично. Далее мы докажем существование ситуации ε-равновесия в чистых стратегиях в игре $\Gamma(x_0,y_0)$. Для этого нам понадобится теорема, которую мы здесь приводим с доказательством, принадлежащим М. Абд-эль-Кадеру и взятым из его диссертационной работы*/.

О п р е д е л е н и е 3. Стратегия u игрока P в игре $\Gamma_i^{\sigma'}(x_0,y_0)\,(i=1,2)$ называется успешной, если для всякой стратегии v игрока E в этой игре найдется такое целое число $M\ge 0$, что в ситуации (u,v) $x(t_M)=y(t_M)$.

Т е о р е м а 5. Если в игре $\Gamma_1^{\sigma'}(x_0,y_0)$ у игрока E имеется успешная стратегия, то в этой игре существует ситуация равновесия в чистых стратегиях.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A - множество всех позиций, которые могут реализоваться в ситуации (u^*,v) в игре $\Gamma_1^{\sigma'}(x_0,y_0)$.

*/ Работа выполнена в Асъютском университете, ОАР, под руководством Л.А.Петросяна.

Здесь u^* - любая фиксированная успешная стратегия игрока P и V - любая стратегия игрока E в этой игре. Игру, протекающую по правилам игры $\Gamma_1^{\sigma'}(x_0, y_0)$, в которой допустимыми являются позиции из множества A, назовем сужением на A игры $\Gamma_1^{\sigma'}(x_0, y_0)$ и обозначим $\hat{\Gamma}_1^{\sigma'}(x_0, y_0)$. Ясно, что в игре $\hat{\Gamma}_1^{\sigma'}(x_0, y_0)$ отсутствуют партии бесконечной продолжительности, и тогда по известной теореме Бержа в этой игре существует ситуация равновесия в чистых стратегиях, т.е. справедливо двойное неравенство

$$f(x_0, y_0, u', v_0') \geqslant f(x_0, y_0, u_0', v_0') \geqslant f(x_0, y_0, u_0', v') \qquad /1/$$

при всяких $u' \in U', v \in V'$. Здесь U' и V' суть множества стратегий игроков P и соответственно E в игре $\hat{\Gamma}_1^{\sigma'}(x_0, y_0)$, а f - функция выигрыша. Из обобщенной теоремы Цермело-Неймана следует, что в игре $\hat{\Gamma}_1^{\sigma'}(x_0, y_0)$ существует ситуация равновесия в стратегиях $u(z, i)$, $v(z, i)$ / при которых игрокам известно число ходов в игре, предшествующих данному/. Здесь $z = (x, y)$. Следовательно, $f(x_0, y_0, u', v') < \infty$ Покажем, что пара (u_0', v_0') образует ситуацию равновесия в игре $\Gamma_1^{\sigma'}(x_0, y_0)$. В силу того, что двойное неравенство /1/ справедливо для всех успешных стратегий игрока P, оно справедливо для стратегии u, которая не является успешной против v_0' /так как в этом случае $f(x_0, y_0, u, v_0') = \infty$ /. Допустим теперь, что $u \bar{\in} U$ и в то же время стратегия u является успешной против стратегии v_0', и следующее неравенство справедливо

$$f(x_0, y_0, u, v_0') < f(x_0, y_0, u_0', v_0').$$

Мы построим стратегию $u'' \in U'$, такую, что

$$f(x_0, y_0, u'', v_0') < f(x_0, y_0, u_0', v_0'),$$

а это противоречит оптимальности u_0' в игре $\hat{\Gamma}_1^{\sigma'}(x_0, y_0)$. Стратегия $u''(z, i)$ определяется следующим образом. Пусть $\{z(t_0), z(t_1), \ldots, z(t_N)\}$ - траектория в ситуации (u, v_0') с начальной позицией $z_0 = (x_0, y_0)$ и конечной позицией $z(t_N)$, в которой $x(t_N) = y(t_N)$. Тогда $u''(z, i) = u(z, i)$, если $z \in \{z(t_0), \ldots, z(t_N)\}$. Ясно, что $f(x_0, y_0, u, v_0') = f(x_0, y_0, u'', v_0')$, для всех прочих (z, i) мы положим

$$u''(z, i) = u_0'(z, i)$$

Докажем, что стратегия $u''(z, i)$ успешна. Пусть это неверно. Тогда найдется такая стратегия v, что в ситуации (u'', v) траектория $\{z(t_0), \ldots, z(t_N), \ldots\}$ бесконечна. Рассмотрим частичную траекторию этой траектории, начинающуюся в $z(t_N)$, которую мы обозначим $\{z(t_N); u'', v\} = \ell_N$. Тогда для всех $z \in \ell_N$, по определению,

$$u''(z, i) = u_0'(z, i).$$

И мы получаем, что

$$\ell_N = \{z(t_N); u'', v\} = \{z(t_N); u_0', v\},$$

но $\ell_N = \infty$, так что траектория $\{z(t_N); u_0', v\}$ бесконечна, что противоречит тому, что стратегия u_0' успешна.

Аналогичное утверждение справедливо для игры $\Gamma_2^{\sigma'}(x_0,y_0)$.

Сформулируем без доказательства 3 леммы.

Л е м м а 1. При всяких $x_0,y_0\in X$ и $T<\infty$ справедливы следующие неравенства:

$$Val(\Gamma_{i2}^{\sigma}(x_0,y_0,T))\geqslant Val(\Gamma_{i1}^{\sigma}(x_0,y_0,T)); i=1,2;$$

$$Val(\Gamma_{i2}^{\sigma}(x_0,y_0,T))\geqslant Val(\Gamma_{i2}^{\sigma'}(x_0,y_0,T)),\ i=1,2;$$

$$Val(\Gamma_{i1}^{\sigma}(x_0,y_0,T))\geqslant Val(\Gamma_{i1}^{\sigma'}(x_0,y_0,T)),\ i=1,2.$$

Здесь σ и σ' суть разбиения интервала $[0,T]$, такие, что σ' является измельчением σ.

Л е м м а 2. При всяких $x_0,y_0\in X$ справедливы неравенства:

$$Val(\Gamma_1^{\sigma}(x_0,y_0))\leqslant Val(\Gamma_2^{\sigma}(x_0,y_0)),$$

$$Val(\Gamma_2^{\sigma}(x_0,y_0))\geqslant Val(\Gamma_2^{\sigma'}(x_0,y_0)),$$

$$Val(\Gamma_1^{\sigma}(x_0,y_0))\leqslant Val(\Gamma_1^{\sigma'}(x_0,y_0)).$$

Здесь σ и σ' суть разбиения полупрямой $[0,\infty)$, такие, что σ' является измельчением σ.

Л е м м а 3. В играх $\Gamma_i(x_0,y_0,T)(i=1,2)$ существуют ситуации ε-равновесия в чистых стратегиях.

Т е о р е м а 6. Если в игре $\Gamma(x_0,y_0)$ у игрока P существует успешная стратегия, то тогда в этой игре существует ситуация ε-равновесия в чистых стратегиях. /Успешная стратегия в игре $\Gamma(x_0,y_0)$ определяется аналогично таковым в играх $\Gamma_1^{\sigma}(x_0,y_0)$ и $\Gamma_2(x_0,y_0)$ /.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим следующие две величины

$$\overline{V}=\inf_u\sup_v t^*(u,v),$$
$$\underline{V}=\sup_v\inf_u t^*(u,v)..$$

Понятно, что $\overline{V}\geqslant\underline{V}$. Покажем справедливость обратного неравенства. Из определения $\underline{V}$ следует, что для всякого числа $\varepsilon>0$ и всякой стратегии v игрока E найдется такая стратегия u игрока P, что $t^*(u,v)\leqslant\underline{V}+\varepsilon$.

Рассмотрим теперь игру $\Gamma_2(x_0,y_0,\underline{V}+\varepsilon)$. По лемме 3 в этой игре существует ситуация ε-равновесия в чистых стратегиях, и ясно, что справедливо соотношение

$$Val(\Gamma_2(x_0,y_0,\underline{V}+\varepsilon))=0.$$

И, следовательно, для всякого числа $\varepsilon'>0$ существует такая стратегия u игрока P, что для всякой стратегии v игрока E справедливо неравенство

$$t^*(u,v)\leqslant\underline{V}+\varepsilon+\varepsilon',$$

и, следовательно,

$$\overline{V}\leqslant\underline{V}+\varepsilon+\varepsilon'.$$

В силу произвольности ε и ε' получаем неравенство

$$\overline{V} \leq \underline{V}$$

что вместе с противоположным неравенством доставляет утверждение теоремы.

Рассмотрение дифференциальных игр, задаваемых посредством обобщенных динамических систем, позволяет преодолеть трудности, возникающие в играх с ограничениями на фазовые координаты, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Пусть X - паракомпактное связное геодезически полное многообразие. Тогда по теореме 2 /см[4] стр. 160 / пространство допускает риманову метрику и, следовательно, является связным римановым многообразием, причем из теорем 2 и 3 /см[4] стр. 178 / следует, что на X можно ввести обычную метрику ρ, совместную с исходной топологией в пространстве X, так что ρ будет непрерывной функцией на произведении $X \times X$. Из теоремы Ринова-Хопфа /см.[4] стр. 194/ вытекает, что X есть полное метрическое пространство. Локальная компактность пространства X очевидна в силу существования локальных гомеоморфизмов евклидову пространтсву. И, следовательно, на многообразии X можно определить посредством обобщенных динамических систем дифференциальную игру $\Gamma_i(x_0, y_0, T)(i=1,2)$ и $\Gamma(x_0, y_0)$, к которым применимы все изложенные выше рассуждения и теорема 6.

Выясним теперь связь между дифференциальными играми, задаваемыми посредством обобщенных динамических игр и игр, описываемых при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений.

Обозначим через $\mathring{\Gamma}_i(x_0, y_0, T)(i=1,2)$ игры с фиксированной продолжительностью $T<\infty$, а через $\mathring{\Gamma}(x_0, y_0)$ игру на быстродействие. Уравнения движения в этих играх имеют вид:

для P : $\dot{x} = F(x,t,u) \quad u \in U,$ /2/

для E : $\dot{y} = G(y,t,v) \quad v \in V.$ /3/

Здесь x и y суть векторы состояния игроков P и E соответственно. Относительно уравнения /2/ предполагаются выполненными следующие условия.

1. $t \in [0,\infty)$; $x(t) \in R^n$, $u(t) \in U$ при всяком $t \in [0,\infty)$, где U - - произвольное непустое множество в R^m.

2. При всяком фиксированном $t \in [0,\infty)$ F непрерывна по (x,u) и при всяком $(x,u) \in R^n \times R^m$ F измерима по t.

3. Существует такая локально интегрируемая функция k, что при всяких $u \in U$ и $x', x \in R^n$

$$|F(x,t,u) - F(x',t,u)| \leq k(t)|x-x'|.$$

4. Существует локально интегрируемая функция ℓ и положительные числа M и N, такие, что при всяких $x \in R^n$ и $u \in U$

$$|F(x,t,u)| \leq \ell(t)(M+N|x|).$$

Аналогичные условия предполагаются выполненными для уравнения /3/.

Игры $\dot{\Gamma}_i(x_0, y_0, T)(i=1,2)$, $\dot{\Gamma}(x_0, y_0)$ с такими маневренными возможностями игроков P и E определяются аналогично играм $\Gamma_i(x_0, y_0, T)$ $(i=1,2)$, $\Gamma(x_0, y_0)$ соответственно.

Пусть маневренные возможности игрока P описываются посредством системы вышеперечисленных аксиом, налагаемых на функцию достижимости $P(x_0, t_0, t)$, в которых аксиома I заменена аксиомой I', формулируемой следующим образом.

I'. $P(x_0, t_0, t)$ определена при всех $x \in X$ и всяких $t_0, t \in [0, \infty)$, таких, что $t_0 \leq t$, и является непустым ограниченным множеством пространства X.

Маневренные возможности игрока E описываются аналогично.

Для игроков P и E с такой динамикой вводятся игры с фиксированной продолжительностью и игра на быстродействие. Для этих игр справедливы утверждения, аналогичные лемме 3 и теореме 6. Мы покажем, что в играх $\dot{\Gamma}_i(x_0, y_0, T)$ $(i = 1, 2)$ и $\dot{\Gamma}(x_0, y_0)$ существуют ситуации ε-равновесия. Так как евклидово пространство R^n является полным метрическим локально компактным пространством, то для этого достаточно доказать, что функции достижимости уравнений /2/ и /3/ удовлетворяют аксиомам I', 2-4. Выполнимость аксиом I' и 4 вытекает из утверждений лемм 3.I и 3.2 / см. [5] стр. 282/. Аксиома 2 выполняется очевидным образом, и, наконец, аксиома 3 вытекает из определения функций достижимости игроков P и E.

Поступила в редакцию 24.4.1970 г

Литература

1. Л.А.Петросян, Обобщенные решения дифференциальных игр на выживание, Экономика и математические методы, т.3, № 3, 1967 г.

2. E.Roxin, Stability in general control systems, J.Differential Eqs., /I/, /1965/, 115-150.

3. W.H.Fleming, The convergense problem for differential games, J.Math.Anal.Appl., 3 /1961/, 102-116.

4. Р.Л.Бишоп, Р.Д.Криттенден, Геометрия многообразий, изд-во "Мир", М., 1967.

5. D.Eggert, P.Varaija, Representation of a differential system, J.Differential Eqs., /4/, /1968/, 280-299.

6. P.Varaija, J.Lin, Existense of saddle points in differential games, SIAM J.Control, v.7, N1, 1969.