Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1970 г. выпуск 6.
УДК.519.3:62-50

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Л.И.Плотникова /Одесса/

В заметке рассматривается задача оптимального приведения нескольких управляемых объектов в одну и ту же точку фазового пространства при различных предположениях относительно времени перехода объектов. В качестве иллюстрации приводится пример навигационной задачи.

Пусть в фазовом пространстве E^n заданы m управляемых объектов, движения которых описываются дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dx^i}{dt}=f^i(x^i, u^i), \quad i=1,2,\dots,m, \qquad /1/$$

связывающими для каждого объекта i его траекторию x^i в фазовом пространстве E^n с управляющим воздействием u^i. При этом предполагается, что вектор-функции u^i принимают значения из фиксированных допустимых областей $U^i \subset E^{r_i}$, на которые накладываются обычные ограничения, обеспечивающие справедливость принципа максимума Понтрягина.

Считая известным начальное положение каждого объекта, рассмотрим следующие задачи оптимального приведения этих объектов в одну и ту же точку фазового пространства.

ЗАДАЧА I. Определить управления $u^i(t)$ в заданных интервалах $[0,T_i]$ такие, что для решений уравнений /I/ с начальными условиями

$$x^i(0)=a^i, \quad i=1,2,\dots,m, \qquad /2/$$

во-первых,

$$x^1(T_1)=x^2(T_2)=\dots=x^m(T_m) \qquad /3/$$

и, во-вторых, достигает максимума величина

$$J=\sum_{i=1}^{m}\int_0^{T_i}\varphi_i(x^i,u^i)dt, \qquad /4/$$

которую можно интерпретировать, например, как суммарные затраты энергии.

ЗАДАЧА 2. Определить величины $T_i>0$ и управления $u^i(t)$ в интервалах $[0,T_i]$ такие, что для решения уравнений /I/ с начальными условиями /2/ имеет место /3/ и величина /4/ достигает минимума.

ЗАДАЧА 3. Определить величины $T_1=T_2=\dots=T_m=T>0$ и управления $u^i(t)$ в интервале $[0,T]$ такие, что для решений уравнений /I/ с начальными условиями /2/ имеет место /3/ и величина /4/ достигает минимума.

Прежде всего приведем поставленные задачи к задаче управления одним фиктивным объектом в фазовом пространстве E размерности mn.

Для этого в уравнениях /I/ сделаем замену переменных:

$$\tau = \frac{1}{T_i} t, \quad i = 1,2,\dots,m. \qquad /5/$$

После такой замены систему уравнений /I/ можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{u}, \theta), \qquad /1'/$$

где

$$\tilde{x} = (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^m), \qquad \tilde{x}^i(\tau) = x^i(T_i \tau),$$

$$\tilde{u} = (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \dots, \tilde{u}^m), \qquad \tilde{u}^i(\tau) = u^i(T_i \tau),$$

$$\tilde{u}(\tau) \in U = U^1 \times U^2 \times \dots \times U^m \subset E^{r_1 + r_2 + \dots + r_m}$$

$$\theta = (T_1, T_2, \dots, T_m), \quad \tilde{f} = (\tilde{f}^1, \tilde{f}^2, \dots, \tilde{f}^m),$$

$$\tilde{f}^i(\tilde{x}^i, \tilde{u}^i, T_i) = T_i f^i(\tilde{x}^i, \tilde{u}^i), \quad i = 1,2,\dots,m.$$

Для системы /I / начальные условия имеют вид:

$$\tilde{x}(0) = (a^1, a^2, \dots, a^m). \qquad /2'/$$

Далее, условие /3/ означает, что введенный фиктивный объект в момент $\tau = 1$ должен находиться на диагональном множестве

$$G = \{\tilde{x} \in E : \tilde{x}^1 = \tilde{x}^2 = \dots = \tilde{x}^m\}. \qquad /3'/$$

Показатель качества /4/ теперь принимает вид:

$$J = \int_0^1 \sum_{i=1}^{m} T_i \varphi_i(\tilde{x}^i(\tau), \tilde{u}^i(\tau)) d\tau. \qquad /4'/$$

Таким образом, поставленные задачи сводятся к оптимальному приведению введенного фиктивного объекта на диагональное множество/3'/ При этом в задаче I значение векторного параметра θ фиксировано, в задаче 2 компоненты вектора θ могут принимать произвольные неотрицательные значения, в задаче 3 компоненты этого вектора должны быть равны одному и тому же положительному числу T. В последних двух случаях мы приходим к задаче оптимального управления с параметрами, которая изучалась в [I].

Согласно принципу максимума для решения полученных задач составим функцию Гамильтона

$$H(\tilde{\varphi}, \tilde{x}, \tilde{u}; \theta) = \sum_{i=1}^{m} T_i H^i(\tilde{\varphi}^i, \tilde{x}^i, \tilde{u}^i), \qquad /6/$$

где

$$H^i(\tilde{\varphi}^i, \tilde{x}^i, \tilde{u}^i) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\varphi}^i_j f^i_j(\tilde{x}^i, \tilde{u}^i) + \tilde{\varphi}_0 \varphi_i(\tilde{x}^i, \tilde{u}^i). \qquad /7/$$

Вспомогательные переменные $\tilde{\varphi}^i_j$ и $\tilde{\varphi}_0$, как известно, удовлетворяют следующей системе:

$$\frac{d\tilde{\varphi}^i_j}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \tilde{x}^i_j}, \quad i = 1,2,\dots,m; \; j = 1,2,\dots,n,$$

$$\tilde{\varphi}_0 = const \leq 0 .$$

Последнюю, в силу /6/, можно переписать в виде:

$$\frac{d\tilde{\varphi}_j^i}{d\tau} = -T_i \frac{\partial H^i}{\partial \tilde{x}_j^i}, \quad i=1,2,\ldots,m; \; j=1,2,\ldots,n, \qquad /8/$$
$$\tilde{\varphi}_0 = const \leq 0 .$$

При этом управление $\tilde{u}$ согла́сно принципу максимума определяется из условия достижения максимума в каждый момент $\tau \in [0,1]$ функции /6/. Из вида этой функции следует, что она достигает максимума по $\tilde{u}$ тогда и только тогда, когда функции /7/ достигают максимума по $\tilde{u}^i$.

Из условия трансверсальности / на правом конце траектории / следует, что в точке $\tau = 1$ функции $\tilde{\varphi}_j^i(\tau)$ удовлетворяют условиям:

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{\varphi}_j^i(1) = 0, \qquad j=1,2,\ldots,n \qquad /9/$$

Для определения параметров T_i в задаче 2 имеем:

$$\int_0^1 \frac{\partial H}{\partial T_i} d\tau = 0, \quad i=1,2,\ldots,m,$$

т.е.

$$\int_0^1 H^i d\tau = 0, \quad i=1,2,\ldots,m.$$

Отсюда для оптимальных траекторий, на которых $H^i = const$, должны выполняться равенства:

$$H^i = 0, \quad i=1,2,\ldots,m,$$

при всех $\tau \in [0,1]$ и, в частности, при $\tau = 1$.

Это означает, что

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{\varphi}_j^i(1) f_j^i(\tilde{x}^i(1), \tilde{u}^i(1)) +$$
$$+ \tilde{\varphi}_0 \varphi_i(\tilde{x}^i(1), \tilde{u}^i(1)) = 0, \quad i=1,2,\ldots,m. \qquad /10/$$

В задаче 3 имеется только один параметр T , который определяется из условия

$$\int_0^1 \frac{\partial H}{\partial T} d\tau = \int_0^1 \sum_{i=1}^{m} H^i d\tau = 0 .$$

Отсюда для оптимальной траектории, на которой $\sum_{i=1}^{m} H^i = const$,при $\tau \in [0,1]$ имеем:

$$\sum_{i=1}^{m} H^i = 0.$$

Последнее соотношение при $\tau = 1$ можно переписать в виде:

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}\tilde{\varphi}_j^i f_j^i(\tilde{x}^i(1),\tilde{u}^i(1))+\tilde{\varphi}_0\varphi_i(\tilde{x}^i(1),\tilde{u}^i(1))\right]=0. \qquad /11/$$

Как это обычно делается /см, например, [2], стр.315/, мы ограничимся рассмотрением случая, когда ψ_0 в /9/ не равно нулю. При этом, очевидно, не уменьшая общности, можно считать, что $\tilde{\varphi}_0 = -1$.

Переходя в условиях /7/, /8/, /9/, /10/ и /11/ к независимой переменной t, связанной с τ соотношением /5/, получаем:

$$\frac{d\varphi_j^i}{dt}=-\frac{\partial H^i}{\partial x_j^i},\quad i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n, \qquad /8'/$$

$$\sum_{i=1}^{m}\varphi_j^i(T_i)=0,\quad j=1,2,\dots,n, \qquad /9'/$$

$$\sum_{j=1}^{n}\varphi_j^i(T_i)f_j^i(x^i(T_i),u^i(T_i))-$$
$$-\varphi_i(x^i(T_i),u^i(T_i))=0,\ i=1,2,\dots,m, \qquad /10'/$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}\varphi_j^i(T)f_j^i(x^i(T),u^i(T))-\varphi_i(x^i(T),u^i(T))\right]=0, \qquad /11'/$$

где

$$\varphi_j^i(t)=\tilde{\varphi}_j^i\left(\frac{t}{T_i}\right),\ i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n,$$

$$H^i=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j^i f_j^i(x^i,u^i)-\varphi_i(x^i,u^i),\ i=1,2,\dots,m. \qquad /7'/$$

Таким образом, рассмотрение фиктивного объекта в фазовом пространстве E размерности mn потребовалось нам лишь для вывода условий, отражающих связь между имеющимися объектами. Для задачи 1 таковыми оказались условия /9'/, для задачи 2 - условия /9'/ и /10'/ для задачи 3 - условия /9'/ и /11'/.

Необходимые признаки решения для рассматриваемых задач могут быть сформулированы в виде следующих предложений.

Т е о р е м а 1. Пусть X^0 - искомая точка приведения объектов в задаче 1. Тогда вектор-функции $\varphi^i(t)$, отвечающие оптимальному приведению каждого объекта i за заданное время T_i в точку X^0 удовлетворяют условию /9'/. В случае, когда вектор-функции $\varphi^i(t)$ определяются неоднозначно, можно утверждать, что некоторые из таких функций удовлетворяют указанному условию.

Т е о р е м а 2. Пусть X^0 - искомая точка приведения объектов в задаче 2. Далее, пусть для каждого объекта i решена задача оптимального приведения его в точку X^0, т.е. найдены соответст-

ствующие время T_i, траектория $x^i(t)$ и управление $u^i(t)$. Тогда вектор-функции $\varphi^i(t)$, отвечающие оптимальному приведению каждого объекта i за время T_i в точку x^0, удовлетворяют условиям /9'/ и /10'/. В случае, когда вектор-функции $\varphi^i(t)$ определяются неоднозначно, можно утверждать, что некоторые из таких функций удовлетворяют указанным условиям.

Теорема 3. Пусть x^0 – искомая точка приведения объектов в задаче 3 и T – искомое время приведения. Тогда вектор-функции $\varphi^i(t)$, отвечающие оптимальному приведению каждого объекта i за время T в точку x^0, удовлетворяют условиям /9'/, /11'/. В случае, когда вектор-функции $\varphi^i(t)$ определяются неоднозначно, можно утверждать, что некоторые из таких функций удовлетворяют указанным условиям.

Аналогичный результат может быть получен с помощь принципа Беллмана. Рассмотрим, например, задачу 1.

Пусть $F_i(x,t)$ – функция Беллмана, отвечающая i-му объекту. Тогда величина $F_i(x, T_i)$ определяет затраты, связанные с оптимальным переводом объекта i за заданное время T_i в точку x. Суммарные затраты по переводу всех объектов в точку x составят

$$F(x)=\sum_{i=1}^{m} F_i(x,T_i).$$

В случае непрерывной дифференцируемой функции Веллмана по фазовым координатам в искомой точке x^0, очевидно, должны выполняться равенства:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_i(x^0, T_i)}{\partial x^i_j}=0,\ j=1,2,\dots,n. \tag{12}$$

С другой стороны, как известно,

$$\frac{\partial F_i(x^0, T_i)}{\partial x^i_j}=-\varphi^i_j(T_i),\ i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n, \tag{13}$$

где $\varphi^i_j(t)$ – компоненты вектор-функций, отвечающих оптимальному приведению объектов в точку x^0 за время T_i. Из /12/ и /13/ получаем установленное выше другим способом условие /9'/.

Заметим, что фигурирующие в приведенных теоремах условия в случае линейных уравнений /1/, как и в других задачах оптимального управления, являются не только необходимыми, но и достаточными.

В качестве иллюстрации рассмотрим примеры, в которых с помощью приведенных условий удается получить искомые решения. Эти примеры связаны со следующей навигационной задачей, частный случай которой рассматривался Дж. Лейтманом [3] /см. стр.54-56/.

Имеются m судов, движения которых описываются дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x}_1^i = u_1^i + S_0 + S_2 x_2^i, \qquad \dot{x}_2^i = u_2^i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{14}$$

Функции $x_1^i(t)$, $x_2^i(t)$ здесь определяют траекторию движения i-го судна; $u_1^i(t)$, $u_2^i(t)$ – параметры управления, принимающие произвольные вещественные значения; $S^i = S_0 + S_2 x_2^i$ – скорость течения, которая зависит только от второй координаты объекта. Предполагается, что затраты энергии каждого судна определяются по формулам:

$$J_i[u_1^i, u_2^i] = \frac{1}{2}\int_0^{T_i} [(u_1^i)^2 + (u_2^i)^2 + k]\,dt,$$

где k – заданная положительная величина, а T_i – время движения судна.

Пример 1. При заданных начальных положениях судов

$$x_1^i(0) = a_1^i, \; x_2^i(0) = a_2^i, \; i = 1, 2, \ldots, m,$$

и времени $T > 0$ требуется отыскать точку (x_1^0, x_2^0) и управления

$$u^i(t) = (u_1^i(t), u_2^i(t)), \; i = 1, 2, \ldots, m,$$

осуществляющие переход всех судов в эту точку за время T таким образом, что достигают минимума суммарные затраты

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{i=1}^m [(u_1^i)^2 + (u_2^i)^2 + k]\,dt.$$

Прежде всего решим m задач оптимального перехода судов в произвольную точку (x_1^0, x_2^0) за заданное время T. Для этого согласно /7'/ введем в рассмотрение для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$ функции

$$H^i = \varphi_1^i(u_1^i + S_0 + S_2 x_2^i) + \varphi_2^i u_2^i - \frac{1}{2}[(u_1^i)^2 + (u_2^i)^2 + k].$$

Сопряженная система /8'/ в данном случае имеет вид:

$$\dot{\varphi}_1^i = 0, \quad \dot{\varphi}_2^i = -S_2 \varphi_1^i. \tag{15}$$

Далее, из условия максимума функции H^i по u_1^i и u_2^i определяем:

$$u_1^i = \varphi_1^i, \quad u_2^i = \varphi_2^i. \tag{16}$$

Интегрируя уравнения /14/ и /15/ с учетом /16/, находим:

$$\varphi_1^i = C_1^i, \quad \varphi_2^i = C_2^i - S_2 C_1^i t, \tag{17}$$

$$x_1^i = a_1^i + (C_1^i + S_0 + S_2 x_2^i)t + \frac{S_2 C_2^i}{2}t^2 - \frac{S_2^2 C_1^i}{6}t^3, \qquad x_2^i = a_2^i + C_2^i(t) - \frac{S_2 C_1^i}{2}t^2, \tag{18}$$

где C_1^i и C_2^i – постоянные интегрирования.

Полагая в /18/ $t = T$ и, следовательно, $x_1^i = x_1^0$, $x_2^i = x_2^0$, находим постоянные C_1^i и C_2^i. Подставляя последние в /17/, получаем:

$$\varphi_1^i = \frac{12(x_1^0 - a_1^i - S_0 T) - 6 S_2 T(x_2^0 + a_2^i)}{12T + S_2^2 T^3}, \tag{19}$$

$$\psi_2^i = \frac{(x_2^i - a_2^i)(12 + s_2^2 T^2) + 6 s_2 T (x_1^0 - a_1^i - s_0 T) - 3 s_2^2 T^2 (x_2^0 + a_2^i)}{12T + s_2^2 T^3} -$$

$$- \frac{12(x_1^0 - a_1^i - s_0 T) - 6 s_2 T (x_2^0 + a_2^i)}{12T + s_2^2 T^3} s_2 t .$$

Далее, подставляя значения найденных функций при $t = T$ в /9'/, где под T_i в данном случае следует понимать заданное время T, получаем систему линейных уравнений для определения x_1^0 и x_2^0. Из последней находим:

$$x_1^0 = s_0 T + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_1^i + \frac{s_2 T}{m}\sum_{i=1}^{m} a_2^i , \qquad /20/$$

$$x_2^0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_2^i .$$

Искомые управления определяются из /16/ и /19/.

Заметим, что при постоянной скорости течения /т.е. при $S_2 = 0$ / и, в частности, при отсутствии течения /т.е. при $S_0 = S_2 = 0$ / оптимальные траектории движения, как следует из /18/, являются прямолинейными. При переменной скорости течения оптимальные траектории будут криволинейными.

П р и м е р 2. При заданных начальных положениях судов

$$x_1^i(0) = a_1^i , \quad x_2^i(0) = a_2^i , \quad i = 1,2,\dots,m ,$$

требуется отыскать точку (x_1^0, x_2^0), величины T_i и управления

$$u^i(t) = (u_1^i(t), u_2^i(t)) , \quad i = 1,2,\dots,m ,$$

в интервалах $[0, T_i]$, осуществляющие переход всех судов в эту точку таким образом, что достигают минимума суммарные затраты

$$J = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \int_0^{T_i} \left[(u_1^i)^2 + (u_2^i)^2 + k \right] dt .$$

Воспользуемся ранее полученными соотношениями /16/ и /19/, где под T в данном случае следует понимать T_i. Кроме того, для определения величин $T_1, T_2, \dots, T_m$ теперь имеем m соотношений /10'/. Подставляя значения найденных функций /19/ при $t = T_i$ в /9'/, получим систему линейных уравнений для определения x_1^0 и x_2^0. Так, например, при $k = 5$, $S_0 = S_2 = 0,5$, $a^1 = (0,0)$, $a^2 = (5,0)$, $a^3 = (-1,3)$ окончательно получаем: $T_1 = 0,72$; $T_2 = 0,91$; $T_3 = 1,11$; $x_1^0 = 2,19$; $x_2^0 = 0,78$; значение функционала $J = 12,39$.

П р и м е р 3. При заданных начальных положениях судов

$$x_1^i(0) = a_1^i , \quad x_2^i(0) = a_2^i , \quad i = 1,2,\dots,m ,$$

требуется отыскать точку (x_1^0, x_2^0), величину T и управления

$$u^i(t) = (u_1^i(t), u_2^i(t)) , \quad i = 1,2,\dots,m ,$$

в интервале $[0, T]$, осуществляющие переход всех судов в эту точку

таким образом, что достигают минимума суммарные затраты

$$\mathcal{J}=\frac{1}{2}\int_0^T\sum_{i=1}^{m}\left[(u_1^i)^2+(u_2^i)^2+k\right]dt.$$

В этом случае можно воспользоваться соотношениями /I6/, /I9/ и /20/, полученными в примере I, где под T следует понимать время перехода всех судов, определяемое согласно /II'/. При $k=5$, $S_0=S_2=0,5$, $a^1=(0,0)$, $a^2=(5,0)$, $a^3=(-1,3)$ в этом случае окончательно получаем: $T=0,94$; $x_1^0=2,27$; $x_2^0=1,0.0$; значение функционала $\mathcal{J}=12,41$.

В заключение заметим, что в случае простого движения в евклидовом пространстве задача I сводится к разысканию общей точки m сфер, задача 2 совпадает с известной задачей Штейнера. Наконец, задача 3 равносильна задаче нахождения центра сферы минимального радиуса, содержащей точки $a^1, a^2, \ldots, a^m$.

Нетрудно проверить, что оптимальными траекториями перехода каждого объекта в точку x^0 во всех этих задачах являются прямые, соединяющие точки a^i с x^0. В случае задачи 3 по оптимальным траекториям, очевидно, будут двигаться только объекты, находящиеся в начальный момент на найденной сфере минимального радиуса.

Поступила в редакцию 28.4.1970 г

Литература

I. Л.С.Понтрягин, и др., Математическая теория оптимальных процессов, ФМ, М., 1969.

2. Н. Атанс и П.Фалб, Оптимальное управление, Машиностроение, М., 1968.

3. Дж.Лейтман, Введение в теорию оптимального управления, ИЛ, М., 1968.