Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1970 г. выпуск 6.
УДК.519.1.

НИЖНЯЯ ОЦЕНКА ЧИСЛА ДУГ ОРГРАФА С ЗАДАННЫМИ РАДИУСОМ И КОЛИЧЕСТВОМ БИКОМПОНЕНТ

Ш.М.Исмаилов /Баку/

В работе рассматривается конечный ориентированный граф/орграф/*/.

Пусть $G(n,k,r)$ - произвольный орграф, где $n>1$ количество вершин, $k\geqslant 1$ - число бикомпонент и $1\leq r<\infty$ -радиус орграфа. Найдем нижнюю оценку числа дуг данного орграфа $G(n,k,r)$.

Возможны следующие случаи:

1. $n=k$;
2. $n\neq k$.

В случае $n=k$, орграф не содержит орциклов и в силу $r<\infty$ обладает единственным центром.

Т е о р е м а 1. Орграф $G(n,n,r)$ имеет минимальное количество дуг**/$\Longleftrightarrow$ каждая его вершина достижима единственным путем из центра. Минимальное количество дуг такого орграфа равно $M(n,n,r)=n-1$.

Легко показать, что орграф, удовлетворяющий условию теоремы,есть растущее ордерево.

В случае $n\neq k$ возможны следующие:

2_1 $k=1$;

2_2 $k\geqslant 2$.

В случае 2_1 данный орграф является бисвязным.

Л е м м а 1. Для любого бисвязного орграфа $G(n,1,r)$, не увеличивая количества дуг и сохраняя радиус, можно построить другой бисвязный орграф $G'(n,1,r)$, являющийся розеткой [2].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G(n,1,r)$ - произвольный бисвязный орграф. Одну из его центральных вершин обозначим 1. Выделим кратчайший путь $\mathcal{P}$ длины r с началом 1. Одну из вершин, находящуюся на расстоянии r от 1, обозначим $r+1$. Удалим из орграфа все дуги, выходящие из вершины $r+1$, кроме дуги $\overrightarrow{(r+1),1}$: ясно, что при этом радиус орграфа не увеличится.

Если в орграфе не было дуги $\overrightarrow{(r+1),1}$, то после удаления всех выходящих из вершины $r+1$ дуг добавляем дугу $\overrightarrow{(r+1),1}$. Ясно,что после указанных преобразований орграф остается бисвязным и количество дуг его не увеличится. Окончательно приходим к орграфу,состоящему из одного простого орцикла длины и подграфа /тоже бисвязного/,имеющего с этим орциклом ровно одну общую вершину. Радиус подграфа не

*/Все определения и понятия взяты из [1] и [2].

**/$\Longleftrightarrow$ заменяет "тогда и только тогда, когда".

превосходит радиуса всего орграфа. Применяя к подграфу ту же процедуру, в конце превратим весь исходный орграф в розетку.

Л е м м а 2. Розетка $G(n,1,r)$ имеет минимальное количество дуг $\Longleftrightarrow$ количество ее ветвей минимально.

Действительно, если через ℓ обозначить количество ветвей розетки, то количество дуг ее равно

$$M(n,1,r)=n+\ell-1. \qquad /1/$$

Т е о р е м а 2. Минимальное количество дуг бисвязного орграфа $G(n,1,r)$ равно*

$$M(n,1,r)=n+\left[\frac{n-1}{r}\right]-1. \qquad /2/$$

Очевидно, что $\min \ell=\left[\frac{n-1}{r}\right]$. Рассмотрим, наконец, случай любого k, удовлетворяющего условию $2<k+1\leq n$. Так как $r<\infty$, то антитупиковая бикомпонента единственна и все центральные вершины орграфа принадлежат этой бикомпоненте. Без нарушения общности можно считать, что центральная вершина единственная.

Т е о р е м а 3. Обыкновенный орграф $G(n,k,r)$, где $r\geqslant n-k$, имеет минимальное количество дуг $\Longleftrightarrow$ одна его бикомпонента C имеет $n-k+1$ вершин и является простым орциклом, а остальные бикомпоненты одновершинные, причем орграф не содержит никаких циклов, кроме C. Минимальное количество дуг равно $M(n,k,r)=n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что количество дуг орграфа $G(n,k,r)$, где $r\geqslant n-k$ минимально, но хотя бы одна его бикомпонента $\mathcal{J}$ не является простым орциклом. Возможны следующие случаи:

Случай 1. $\mathcal{J}$ не содержит вершин, принадлежащих простому пути длины r из центра. Бикомпоненту $\mathcal{J}$ превратим в одновершинную, а $n(\mathcal{J})-1$ вершин ее перенесем в центральную $\mathcal{J}_0$, после чего переделываем в простой орцикл длины $n(\mathcal{J}_0)+n(\mathcal{J})-1$. Поскольку $n(\mathcal{J}_0)+n(\mathcal{J})-1\leq n-k+1$, после такой перестройки сохранится радиус, но количество дуг орграфа $G(n,k,r)$, где $r\geqslant n-k$, уменьшится вопреки минимальности.

Случай 2. Бикомпонента $\mathcal{J}$ содержит вершину, принадлежащую простому пути Q длины r из центра орграфа. Пусть в бикомпоненте $\mathcal{J}$ имеется t вершин, принадлежащих некоторому простому пути Q длины r из центра. Легко показать, что если переделать $\mathcal{J}$ в простой орцикл длины t, а остальные $n(\mathcal{J})-t$ ее вершин перенести в центральную бикомпоненту $\mathcal{J}_0$, после чего последнюю также переделать в простой орцикл длины $n(\mathcal{J}_0)+n(\mathcal{J})-t$, то радиус орграфа сохранится, а количество дуг уменьшится вопреки минимальности.

Допустим в орграфе $G(n,k,r)$, где $r\geqslant n-k$, имеется по крайней мере два простых орцикла $\mathcal{L}$ и S ненулевой длины. Нетрудно пока-

*) $[x]$ - означает наименьшее целое число, не меньшее x.

зать, что если бикомпоненту $\mathcal{L}$ заменить простым орциклом $\mathcal{L}'$ длины $n(\mathcal{L})+n(S)-1$, а бикомпоненту S заменить одной вершиной, то радиус орграфа сохранится, а количество дуг орграфа уменьшится вопреки минимальности. Орграф не содержит никаких циклов, кроме единственного простого орцикла, что легко доказывается от противного. Обратное утверждение теоремы очевидно.

Из структуры орграфа ясно, что $M(n,k,r) = n$, что и требовалось доказать.

Пусть бикомпонента $\mathcal{J}$ есть $(n-k+1)$ - вершинная розетка орграфа $G_1(n,k,r)$ и в каждую бикомпоненту, кроме центральной, заходит одна дуга. $G_2(n,k,r)$ - такой орграф, в котором количество его простых орциклов ℓ равно количеству ветвей в розетке $\mathcal{J}$ орграфа $G_1(n,k,r)$ и в каждую бикомпоненту которого, кроме центральной, заходит одна дуга.

Л е м м а 3. Количества дуг орграфа $G_1(n,k,r)$ и $G_2(n,k,r)$ равны.

С л е д с т в и е 1. Количество дуг орграфа $G_1(n,k,r)(G_2(n,k,r))$ минимально $\Longleftrightarrow$ ℓ минимально.

Орграфы $G_1(n,k,r)\,(G_2(n,k,r))$ с минимальным количеством дуг обозначим соответственно $G^1(n,k,r)\,(G^2(n,k,r))$.

Т е о р е м а 4. Орграф $G(n,k,r)$, где $r<n-k$, имеет минимальное количество дуг $\Longleftrightarrow$ он является либо $G^1(n,k,r)$ либо $G^2(n,k,r)$. При этом количество дуг равно

$$M(n,k,r)=n+\left[\frac{n-k}{r}\right]-1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G(n,k,r)$, где $r<n-k$, произвольный орграф. Возможны следующие случаи:

1. В каждую бикомпоненту, кроме антитупиковых, входит одна дуга.
2. Существует бикомпонента $\mathcal{J}_\delta$, в которую входит $h>1$ дуг.

В обоих случаях бикомпоненты орграфа делятся на две группы:

а/ Бикомпоненты, которые не содержат вершин, не принадлежащих никакому простому пути длины r от центра.

б/ Бикомпоненты, которые содержат вершины, принадлежащие по крайней мере одному простому пути длины r от центра.

Согласно рассуждениям, проведенным в доказательстве Теоремы 3, в случае 2 все бикомпоненты /кроме центральной/ орграфа $G(n,k,r)$ где $r<n-k$, превращаем в одновершинный или простой орцикл, а центральную - в розетку. В этом случае доказательство теоремы следует из леммы 3 и следствия 1.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы в случае 2, докажем следующую лемму.

Пусть $G(n,2,r)$ - такой орграф, в котором в центральную бикомпоненту заходит $q>1$ дуг, а $G'(n,2,r)$ - такой, в котором нецентральная бикомпонента одновершинная и в нее заходит одна дуга.

Л е м м а 4. Минимальное количество $M(G')$ дуг орграфа $G'(n,2,r)$, где $r<n-2$, не больше чем минимальное количество $M(G)$ дуг

орграфа $G(n,2,r)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возможны следующие случаи:

1. Бикомпонента 2 не содержит вершин, находящихся на расстоянии r от центра орграфа.

2. Бикомпонента 2 содержит вершины, находящиеся на расстоянии r от центра орграфа.

Аналогично доказательству теоремы 3 в обоих случаях бикомпоненту 2 превращаем в одновершинную, а бикомпоненту I /центральную/ - в розетку радиусом r . Нетрудно показать, что после перестройки количество дуг орграфа не увеличивается.

В дальнейшем будем иметь в виду то, что количество бикомпонент, которые содержат вершины, принадлежащие некоторому простому пути, больше двух.

Возвращаемся к доказательству теоремы.

Случай 2. Пусть бикомпонента $\mathcal{I}_\delta$ удовлетворяет условию а/. Нетрудно показать, что если перенести начало всех дуг, кроме $\overrightarrow{xy}$ в y /где x - центр орграфа и $y\in \mathcal{I}_\delta$ /, то приходим к случаю I.

Пусть бикомпонента $\mathcal{I}_\delta$ удовлетворяет условию б/; множество бикомпонент типа $\mathcal{I}_\delta$ обозначим через $\{\mathcal{I}_i\}$, где $i=\overline{1,N}$ и $N\leq k$. В зависимости от достижимости из центра орграфа множество вершин можно разбить на 4 группы.

Теорему доказываем для $\{\mathcal{I}_\nu\}\subseteq\{\mathcal{I}_i\}$ таких, что в $\mathcal{I}_\nu$ заходит дуга как из центра орграфа, так и из других бикомпонент /доказательство для других групп бикомпонент проводится аналогично/. Каждое $\{\mathcal{I}_\nu\}$ делится на два подмножества: $\{\mathcal{I}_\nu\}=\{\mathcal{I}'_\nu\}\dotplus\{\mathcal{I}''_\nu\}$, где $\{\mathcal{I}'_\nu\}$ состоит из $\mathcal{I}'_\nu$, которые не содержат вершин, находящихся на расстоянии r от центра орграфа, а $\{\mathcal{I}''_\nu\}$ - из тех $\mathcal{I}''_\nu$, которые содержат их.

Через $\{\rho(x,y'_\alpha)\}$ /где x - центр орграфа, $y'_1,y'_2,\dots,y'_s$ - вершины бикомпоненты $\mathcal{I}'_{\nu_0}\in\{\mathcal{I}'_\nu\}$, из которых выходят дуги/ обозначим множество длин кратчайших путей. Среди этих путей выбираем максимальный по длине:

$$A=\max_\alpha\{\rho(x,y'_\alpha)\}.$$

Аналогично среди кратчайших путей, проходящих через $y_1,y_2,\dots,y_p$ - -вершины $\mathcal{I}'_{\nu_0}$, в которые заходят дуги из x , выбираем максимальный по длине:

$$B=\max_{\alpha,\beta}\{\rho_{y_\beta}(x,y'_\alpha)\}\ ,\quad \text{где } \alpha=\overline{1,s}\,,\ \beta=\overline{1,p}\,.$$

Ясно, что $B\geqslant A$. Переносим начала всех дуг, заходящих в $\mathcal{I}'_{\nu_0}$, кроме $\overrightarrow{x,y_{p_0}}$ $(1\leq p_0\leq p)$ в вершину y_{p_0} . Если после переноса начал дуг бикомпонента $\mathcal{I}'_{\nu_0}$ содержит кратчайший путь длины $B-1$, то легко показать, что с помощью перемещения по этому пути вершин $y'_1,y'_2,\dots,y'_s$ можно сохранить радиус орграфа не увеличивая его дуг.

Пусть $\mathcal{I}'_{\nu_0}$ не содержит кратчайшего пути длины $B-1$. Значит,

$r(\mathcal{J}'_{v_0}) < B-1$, где $r(\mathcal{J}'_{v_0})$ - радиус бикомпоненты $\mathcal{J}'_{v_0}$. Перестроив $\mathcal{J}'_{v_0}$ в бикомпоненту радиусом $B-1$, получим кратчайший путь длины $B-1$, который, в силу вышесказанного, достаточен для сохранения радиуса орграфа. Легко показать, что, сохраняя радиус и не увеличивая дуг орграфа, можно перейти к случаю I и т.д.

Поступила в редакцию 2.3.1970 г.

Литература

I. А.А.Зыков, Теория конечных графов, Новосибирск, "Наука",1969.
2. К.Берж, Теория графов и ее применения, ИЛ, 1962.