Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1970 г. выпуск 7.

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВ ПОГЛОЩЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ СБЛИЖЕНИЯ

А.В.Зайцев /Свердловск/

В статье рассматривается построение множеств позиционного поглощения, определяемого для класса аппроксимационных стратегий. Показано, что множество позиционного поглощения можно получить определенным переходом от некоторой рекуррентной последовательности множеств программного поглощения. Предложенный алгоритм определяет достаточные условия, при которых игру сближения можно завершить за конечное время.

Материал статьи примыкает к исследованиям [I - 9].

§ I. Рассмотрим управляемый процесс, который описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u, v). \qquad /I.I/$$

Здесь x - n -мерный фазовый вектор, t -текущее время, u и v - управляющие векторы некоторой размерности, стесненные ограничением

$$u \in U \ , \ v \in V, \qquad /I.2/$$

U , V - ограниченные и замкнутые множества. $f(t,x,u,v)$ непрерывна по всем переменным и липшицева по x .

Для решения дифференциальной игры сближения движения /I.I/, /I.2/ с некоторым ограниченным, замкнутым множеством M было введено [7,8] множество позиционного поглощения в момент θ. Экстремальные к этому множеству стратегии игроков [7,8] доставляют решение рассматриваемой игры сближения.

В данной статье описывается построение этого множества при помощи понятных процедур, которые в классе смешанных стратегий отвечают конструкциям из работ [6 - 8] .

Определим класс смешанных аппроксимационных стратегий U_a и V_a. Стратегия $U_a(V_a)$ определяется системой множеств регулярных мер $\{\mu(du)\}_{\{t,x\}}(\{\nu(dv)\}_{\{t,x\}})$, каждая из которых нормирована на $U(V)$. Множества $\{\mu(du)\}_{\{t,x\}}$ и $\{\nu(dv)\}_{\{t,x\}}$ определены в каждой точке $\{t, x\}$, слабо замкнуты, слабо полунепрерывны сверху по включению по переменной x . Соответствие между стратегиями и задающими их множествами мер будем изображать символически следующим образом

$$U_a \div \{\mu(du)\}_{\{t,x\}} \quad \text{и} \quad V_a \div \{\nu(dv)\}_{\{t,x\}} .$$

Движением системы /I.I/ $x[t] = x[t, t_0, x_0; U_a, \Gamma_u, V_a, \Gamma_v]$, порожденным стратегиями U_a , V_a и разбиениями Γ_u , Γ_v , назовем всякую абсолютно - непрерывную функцию $x[t]$, удовлетворяющую начальному условию $x[t_0] = x_0$ и соотношениям

$$\frac{dx[t]}{dt} = \iint f(t, x[t], u, v)\mu(du)_{\{\tau_i^{(u)}, x[\tau_i^{(u)}]\}} \nu(dv)_{\{\tau_j^{(v)}, x[\tau_j^{(v)}]\}} \qquad /1.3/$$

$$(\tau_i^{(u)} \leq t < \tau_{i+1}^{(u)}, \ \tau_j^{(v)} \leq t < \tau_{j+1}^{(v)}),$$

где $\mu(du)_{\{t,x\}}$, $\nu(dv)_{\{t,x\}}$ – некоторые меры из множеств $\{\mu(du)\}_{\{t,x\}}$, $\{\nu(dv)\}_{\{t,x\}}$ соответственно, и $\Gamma_u = \{\tau_i^{(u)}\}$, $\Gamma_v = \{\tau_j^{(v)}\}$ – такие разбиения полуоси $[t_0, \infty)$, что $\tau_0^{(u)} = \tau_0^{(v)} = t_0$, $\tau_{i+1}^{(u)} > \tau_i^{(u)}$, $\tau_{i+1}^{(v)} > \tau_i^{(v)}$ и $\tau_n^{(u)} \to \infty$, $\tau_n^{(v)} \to \infty$ при $n \to \infty$.

Будем рассматривать еще две специальные стратегии U_T и V_T и называть их тривиальными.

Стратегия U_T в паре с какой-либо стратегией V_a при выбранном разбиении $\Gamma = \{\tau_i\}$ определяет движение $x[t] = x[t, t_0, x_0; U_T, V_a, \Gamma]$ как абсолютно – непрерывную функцию $x[t]$ $(x[t_0] = x_0)$ при почти всех $t \geq t_0$, удовлетворяющую контингенции

$$\frac{dx[t]}{dt} \in \mathcal{F}_u(t, x[t], \nu(dv)_{\{\tau_i, x[\tau_i]\}}) (\tau_i \leq t < \tau_{i+1}) \qquad /1.4/$$

где $\nu(dv)_{\{\tau_i, x[\tau_i]\}} \in \{\nu(dv)\}_{\{\tau_i, x[\tau_i]\}}$, $\mathcal{F}_u(t, x, \nu(dv))$ – выпуклая оболочка множества векторов

$$f_u = \int f(t, x, u, v)\nu(dv), \ u \in U. \qquad /1.5/$$

Стратегия V_T в паре с некоторой стратегией U_a при разбиении $\Gamma = \{\tau_i\}$ определяет решение $x[t] = x[t, t_0, x_0; U_a, \Gamma; V_T]$ как абсолютно – непрерывную функцию $x[t]$ $(x[t_0] = x_0)$ при почти всех $t \geq t_0$, удовлетворяющую контингенции

$$\frac{dx[t]}{dt} \in \mathcal{F}_v(t, x[t], \mu(du)_{\{\tau_i, x[\tau_i]\}}) (\tau_i \leq t < \tau_{i+1}),$$

где $\mu(du)_{\{\tau_i, x[\tau_i]\}} \in \{\mu(du)\}_{\{\tau_i, x[\tau_i]\}}$ и $\mathcal{F}_v(t, x, \mu(du))$ – выпуклая оболочка множества векторов

$$f_v = \int f(t, x, u, v)\mu(du), \ v \in V.$$

В дальнейшем будем употреблять следующие обозначения. Под $X(\cdot, t_0, P, V_a, \Gamma)$ будем понимать множество всех решений системы /1.4/, определенных на некотором промежутке $[t_0, t_1]$ при начальных условиях из некоторого множества P и порожденных стратегиями V_a, U_T и разбиением Γ. Если $V_a \div \nu(dv)$, т.е. стратегия V_a задается мерой, не зависящей от переменных t, x, то решение системы /1.4/, порожденное этой стратегией и U_T, будем обозначать $x[t] = x[t, t_0, x_0; U_T, \nu]$, а множество всех решений при начальных условиях $x[t_0] = x_0 \in P$, определенных при $t \in [t_0, t_1]$, – через $X(\cdot, t_0, P, \nu)$.

Сечения множеств $X(\cdot, t_0, P, \nu)$ и $X(\cdot, t_0, P, V_a, \Gamma)$ гиперплоскостью $t = \theta \in [t_0, t_1]$ обозначим через $X(\theta, t_0, P, \nu)$, $X(\theta, t_0, P, V_a, \Gamma)$ соответственно. Заметим, что множества $X(\cdot, t_0, P, \nu)$ и $X(\cdot, t_0, P, V_a, \Gamma)$ бу-

дут компактны в себе на отрезке $[t_0, t_1]$ в метрике равномерной сходимости, если ограничено и замкнуто множество P. Следовательно, в таком случае множества $X(\theta, t_0 P, v)$ и $X(\theta, t_0, P, V_a, \Gamma)$ будут ограниченными и замкнутыми.

Скажем, что система /I.I/, /I.2/ из точки $\{t_*, x_*\}$ поглощает множество M в момент $\theta (t_* \leq \theta)$ позиционно, если для любой стратегии V_a и разбиения Γ среди решений $X(\cdot, t_*, x_*, V_a, \Gamma)$, определенных при $t \in [t_*, \theta]$, найдется по крайней мере одно движение $x[t]$, пересекающееся с M в момент θ. Множество $W(t_*, \theta)$ таких точек x_*, для которых из позиции $\{t_*, x_*\}$ система поглощает множество M в момент θ, и только таких будем называть множеством позиционного поглощения цели M в момент θ.

Систему множеств $W(t)$, определенную при $t \in [t_0, \theta] (t_0 < \theta)$, будем называть сильно u-стабильной на этом промежутке [7], если для любых $t_* \in [t_0, \theta]$, $x_* \in W(t_*)$, меры v_* и числа $\Delta > 0$ $(\Delta \leq \theta - t_*)$ среди движений $X(\cdot, t_*, x_*, v_*)$, определенных при $t \in [t_*, t_* + \Delta]$, найдется по крайней мере одно, пересекающееся с множеством $W(t_* + \Delta)$ в момент $t = t_* + \Delta$.

§ 2.

В этом параграфе будет сформулирован и доказан ряд вспомогательных предложений.

Л е м м а 2.I. Для множеств $X(t, t_1, x_1, v), X(t+\Delta, t_1+\Delta, x_2, v)$ $(t_1 + \Delta > 0)$ имеют место включения

$$X_\varepsilon(t, t_1, x_1, v) \supset X(t+\Delta, t_1+\Delta, x_2, v) \qquad /2.I/$$

$$X(t, t_1, x_1, v) \subset X_\varepsilon(t+\Delta, t_1+\Delta, x_2, v)$$

$$\varepsilon = (\|x_2 - x_1\| + \varepsilon_0/N) \exp N(t - t_1) - \varepsilon_0/N,$$

которые справедливы в любой ограниченной области $t, t+\Delta \in [t_0, \theta]$, $x_1, x_2 \in G$ и $|\Delta| < \delta(\varepsilon_0, G)$. Здесь N - постоянная Липшица для вектор-функции $f(t, x, u, v)$, $\varepsilon_0 > 0$ -сколь угодно малое число, число $\delta(\varepsilon_0, G) > 0$ находится по ε_0 и области G из равномерной непрерывности $f(t, x, u, v)$ на множестве $[t_0, \theta] \times G \times U \times V$, т.е. из условия

$$\|f(t', x, u, v) - f(t'', x, u, v)\| < \varepsilon_0$$

при всех $t', t'' \in [t_0, \theta]$, $|t'' - t'| < \delta(\varepsilon_0, G)$, $x \in G$, $u \in U$, $v \in V$.

Символ P_ε обозначает евклидову ε-окрестность множества P.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2.I. проводится аналогично доказательству известной теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий в случае дифференциального уравнения с правой частью, удовлетворяющей теореме Коши.

Теперь введем в рассмотрение функцию $\varkappa(t, x)$, определяемую равенством

$$\varkappa(t,x)=\sup_{V_a,\Gamma}\rho(M,X(\theta,t,x,V_a,\Gamma))\ (t\le\theta), \qquad /2.2/$$

где M -ограниченное, замкнутое множество и $\rho(P,Q)=\min_{p\in P,q\in Q}\|p-q\|$ - евклидово расстояние между ограниченными, замкнутыми множествами P и Q. Для функции $\varkappa(t,x)$ справедлива

Лемма 2.2. Функция $\varkappa(t,x)$ непрерывна по совокупности переменных $\{t,x\}$.

Доказательство. Любой заданной стратегии $V_a\div\{v(dv)\}_{\{t,x\}}$ и разбиению $\Gamma=\{\tau_i\}$ поставим в соответствие разбиение $\Gamma'=\{\tau'_i\}$ ($\tau'_i=\tau_i+t''-t'$) и стратегию $V'_a\div\{v'(dv)\}_{\{t,x\}}$ соотношением

$$\{v'(dv)\}_{\{t,x\}}=\bigcup_{x_i\in R_i}\{v(dv)\}_{\{\tau_i,x_i\}},\ \tau'_i\le t<\tau'_{i+1}. \qquad /2.3/$$

Здесь x_i -точка из множества $X(\tau_i,t',x',V_a,\Gamma)$, ближайшая к x, а R_i -множество всех таких точек. Можно проверить, что множества $\{v'(dv)\}_{\{t,x\}}$ из /2.3/ слабо полунепрерывны сверху относительно включения по переменной x, т.е. стратегия V'_a будет допустимой.

Для открытого шара радиуса r_1 с центром в начале координат $G_1=\{x:\|x\|<r_1,\ 0<r_1<\infty\}$ в силу липшицевости $f(t,x,u,v)$ по x существует шар $G_2=\{x:\|x\|<r_2,\ 0<r_2<\infty\}$, для которого справедливо включение

$$X(\tau,t,x,V_a^*,\Gamma_*)\subset G_2$$

при всех $\tau\ge t,\ \tau,t\in[t_0,\theta],\ x\in G_1$ и всех V_a^*,Γ_*. Тогда в точках τ_i, τ'_i, для $x',x''\in G_1$ и V_a,Γ,V'_a,Γ' из соотношений /2.1/ вытекает оценка

$$X(\tau'_i,t'',x'',V'_a,\Gamma')\subset X_{\delta_i}(\tau_i,t',x',V_a,\Gamma), \qquad /2.4/$$
$$\delta_i=(\delta_{i-1}+\varepsilon_0/N)\exp N(\tau_i-\tau_{i-1})-\varepsilon_0/N,$$

справедлива при $|t''-t'|<\delta(\varepsilon_0,G_2)$ и при

$$X(\tau'_{i-1},t'',x'',V'_a,\Gamma')\subset X_{\delta_{i-1}}(\tau_{i-1},t',x',V_a,\Gamma).$$

Для множества $P\subset G_2$, удовлетворяющего условию $X(t,t_1,P,V_a^*,\Gamma_*)\subset G_2$ при всех $t,t_1\in[t_0,\theta]$ и V_a^*,Γ_*, имеют место включения

$$X_\alpha(t,t_1,P,V_a^*,\Gamma_*)\supset P$$
$$X(t,t_1,P,V_a^*,\Gamma_*)\subset P_\alpha \quad (\alpha=\alpha_0(t-t_1)) \qquad /2.5/$$

при всех $t,t_1\in[t_0,\theta]$ и V_a^*,Γ_*.

Здесь $\alpha_0=\max\|y\|$ при $y\in\mathcal{F}_{uv}(t,x)$, $t\in[t_0,\theta]$, $x\in G_2$, где $\mathcal{F}_{uv}(t,x)$ -выпуклая оболочка множества векторов $f_{uv}=f(t,x,u,v)$, $u\in U$, $v\in V$.

Из выражений /2.4/ и /2.5/ следует соотношение

$$X(\theta,t'',x'',V'_a,\Gamma')\subset X_{\alpha_1}(\theta,t',x',V_a,\Gamma) \qquad /2.6/$$
$$\alpha_1=(\|x''-x'\|+\varepsilon_0/N)\exp N(\theta-t_0)+\alpha_0\varepsilon_0,$$

справедливое при всех $x', x'' \in G_1$, $t', t'' \in [t_0, \theta]$, $|t''-t'| < \delta(\varepsilon_0, G_2) < \varepsilon_0$, и, согласно определению /2.2/ функции $\varkappa(t,x)$ из /2.6/, получаем оценку для тех же t', t'', x', x''

$$\varkappa(t',x') \le \varkappa(t'',x'') + \alpha_1. \qquad /2.7/$$

Поменяв ролями в проведенных рассуждениях точку $\{t', x'\}$ на $\{t'', x''\}$, получим еще неравенство

$$\varkappa(t'',x'') \le \varkappa(t',x') + \alpha_1. \qquad /2.8/$$

Так как из приведенных выкладок видно, что α_1 не зависит от V_a, Γ, то из /2.7/ и /2.8/ и следует непрерывность функции $\varkappa(t,x)$.

§ 3.

В этом параграфе будут указаны некоторые свойства позиционного поглощения в момент θ. Из определения $W(t,x)$ и непрерывности $\varkappa(t,x)$ непосредственно получаем одно свойство.

Следствие 3.1. Множество $W(t,\theta)$ при каждом $t \ge \theta$ замкнуто.

Теорема 3.1. Если множество $W(t_0,\theta)$ непусто, то непусто любое из множеств $W(t,\theta)$, $t \in [t_0, \theta]$ и система множеств $W(t,\theta)$ будет сильно u -стабильной при $t \in [t_0, \theta]$.

Доказательство. Предположим обратное. Допустим, что $W(t_0,\theta)$ непусто, но существует по крайней мере одна точка $t_1 \in [t_0, \theta]$, в которой $W(t_1,\theta)$ пусто, либо множества $W(t,\theta)$ при $t \in [t_0,\theta]$ непусты, но не обладают свойством сильной u -стабильности. Тогда найдутся точки $t_* \in [t_0, \theta]$, $x_* \in W(t_*,\theta)$, число $\Delta > 0$ $(\Delta \le \theta - t_*)$ и мера ν_*, для которых любое решение $x[t] = x[t, t_*, x_*; U_T; \nu_*]$ не будет пересекать в момент $t = t_* + \Delta$ множество $W(t_*+\Delta, \theta)$. /Заметим, что для первого случая имеем $t_* = t_1$, $\Delta = t_1 - t_*$ /. Покажем, что при этом предположении можно построить стратегию $V_a^{(\varepsilon)} \div \{\nu^{(\varepsilon)}(d\nu)\}_{\{t,x\}}$ и разбиение $\Gamma_\varepsilon = \{\tau_i^{(\varepsilon)}\}$, которые уводят точку $x[t_*] = x_*$ от множества M в момент $t = \theta$. Положим $\tau_0^{(\varepsilon)} = t_*$, $\tau_1^{(\varepsilon)} = t_* + \Delta$ и

$$\{\nu^{(\varepsilon)}(d\nu)\}_{\{t,x\}} = \nu_*, \quad t_* \le t < t_* + \Delta \qquad /3.1/$$

Для определения стратегии $V_a^{(\varepsilon)}$ при $t \in [t_*+\Delta, \theta]$ и точек $\tau_i^{(\varepsilon)}$ при $i > 1$ сделаем следующие построения.

Из покрытия замкнутого, ограниченного множества $X(t_*+\Delta, t_*, x_*, \nu_*)$ системой множеств $S(y,\delta_1) = \{x: \|x-y\| \le \delta_1,\ 0<\delta_1<\delta_0,\ y \in X(t_*+\Delta, t_*, x_*, \nu_*)\}$ выделим конечное подпокрытие множества $X(t_*+\Delta, t_*, x_*, \nu_*) - S_k = \{x: \|y_k - x\| < \delta_1,\ y_k \in X(t_*+\Delta, t_*, x_*, \nu_*)\}$ $(k = 1,2,\dots,K)$.

Здесь $\delta_0 = \rho(X(t_*+\Delta, t_*, x_*, \nu_*),\ W(t_*+\Delta, \theta))$.

Таким образом, $X(t_*+\Delta, t_*, x_*, \nu_*) \subset \bigcup_{k=1} S_k$. В соответствии с выбором числа δ_1 и непрерывностью функции $\varkappa(t,x)$

будем иметь неравенство $\max_{x\in V} æ(t_* +\Delta, x)=\mathcal{E}_0>0$. Тогда по определению /2.2/ для числа $\mathcal{E}_1>0$ $(\mathcal{E}_1<\mathcal{E}_0)$ и для точки y_k $(k=1,2,\dots,K)$ можно найти стратегию $V_a^{(k)}\div\{\nu^{(k)}(dv)\}_{\{t,x\}}$ и разбиение $\Gamma_k=\{\tau_i^{(k)}\}(\tau_0^{(k)}=t_*+\Delta, \tau_{n_k}^{(k)}=\theta)$, для которых будет иметь место неравенство $\rho(X(\theta,t_*+\Delta,y_k,V_a^{(k)},\Gamma_k),$ $M)\geqslant\mathcal{E}_1$.

Определим точки разбиения Γ_e при $i>1$ выражением

$$\tau_i^{(e)}=t_*+\Delta+\frac{\theta-t_*-\Delta}{n_0}(i-1)\ (i=2,3,\dots,n_0), \qquad /3.2/$$

где n_0 -пока некоторое произвольное натуральное число. Промежуток $[\tau_i^{(e)},\ \tau_{i+1}^{(e)})$ $(i=1,2,\dots,n_0-1)$ можно отнести к одному из видов: либо $(\tau_i^{(e)},\ \tau_{i+1}^{(e)})$ не содержит ни одной точки разбиений Γ_k $(k=1,2,\dots,K)$, либо содержит по крайней мере одну точку некоторого разбиения Γ_k . В последнем случае для стратегии $V_a^{(e)}$ положим

$$\{\nu^{(e)}(dv)\}_{\{t,x\}}=\{\nu\},\ \ t\in[\tau_i^{(e)},\tau_{i+1}^{(e)}], \qquad /3.3/$$

где $\{\nu\}$ - множество всевозможных регулярных, нормированных на V мер $\nu(dv)$. На промежутке $[\tau_i^{(e)},\tau_{i+1}^{(e)})$ первого вида в точке $\{t,x\}$ множество мер $\{\nu^{(e)}(dv)\}_{\{t,x\}}$ построим следующим образом. Найдем для разбиения Γ_k $(k=1,2,\dots,K)$ точку $\tau_{i_k}^{(k)}$ из условия, что $(\tau_{i_k}^{(k)},\tau_{i_k+1}^{(k)})\supset(\tau_i^{(e)},\tau_{i+1}^{(e)})$, и множество $Z_0(t,x)$ всех ближайших к X точек из множества $Z(t)=\bigcup_{k=1}^{K}X(t,t_*+\Delta,y_k,V_a^{(k)},\Gamma_k)$. Символом $Y_k(\cdot,t_1,x)$ обозначим множество всех решений $x[t]\in X(\cdot,t_*+\Delta,y_k,V_a^{(k)},\Gamma_k)$, пересекающихся с множеством $Z_0(t,x)$ в момент t_1 . Тогда стратегию $V_a^{(e)}$ на промежутке первого вида определим выражением

$$\{\nu^{(e)}(dv)\}_{\{t,x\}}=\bigcup\{\nu^{(k)}(dv)\}_{\{\tau_{i_k}^{(k)},y\}}\quad t\in[\tau_i^{(e)},\tau_{i+1}^{(e)}], \qquad /3.4/$$

где суммирование проводится по всем $y\in Y_k(\tau_{i_k}^{(k)})$ и $k=1,2,\dots,K$.Таким образом, соотношения /3.2/,/3.3/ и /3.4/ определяют стратегию $V_a^{(e)}$ при всех $x\in\{x\}$ и $t\in[t_0,\theta]$. В точках t , где имеют место/3.2/, /3.3/, множества $\{\nu^{(e)}(dv)\}_{\{t,x\}}$ очевидно слабо полунепрерывны сверху по включению по переменной x .

Слабая полунепрерывность по включению по x в точках t , определяемых выражением /3.4/, следует из полунепрерывности сверху по включению по переменной x множества $Z_0(t,x)$ и множества $Y_k(\tau_{i_k}^{(k)},x)$ в точках $x\in X(t,t_*+\Delta,y_k,V_a^{(k)},\Gamma_k)$. Из оценок/2.5/, /2.6/ можно получить включение

$$X(\theta,t_*,x_*,V_a^{(e)},\Gamma_e)\subset Z_{\mathcal{E}_2}(\theta) \qquad /3.5/$$

при

$$\mathcal{E}_2=(\delta_1+\frac{2\alpha_0(\theta-t_*-\Delta)\sum_{k=1}^{K}n_k}{n_0}\exp N(\theta-t_*) \qquad /3.6/$$

Выбрав δ_1, например, из неравенства $2\delta_1 < \varepsilon_3 \exp N(\theta - t_*)$, где $0 < \varepsilon_3 < \varepsilon_1$, натуральное число n_0 из неравенства

$$2n_0 > (\alpha_0/\varepsilon_3(\theta - t_*)\sum_{k=1}^{K} n_k)\exp N(\theta - t_*),$$

из /3.6/ будет следовать, что $\rho(X(\theta, t_*, x_*, V_a^{(e)}, \Gamma_e), M) \geq \varepsilon_3 > 0$, т.е. $x_k \bar{\in} W(t_*, \theta)$ вопреки предположению. Из этого противоречия и вытекает утверждение теоремы 3.I.

Теорема 3.2. Если множество $W(t_0, \theta)$ непусто,то множество $W(t, \theta)$ непрерывно справа в любой точке $t \in [t_0, \theta], (t_0 < \theta)$.

Доказательство. По теореме 3.I. при любом $t_1 \in [t_0, \theta]$ $\Delta > 0$ $(\Delta < \theta - t_1)$ множества $W(t_1, \theta), W(t_1 + \Delta, \theta)$ непусты, и для любой точки $x_1 \in W(t_1, \theta)$, меры $\nu = \nu(d\nu)$ существует решение $x_1[t] = x[t, t_1, x_1, \nu]$, удовлетворяющее включению $x_1[t_1 + \Delta] \in W(t_1 + \Delta, \theta)$. Согласно оценке /2.5/, имеем соотношение $\|x_1[t_1 + \Delta] - x_1[t_1]\| \leq \alpha_0 \Delta$, что эквивалентно включению

$$W_{\alpha_0 \Delta}(t_1 + \Delta, \theta) \supset W(t_1, \theta). \qquad /3.7/$$

Если последовательность $\{\Delta_k\} \to t_1 + 0$ и $\{x_k\} \to x_0 (x_k \in W(t_1 + \Delta_k, \theta))$, то в силу непрерывности функции $\varkappa(t, x)$ будет следовать, что $x_0 \in W(t_1, \theta)$. Это будет означать полунепрерывность $W(t, \theta)$ сверху по включению по переменной x справа в точке $t = t_1$, из которой вместе с /3.7/ вытекает непрерывность в точке $t = t_1$ справа.

§ 4.

В данном параграфе будет введено и изучено некоторое множество $\varphi(\tau_1, \tau, P)$, с помощью которого определяется множество позиционного поглощения в момент $W(t, \theta)$. Точка $x' \in \varphi(\tau_1, \tau, P)$ $(\tau_1 \geq \tau)$ тогда и только тогда, когда для любой меры ν найдется решение $x[t] = x[t, \tau, x', \nu]$, пересекающее ограниченное и замкнутое множество P в момент $t = \tau_1$.

Множества $\varphi(\tau_1, \tau, P)$ обладают следующими свойствами.

I°. Множество $\varphi(\tau_1, \tau, P)$ ограниченно и имеет место включение

$$\varphi(\tau_1, \tau, P) \subseteq \varphi(\tau_1, \tau, P_1) \qquad /4.1/$$

при $P \subseteq P_1$.

Ограниченность $\varphi(\tau_1, \tau, P)$ следует из ограниченности множества P и липшицевости по x вектор-функции $f(t, x, u, v)$. Включение /4.I/ следует из определения множества $\varphi(\tau_1, \tau, P)$.

2°. $\varphi(\tau_2, \tau_1, \varphi(\tau_1, \tau, P)) \subseteq \varphi(\tau_2, \tau, P_1)$ $(\tau_2 \leq \tau_1 \leq \tau)$, если $P \subseteq P_1$.

Действительно, если $x \in \varphi(\tau_2, \tau_1, \varphi(\tau_1, \tau, P))$, то имеет место вы-

ражение $X(\tau_2,\tau,x,\nu_{\{t\}})\cap P\neq\Phi$ для любой кусочно-постоянной меры вида

$$\nu_{\{t\}}=\begin{cases}\nu_1, & \tau\le t<\tau_1,\\ \nu_2, & \tau_1\le t<\tau_2,\end{cases}$$

в частности, для любой постоянной меры $\nu_{\{t\}}=\nu_1=\nu_2=\nu\ (t\in[\tau,\tau_2])$, т.е. $x\in\varphi(\tau_2,\tau,P)$. Отсюда с учетом /4.I/ и получаем свойство 2.

3°. Множество $\varphi(\tau_1,\tau,P)$ замкнуто. Если в /I.I/ $f(t,x,u,v)\equiv\equiv A(t)x+g(t,u,v)$, где $A(t)$ -непрерывная матрица по t и P выпукло, то множество $\varphi(\tau_1,\tau,P)$ выпукло.

Доказательство. Предположим, что $\varphi(\tau_1,\tau,P)$ незамкнуто. Тогда для $\varphi(\tau_1,\tau,P)$ существует предельная точка $x_*\bar{\in}\varphi(\tau_1,\tau,P)$, для которой найдется мера ν_* такая, что $X(\tau_1,\tau,x_*,\nu_*)\cap P=\Phi$. В силу замкнутости множеств P и $X(\tau_1,\tau,x_*,\nu_*)$ будем иметь неравенство

$$\rho(P,X(\tau_1,\tau,x_*,\nu_*))=\varepsilon_0>0. \qquad /4.2/$$

По непрерывности множества $X(\tau_1,\tau,x,\nu_*)$ по x для $\varepsilon_1>0\ (\varepsilon_1<\varepsilon_0)$ существует такое $\delta(\varepsilon_1)>0$, при которых справедливы соотношения:

$$X_{\varepsilon_1}(\tau_1,\tau,x,\nu_*)\supset X(\tau_1,\tau,x_*,\nu_*),$$
$$X(\tau_1,\tau,x,\nu_*)\subset X_{\varepsilon_1}(\tau_1,\tau,x_*,\nu_*), \qquad /4.3/$$

как только $\|x-x_*\|<\delta(\varepsilon_1)$. Из /4.2/, /4.3/ следует неравенство $\rho(P,X(\tau_1,\tau,x,\nu_*))>0$ для всех x, удовлетворяющих условию $\|x-x_*\|<\delta(\varepsilon_1)$, т.е. точка x_* не будет предельной для множества $\varphi(\tau_1,\tau,P)$, вопреки предположению. Значит, $\varphi(\tau_1,\tau,P)$ замкнуто. Пусть теперь $f(t,x,u,v)\equiv A(t)x+g(t,u,v)$ и множество P выпукло.

Для любых точек $x_1,x_2\in\varphi(\tau_1,\tau,P)$ меры ν существуют решения $x_1[t]\in X(\cdot,\tau,x_1,\nu)$, $x_2[t]\in X(\cdot,\tau,x_2,\nu)$, для которых $x_1[\tau_1]\in P$, $x_2[\tau_1]\in P$. Тогда функция $x_\lambda[t]=\lambda x_1[t]+(1-\lambda)x_2[t]\ (0\le\lambda\le1)$ в силу линейности $f(t,x,u,v)$ по x будет решением системы /I.4/ и $x_\lambda[\tau_1]=\lambda x_1[\tau_1]+(1-\lambda)x_2[\tau_1]\in P$ в силу выпуклости P, т.е. точка $x_\lambda=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in\varphi(\tau_1,\tau,P)$. Это и означает, что множество $\varphi(\tau_1,\tau,P)$ выпукло.

С помощью введенной операции $\varphi(\tau_1,\tau,P)$ определим по индукции следующие множества

$$\varphi_n(0)=M,\quad \varphi_n(k+1)=\varphi(\theta-(k+1)/2^n,\ \varphi_n(k)) \qquad /4.4/$$

для всех натуральных k,n, удовлетворяющих неравенству $2^n\theta\ge k$.

Согласно свойствам I°- 3° множества $\varphi_n(k)$ будут ограниченными, замкнутыми и удовлетворяющими включению

$$\varphi_{n+m_1}(2^{m_1}k)\subset\varphi_{n+m_2}(2^{m_2}k) \qquad /4.5/$$

при всех натуральных $m_1\le m_2$.

В соответствии с включением /4.5/ в каждой двоичной точке, т.е.

в точке вида $t=\vartheta-n_1/2^{n_2}$ /n_1, n_2 -натуральные числа/, последовательность множ $\{\varphi_{n_2+n}(2^n n_1)\}$ будет сходящейся при $n\to\infty$ как монотонно убывающ и определяет некоторое множество $W(t)$ соотношением

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{n_2+n}(2^n n_1)=\bigcap_n \varphi_{n_2+n}(2^n n_1)=W(t). \qquad /4.6/$$

Из определений /4.4/, /4.6/ следует, что свойства I°– 3° будут иметь место и для множества $W(t)$.

§ 5.

Теперь будет установлена связь между множеством $W(t)$ и множеством позиционного поглощения момент $W(t,\vartheta)$.

Т е о р е м а 5.I. Если множество $W(t_0)$, где t_0 -двоичная точка и $t_0<\vartheta$, непусто, то система множеств $W(t)$, $t\in[t_0,\vartheta]$ /t -двоичная точка/ определяет множество позиционного поглощения в момент $W(t,\vartheta)$ выражениями

$$W(t)=W(t,\vartheta),\ \tau\in[t_0,\vartheta], \qquad /5.I/$$

если t двоичная точка, и

$$W(t',\vartheta)=\lim_{k\to\infty}\{W(\tau_k)\},\ \tau_k, t'\in[t_0,\vartheta], \qquad /5.2/$$

если t' не будет двоичной точкой. Здесь $\{t_k\}\to t'+0$ при $k\to\infty$ последовательность двоичных точек.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $W(\tau_0)$ непусто и $t_*\in[t_0,\vartheta]$- двоичная точка. Покажем, что в этом случае справедливо равенство /5.I/. Для этого сначала построим решение $x_*[t]\in X(\cdot, t_*, x_*, V_a, \Gamma)$, соответствующее $x_*\in W(t_*)$ стратегии $V_a\div\{\nu(d\nu)\}_{\{t,x\}}$ и разбиению $\Gamma=\{\tau_i\}(\tau_0=t_*, \tau_{m_0}=\vartheta)$ и которое будет пересекать множество M в момент $t=\vartheta$ для любых, но фиксированных $x_*\in W(t_*)$, V_a, Γ . Тогда это будет означать, что $W(t_*)\subset W(t_*,\vartheta)$.

Решение $x_*[t]$ будем строить при помощи системы множеств $\{\varphi_{n_2+n_0}(2^{n_0}n_1-\ell)$, где $t_*=\vartheta-n_1/2^{n_2}$, $\ell=0,1,\dots,2^{n_0}n_1$ и n_0 которое натуральное число, удовлетворяющее условию

$$2^{n_0}\min_{0\le i<m_0}(\tau_{i+1}-\tau_i)>1.$$

Для любого n_0 по определению $W(t_*)$ будем иметь

$$x_*\in\varphi_{n_2+n_0}(2^{n_0}n_1),\quad \varphi_{n_1+n_0}(0)=M.$$

В дальнейшем потребуются натуральные числа ℓ_i и точки τ_i', τ_i'', которые находятся из неравенств

$$\tau_i'=\frac{2^{n_0}n_1-\ell_{i-1}}{2^{n_0+n_2}}\le\tau_i<\frac{2^{n_0}n_1-\ell_i}{2^{n_0+n_2}}=\tau_i''\quad(i=1,2,\dots,n_0-1).$$

Для общности рассуждений положим $\tau_0'=\tau_0''=t_*$, $\tau_{n_0}'=\tau_{n_0}''=\vartheta$.

Решение $x_*[t]$ будем определять на отрезках $[\tau_{i-1}',\tau_i']$ последовательно по возрастанию индекса $i=1,2,\dots,n_0$. Итак, пусть $x_*[t]$

уже построено при $t\in[t_*,\tau_{i-1}]$ и соответствует некоторой реализации стратегии $V_a-\nu_{[t]}=\nu_{j-1}$ при $t\in[\tau_{j-1},\tau_j)$ $(j=1,2,\ldots,i-1)$, где $\nu_{j-1}\in\{\nu(d\nu)\}_{\{\tau_{j-1},x_*[\tau_{j-1}]\}}$. Заметим, что в силу определения /I.4/ решения системы /I.I/ для стратегий U_T, V_a реализация $\nu_{[t]}$ будет определена на промежутке $[t_*,\tau_{i-1})$ вообще большем, чем $[t_*,\tau'_{i-1})$, на котором определено решение $x_*[t]$. Реализации $\nu_{[t]}$ поставим в соответствие кусочно-постоянную программную меру $\nu_{\{t\}}$, определенную при $t\in[t_*,\tau'_{i-1})$, равенством

$$\nu_{\{t\}}=\begin{cases}\nu_{[\tau'_j]} & \text{при } t\in[\tau'_j,\tau''_j)\\ \nu_{[\tau_j]} & \text{при } t\in[\tau''_j,\tau'_{j+1})\end{cases}\quad (j=0,1,\ldots,i-1)$$

Пусть $x^*[t]=x^*[t,t_*,x_*;U_T;V'_a,\Gamma_1]$ будет решением системы /I.4/, порожденным стратегией $V_a\div\nu_{\{t\}}$ и разбиением $\Gamma_1=\{\tau_j^{(1)}\}$ $(\tau_0^{(1)}=t_*,\tau_j^{(1)}=t_*+j/2^{n_2+n_0})$, для которого пусть имеет место соотношение:

$$x^*[\tau_j^{(1)}]\in\varphi_{n_2+n_0}(2^{n_0}n_1-j)\quad(j=0,1,\ldots l_{i-1}).\qquad /5.3/$$

Продолжим теперь решение $x_*[t]$ на промежуток $[\tau'_{i-1},\tau'_i]$ следующим образом. На отрезке $[\tau'_{i-1},\tau''_{i-1}]$ положим $x_*[t]=x[t]$, где $x[t]=x[t,t_*,x_*;U_T;V_a,\Gamma]$ -любое решение системы /I.4/, проходящее в момент $t=\tau'_{i-1}$ через точку $x_*[\tau'_{i-1}]$. Пусть для продолженного уже решения $x_*[t]$ на отрезок $[t_*,\tau''_{i-1}]$ в момент $t=\tau_{i-1}\in[\tau'_{i-1},\tau''_{i-1})$ реализовалась на промежутке $[\tau_{i-1},\tau_i]$ некоторая мера $\nu_{[\tau_{i-1}]}\in\{\nu(d\nu)\}_{\{\tau_{i-1},x_*[\tau_{i-1}]\}}$. Для этой меры $\nu_{[\tau_{i-1}]}$, начальной точки $x^*[\tau''_{i-1}]$ в силу построения множеств $\varphi_{n_2+n_0}(2^{n_0}n_1-j)$ и соотношения /5.3/ найдется решение $x_{i-1}[t]=x[t,\tau''_{i-1},x^*[\tau''_{i-1}],\nu_{[\tau_{i-1}]}]$, для которого будем иметь соотношение $x_{i-1}[\tau'_i]\in\varphi_{n_2+n_0}(2^{n_0}n_1-l_{i-1})$.
Согласно лемме 2.I для $x_{i-1}[t]$ найдется решение $x'_{i-1}[t]\in X(\cdot,\tau''_{i-1},x_*[\tau''_{i-1}],\nu_{[\tau_{i-1}]})$, для которого справедлива оценка

$$\|x'_{i-1}[\tau'_i]-x_{i-1}[\tau'_i]\|\le\|x^*[\tau''_{i-1}]-x_*[\tau''_{i-1}]\|\exp N(\tau'_i-\tau''_{i-1})\qquad /5.4/$$

Тогда определим $x^*[t]$ и $x_*[t]$ при $t\in[\tau''_{i-1},\tau_i]$ выражением $x^*[t]=x_{i-1}[t]$, $x_*[t]=x'_{i-1}[t]$. Проводя индукцию по всем $i=1,2,\ldots,m_0$, таким образом построим функции $x^*[t]$ и $x_*[t]\in X(\cdot,t_*,x_*,V_a,\Gamma)$ на всем отрезке $[t_*,\theta]$.

Учитывая выражения /2.5/, /5.4/ для $x^*[t]$ и $x_*[t]$ получим рекуррентную оценку $\|x_*[\tau'_i]-x^*[\tau'_i]\|\le[\|x_*[\tau'_{i-1}]-x^*[\tau'_{i-1}]\|+2\alpha_0(\tau'_i-\tau'_{i-1})]\exp N(\tau'_i-\tau'_{i-1})\le[\|x_*[\tau'_{i-1}]-x^*[\tau'_{i-1}]\|+2\alpha_0/2^{n_2+n_0}]\exp N(\theta-t_*)$, из которой получаем, что $\|x_*[\theta]-x^*[\theta]\|\le\alpha_0 m_0/2^{n_2+n_0-1}\times\exp N(\theta-t_*)$, т.е. с учетом равенства $x_*[t_*]=x^*[t_*]=x_*$

$$\rho(X(\theta,t_*,x_*,V_a,\Gamma),M)\le(\alpha_0 m_0/2^{n_2+n_0-1})\exp[n_1N(\theta-t_*)]\qquad /5.5/$$

при любом $x_* \in W(t_*), V_a, \Gamma$ и натуральном n_0. В силу замкнутости множеств $X(\theta, t_*, x_*, V_a, \Gamma)$ и M это будет означать, что имеет место включение $W(t_*) \subset W(t_1, \theta)$. Докажем теперь от противного, что имеет место и обратное включение. Предположим, что существует точка $x_0 \in W(t_*, \theta)$ и $x_0 \bar{\in} W(t_*)$. Тогда в соответствии с определением /4.6/ множества $W(t_*)$ существует номер $N_0 > 0$, такой что при всех натуральных $n_0 > N_0$ будет иметь место выражение $x_0 \bar{\in} \varphi_{n_2+n_0}(2^{n_0} n_1)$. Построим некоторую стратегию $V_a^* \div \nu^*_{\{t\}}$, определяемую кусочно-постоянной мерой $\nu^*_{\{t\}}$ и некоторое соответствующее ей решение $x_0[t] = x[t, t_*, x_0; U_T; V_a^*, \Gamma_*]$ при разбиении $\Gamma_* = \{\tau_i\}$ $(\tau_0 = t_*, \tau_i = t_* + i/2^{n_2+n_0}, \tau_{m_0} = \theta)$ следующим образом.

Пусть на промежутке $[t_*, \tau_i)$ мера $\nu^*_{\{t\}}$ и решение $x_0[t]$ уже построены таким образом, что верны соотношения:

$$x_0[\tau_i] \bar{\in} \varphi_{n_2+n_0}(2^{n_0} n_1 - i), \qquad x_0[\tau_i] \in W(\tau_i, \theta). \tag{5.6}$$

Тогда по определению множеств $\varphi_{n_2+n_0}(2^{n_0} n_1 - i)$ для точки $x_0[\tau_i]$ существует постоянная мера ν_i такая, что любое решение $x[t] = x[t, \tau_i, x_0[\tau_i], \nu_i]$ не пересекает множество $\varphi_{n_2+n_0}(2^{n_0} n_1 - i - 1)$ в момент $t = \tau_{i+1}$. С другой стороны, для точки $x_0[\tau_i]$ меры ν_i по свойству сильной u-стабильности системы множеств $W(t, \theta)$ на отрезке $[\tau_i, \theta]$ найдется решение $x_i[t] = x[t, \tau_i, x_0[\tau_i], \nu_i]$, пересекающее множество $W(\tau_{i+1}, \theta)$ в момент $t = \tau_{i+1}$. Положим на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$ $\nu^*_{\{t\}} = \nu_i$ и $x_0[t] = x_i[t]$. Проводя индукцию по возрастающему индексу $i = 0, 1, \ldots, m_0$, определим таким образом функции $\nu^*_{\{t\}}$ и $x_0[t]$ при всех $t \in [t_*, \theta]$, для которых будут иметь место соотношения /5.6/ в точках $t = \tau_i$ $(i = 0, 1, \ldots, m_0)$, в частности, для $i = m_0 = 2^{n_0} n_1$ /5.6/ принимает вид $x_0[\theta] \in M$, $x_0[\theta] \bar{\in} M$. Но эти два соотношения несовместны. Из полученного противоречия следует, что $W(t_*, \theta) \subset W(t_*)$, которое вместе с доказанным выше включением $W(t_*, \theta) \supset W(t_*)$ и дают равенство /5.1/. Из /5.1/ и теоремы 3.2 непосредственно следует и вторая часть теоремы - соотношение /5.2/.

В заключение автор благодарит Н.Н.Красовского за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Поступила в редакцию 28.9.1970 г.

Л и т е р а т у р а

1. Л.С.Понтрягин. О линейных дифференциальных играх.2.Докл. АН СССР, т.175, № 4, /1967/ , стр. 764-766

2. **P.Varayia, J.Lin. Existence of saddle points in differential games. SIAM J.Control, v.7, N1, (1969) p. 141-157**

3. Б.Н.Пшеничный. Структура дифференциальных игр.Докл.АН СССР, т.184, № 2, /1969/ стр. 285-287

4. A. Friedman. Existence of Value and Saddle Points for Differential Games of Pursuit and Evasion. J. Diff. Eguations, v.7, N1, (1970) p.92-100.

5. Н.Н.Петров. О существовании значения игры преследования. Докл. АН СССР, т. I90, № 6, /I970/, стр. I289-I29I.

6. Н.Н.Красовский. Игровые задачи о встрече движений. М.I970,

7. Н.Н.Красовский. О дифференциальной игре сближения. Докл. АН СССР, т.I93, № 2, /I970/, стр. 284-287.

8. Н.Н.Красовский, А.И.Субботин. О структуре дифференциальных игр. Докл. АН СССР, т.I90, № 3, /I970/, стр. 523-526.

9. Б.Н. Пшеничный, М.И.Сагайдак. О дифференциальных играх с фиксированным временем. Кибернетика, № 2, /I970/ стр. 54-63.