Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1970 г. выпуск 7.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА НАВЕДЕНИЯ ПРИ ЗАПАЗДЫВАНИИ ИНФОРМАЦИИ. I

В.С.Шишмаков /Свердловск/

В данной статье рассматривается дифференциальная игра приведения на заданное множество при условии, что один игрок получает информацию о состоянии игры с постоянным запаздыванием. Рассуждения, проведенные в работе, базируются на экстремальной конструкции [5]. В первой части работы рассматривается вспомогательная программная задача, которая будет использована во второй части для построения оптимального управления первого игрока. Статья примыкает к работам [I - 4].

I. Пусть движение конфликтно управляемой системы описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+B(t)u-C(t)v,$$
$$t\geqslant t_0-\eta,\quad x[t_0-\eta]=x_0. \qquad /I.I/$$

Здесь η -положительная постоянная величина; x - n -мерный фазовый вектор системы; u и v -векторные управляющие воздействия размерности k и ℓ соответственно; $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ - -непрерывные по t матрицы соответствующих размерностей. Реализации управлений $u[t]$ и $v[t]$ в каждый момент времени $t\geqslant t_0-\eta$ стеснены ограничениями:

$$u[t]\in U_t\,,\quad v[t]\in V_t\,, \qquad /I.2/$$

где U_t , V_t - ограниченные, замкнутые и выпуклые множества, изменяющиеся непрерывно при изменении t .

Пусть задано выпуклое, замкнутое множество $M\subset E_n$. Рассматривается следующая игровая ситуация. Первый игрок / u / стремится привести движение /I.I/ на множество M . При этом в каждый момент времени $t\geqslant t_0$ он может строить свое управление на основании информации о положении системы /I.I/ в момент времени $t-\eta$. Управление $u[\tau]$ при $\tau\subset[t_0-\eta,\ t_0]$ будем считать известным. Второй игрок / v / стремится помешать приведению системы /I.I/ на множество M . В данной работе ситуация рассматривается с позиции первого игрока. Поэтому не будем оговаривать информированность второго игрока, полагая ее сколь угодно полной.

Введем следующие определения и обозначения.

О п р е д е л е н и е I.I. Допустимым программным управлением $u(t)(v(t))$ будем называть всякую суммируемую функцию, удовлетворяющую условию $u(t)\in U_t$ $(v(t)\in V_t)$.

О п р е д е л е н и е I.2. Позицией игры $p(t)$ в момент $t\geqslant t_0$ будем называть совокупность $\{t,\ x[t-\eta],u^t\}$, где u^t - реализация управления $u=u[\tau]$ при $\tau\in[t-\eta,t]$.

Определение I.3. Допустимой стратегией U первого игрока назовем правило, которое каждой позиции $\{t,x,u^t\}$ ставит в соответствие множество $U(t,x,u^t)$, удовлетворяющее следующим условиям:

I. Множество $U(t,x,u^t)\subset U_t$ является выпуклым и замкнутым.

2. Множества $U(t,x,u^t)$ полунепрерывны сверху относительно включения по t,x и ω - полунепрерывны сверху относительно включения по u^t .

Условие 2 означает следующее. Для любой позиции $\{t_*,x_*,u_*^{t_*}\}$, если выполняются условия $u^k\to u^*$; $t_k\to t_*$; $x_k\to x_*$; $u_k^{t_k}\xrightarrow[\omega]{}u_*^{t_*}$ и $u^k\in U(t_k,x_k,u_k^{t_k})$; то имеет место включение

$$u^*\in U(t_*,x_*,u_*^{t_*}),$$

где символом $\xrightarrow[\omega]{}$ обозначена слабая сходимость [7] последовательности функций $u_k^{t_k}(\xi)$ /здесь для удобства сделана замена $\xi=$ $=\tau+\eta-t_k$, $\tau\in[t_k-\eta,t_k)$ /, рассматриваемых как элементы пространства $L_{2[0,\eta]}$.

Допустимую стратегию первого игрока обозначим символом $U\div U(t,x,u^t)$. Относительно второго игрока будем считать, что его стратегия в каждый момент времени $t\geq t_0-\eta$ характеризуется множеством V_t . Такое определение стратегии позволяет охватить любой способ формирования управления второго игрока, порождающий суммируемую реализацию $v(t)$.

Определение I.4. Движением системы /I.I/ на отрезке времени $[t_0-\eta,\theta]$ будем называть всякую абсолютно-непрерывную функцию $x[t]$ $(t\in[t_0-\eta,\theta])$, удовлетворяющую при почти всех t следующему включению

$$\frac{dx[t]}{dt}\in A(t)x[t]+B(t)U(t)-C(t)V_t\,, \qquad /I.3/$$

где

$$U(t)=\begin{cases} u^{t_0}[t] & \text{при } t\in[t_0-\eta,t_0),\\ U(t,x[t-\eta],u^t) & \text{при } t\in[t_0,\theta].\end{cases}$$

Выражение в правой части /I.3/ следует понимать как алгебраическую сумму множеств. Справедливо следующее утверждение.

Теорема I.I. Пусть заданы допустимая стратегия первого игрока $U\div U(t,x,u^t)(t\geq t_0)$; стратегия второго игрока V_t $(t\geq t_0-\eta)$; начальная позиция $\{t_0,x_0,u^{t_0}\}$ и отрезок времени $[t_0-\eta,\theta]$. Тогда на отрезке времени $[t_0-\eta,\theta]$ существует хотя бы одно движение системы /I.I/, удовлетворяющее начальному условию $x[t_0-\eta]=x_0$.

Доказательство этой теоремы приведено в п.3.

Приведем теперь формулировку задачи, рассматриваемой в работе.

Задача I.I. Требуется построить допустимую стратегию первого игрока $U^0 \div U^0(t, x, u^t)(t \geqslant t_0)$ такую, что любое движение системы /I.3/ дифференциальных уравнений в контингенциях [6] попадает на множество M не позже конечного момента времени θ.

2. Рассмотрим вспомогательную программную задачу, которая будет использована для построения оптимальной стратегии первого игрока U^0.

В пространстве фазовых координат $\{x\}$ для выбранного момента θ каждому моменту $t \leqslant \theta$ и допустимому управлению $u^t(\tau)$ $(\tau \in [t-\eta, t))$ поставим в соответствие множество $W(u^t, t, \theta)$, определяемое следующим образом.

Определение 2.I. Множество $W(u^t, t, \theta)$ - множество всех точек W, обладающих следующим свойством: для любого допустимого управления $v(\tau)$ $(\tau \in [t-\eta, \theta])$ можно подобрать допустимое управление $u(\tau)$ $(\tau \in [t, \theta])$ такое, что пара управлений $v(\tau)$ и $u^*(\tau)$, где

$$u^*(\tau) = \begin{cases} u^t(\tau), & \tau \in [t-\eta, t), \\ u(\tau), & \tau \in [t, \theta], \end{cases}$$

переводит систему /I.I/ из точки $x(t-\eta) = W$ в некоторое положение $x[\theta] \in M$.

В соответствии с определением 2.I множество $W(u^t, t, \theta)$ можно задать как совокупность точек W, для которых справедливо включение

$$G^{(2)}(t-\eta, \theta) \subset G^{(1)}(t, \theta) + X(\theta, t-\eta)w + g^t - M. \qquad /2.1/$$

Здесь $G^{(1)}(t, \theta)$ и $G^{(2)}(t, \theta)$ - области достижимости соответственно первого и второго игроков из состояния $x[t] = 0$ к моменту $\theta \geqslant t$; $X(\theta, t)$ -фундаментальная матрица системы /I.I/; вектор g^t задается выражением

$$g^t = \int_{t-\eta}^{t} X(\theta; \tau) B(\tau) u^t(\tau) d\tau. \qquad /2.2/$$

Известно /см., например, [5]/, что $G^{(1)}(t, \theta)$, $G^{(2)}(t, \theta)$ - выпуклые, замкнутые, ограниченные множества. Также, без ограничения общности, можно полагать множество M ограниченным, поскольку движения системы /I.I/ рассматриваются на конечном отрезке времени. Тогда из /2.I/ вытекает следующее свойство множеств $W(u^t, t, \theta)$:

/I/ Множество $W(u^t, t, \theta)$ /если оно непусто/ - выпукло, замкнуто и ограничено.

Сразу из определения 2.I следует свойство:

/П/ Если точка $W \in W(u^\theta, \theta, \theta)$, то любое движение системы /I.I/, исходящее из $x[\theta-\eta] = W$ попадает в момент θ на множество M .

Определение 2.2. Моментом поглощения $\theta^0(t, x, u^t)$, отвечающим позиции игры $\{t, x, u^t\}$, назовем наименьшее значение параметра θ, при котором имеет место включение $x \in W(u^t, t, \theta)$.

Определение 2.3. Поглощение стабильно /множества $W(u^t, t, \theta^0)$ стабильны/, если для любой точки $w \in W(u^t, t, \theta^0)$ и любого управления $v(\tau)$, $(\tau \in [t-\eta, t+\eta+\Delta))$ можно подобрать управление $u(\tau)$, $(\tau \in [t, t+\Delta))$ такое, что пара управлений $v(\tau)$ и $u^t(\tau)$, $(\tau \in [t-\eta, t-\eta+\Delta))$ переводит систему /1.1/ из точки $x[t-\eta]=w$ в некоторое положение $x[t-\eta+\Delta] \in W(u^{t+\Delta}, t+\Delta, \theta^0)$, где

$$u^{t+\Delta} = u^{t+\Delta}(\tau) = \begin{cases} u^t(\tau) & \text{при } \tau \in [t-\eta+\Delta, t), \\ u(\tau) & \text{при } \tau \in [t, t+\Delta). \end{cases}$$

Будем предполагать, что для исходной позиции игры существует момент поглощения θ^0 и имеет место стабильность поглощения. Рассмотрим ряд свойств множеств $W(u^t, t, \theta^0)$.

/Ш/ При любом $t \in [t_0, \theta^0]$ существует такое u^t, что множество $W(u^t, t, \theta^0)$ непусто.

Действительно, для $t = t_0$ это справедливо в силу включения $x_0 \in W(u^{t_0}, t_0, \theta^0)$, для любого $t \in [t_0, \theta^0]$ свойство /Ш/ вытекает из стабильности поглощения.

/IУ/ Если $W(u^t_*, t, \theta^0)$ непусто, то непусто и $W(u^t, t, \theta^0)$ при любом $u^t(\tau)$, причем между множествами $W(u^t, t, \theta^0)$ и $W(u^t_*, t, \theta^0)$ можно следующим образом поставить взаимно однозначное соответствие:

$$W(u^t, t, \theta^0) = W(u^t_*, t, \theta^0) + \xi^t, \qquad /2.3/$$

где

$$\xi^t = \int_{t-\eta}^{t} X(t-\eta, \tau) B(\tau) [u^t_*(\tau) - u^t(\tau)] d\tau.$$

Доказательство. По определению 2.I точка w принадлежит множеству $W(u^t_*, t, \theta^0)$, если имеет место включение

$$G^{(2)}(t-\eta, \theta^0) \subset G^{(1)}(t, \theta^0) + X(\theta^0, t-\eta) w + g^t_* - M, \qquad /2.4/$$

где

$$g^t_* = \int_{t-\eta}^{t} X(\theta^0, \tau) B(\tau) \cdot u^t_*(\tau) d\tau.$$

Представим вектор w как $w + \xi^t - \xi^t$ и подставим в /2.4/, получим включение

$$G^{(2)}(t-\eta, \theta^0) \subset G^{(1)}(t, \theta^0) + X(\theta^0, t-\eta) \cdot (w + \xi^t) + g^t - M,$$

из которого следует, что вектор $w + \xi^t \in W(u^t, t, \theta^0)$. Аналогично можно показать, что если $w^* \in W(u^t, t, \theta^0)$, то $w^* - \xi^* \in W(u^t_*, t, \theta^0)$.

Отсюда вытекает справедливость свойства /IУ/.

/У/ Множества $W(u^t, t, \theta^0)$ изменяются непрерывно с изменением t и g^t /2.2/.

Доказательство. Нужно показать, что для любого $\alpha > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что как только

$$\Delta + \| g_*^{t+\Delta} - g^t \| < \delta \quad (\Delta > 0), \tag{2.5}$$

имеют место включения:

$$1.\quad W(u_*^{t+\Delta}, t+\Delta, \theta^0) \subset W^\alpha(u^t, t, \theta^0), \tag{2.6}$$

$$2.\quad W(u^t, t, \theta^0) \subset W^\alpha(u_*^{t+\Delta}, t+\Delta, \theta^0), \tag{2.7}$$

где

$$g_*^{t+\Delta} = \int_{t-\eta+\Delta}^{t+\Delta} X(\theta^0, \tau) B(\tau) u_*^{t+\Delta}(\tau) d\tau,$$

$$g^t = \int_{t-\eta}^{t} X(\theta^0, \tau) B(\tau) u^t(\tau) d\tau.$$

Покажем сначала справедливость включения /2.6/. Для произвольного элемента w из множества $W(u_*^{t+\Delta}, t+\Delta, \theta^0)$ можно записать включение:

$$G^{(2)}(t-\eta+\Delta, \theta^0) \subset G^{(1)}(t+\Delta, \theta^0) + X(\theta^0, t-\eta+\Delta) w + g_*^{t+\Delta} - M. \tag{2.8}$$

Добавим в правую и левую часть /2.8/ множество $\Delta G^{(2)}$ точек $x^{(2)}$, удовлетворяющих условию

$$x^{(2)} = \int_{t-\eta}^{t-\eta+\Delta} X(\theta^0, \tau) C(\tau) v(\tau) d\tau \quad \text{при } v(\tau) \in V_\tau.$$

К правой части /2.8/ добавим и вычтем множество $\Delta G^{(1)}$ и векторы $g^{(t)}$ и $X(\theta^0, t-\eta) w$, где множество $\Delta G^{(1)}$ состоит из векторов $x^{(1)}$, удовлетворяющих условию

$$x^{(1)} = \int_{t}^{t+\Delta} X(\theta^0, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \quad \text{при } u(\tau) \in U_\tau.$$

Тогда из /2.7/ получим включение

$$G^{(2)}(t-\eta, \theta^0) \subset G^{(1)}(t, \theta^0) + X(\theta^0, t-\eta) \cdot (w + Y) + g^t - M, \tag{2.9}$$

где множество Y состоит из векторов y, удовлетворяющих равенству:

$$y = X(t-\eta, \theta^0) x^{(2)} - X(t-\eta, \theta^0) x^{(1)} + \\ + [X(t-\eta, t-\eta+\Delta) - E] w + X(t-\eta, \theta^0) \cdot [g^t - g_*^{t+\Delta}].$$

В силу непрерывности матриц $X(t, \tau)$, $(X(t,t) = E)$, $B(t)$, $C(\tau)$, ограниченности множеств U_τ, V_τ для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что как только $\Delta + \| g_*^{t+\Delta} - g^t \| < \delta$, выполняется неравенство $\| y \| < \varepsilon$ для всех $y \in Y$.

Рассмотрим выпуклое множество W_1 всех точек w_1, удовлетворяющих условию

$$G^{(2)}(t-\eta,\theta^0)\subset G^{(1)}(t,\theta^0)+X(\theta^0,t-\eta)\cdot(w+S_\varepsilon)+g^t-M, \qquad /2.10/$$

где через S_ε обозначена сфера радиуса ε и размерности, совпадающей с размерностью W_1. Очевидна справедливость включения

$$W(u_*^{t+\Delta},t+\Delta,\theta^0)\subset W_1. \qquad /2.11/$$

Построим множество W_2 центров w_2 сфер S_ε, целиком содержащихся в W_1. В силу выпуклости множества W_1 для любого $\alpha>0$ можно указать $\beta>0$, что как только $\varepsilon<\beta$, то будет выполняться включение

$$W_1\subset W_2^\alpha \qquad /2.12/$$

С другой стороны, из /2.10/ легко показать, что для каждого $w_2\in W_2$ справедливо условие

$$G^{(2)}(t-\eta,\theta^0)\subset G^{(1)}(t,\theta^0)+X(\theta^0,t-\eta)w_2+g^t-M,$$

откуда следует, что $W_2\subset W(u^t,t,\theta^0)$. А тогда из /2.11/и/2.12/ вытекает включение /2.6/.

Можно показать, что включение /2.7/ следует из стабильности поглощения и свойства /IУ/.

Обозначим через $\varepsilon^0(t,x,u^t)$ расстояние от точки x до множества $W(u^t,t,\theta^0)$. Обозначим также через $\rho(s,u^t,t,\theta^0)$ опорную функцию множества $W(u^t,t,\theta^0)$

$$\rho(s,u^t,t,\theta^0)=\max_y s'y \quad \text{при } y\in W(u^t,t,\theta^0).$$

Известно, что для расстояния $\varepsilon^0(t,x,u^t)$ от точки x до выпуклого множества $W(u^t,t,\theta^0)$ можно записать следующее выражение

$$\varepsilon^0(t,x,u^t)=\begin{cases}\max\limits_{\|s\|=1}[s'x-\rho(s,u^t,t,\theta^0)] & \text{при } \max\limits_{\|s\|=1}[s'x-\rho(s,u^t,t,\theta^0)]>0,\\ 0 & \text{при } \max\limits_{\|s\|=1}[s'x-\rho(s,u^t,t,\theta^0)]\le 0\end{cases} \qquad /2.13/$$

В силу выпуклости множеств $W(u^t,t,\theta^0)$ справедливо следующее свойство.

/УI/ В области $\varepsilon^0(t,x,u^t)>0$ максимум выражения $[s'x-\rho(s,u^t,t,\theta^0)]$ достигается на единственном векторе $s^0=s^0(t,x,u^t)$.

Из свойств /У/ и /УI/ вытекает следующее утверждение.

/УП/ В области $\varepsilon^0(t,x,u^t)>0$ функции $s^0(t,x,u^t)$ и $\varepsilon^0(t,x,u^t)$ непрерывно зависят от t, x и g^t /2.2/.

3. Ниже приведено доказательство теоремы I.I.

Разобьем отрезок $[t_0-\eta,\theta]$ на полуинтервалы $[\tau_i,\tau_{i+1})$,

$t_0-\eta=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_k=t_0<\ldots<\tau_n=\theta$. Обозначим через $x^{(n)}[t]$ ломаную Эйлера, задаваемую формулой Коши

$$x^{(n)}[t]=X(t,t_0-\eta)x_0+\int_{t_0-\eta}^{t}X(t,\tau)B(\tau)u^{(n)}[\tau]d\tau-\int_{t_0-\eta}^{t}X(t,\tau)C(\tau)v^{(n)}[\tau]d\tau, \quad /3.1/$$

где

$$u^{(n)}[\tau]=\begin{cases}u^{t_0}[\tau] & \text{при } \tau\in[t_0-\eta,t_0),\\ u^{(n)*}[\tau] & \text{при } \tau\in[t_0,\theta],\end{cases}$$

$u^{(n)*}[\tau], v^{(n)}[\tau]$ – кусочно-постоянные вектор-функции

$$u^{(n)*}[\tau]=u[\tau_j] \text{ при } \tau\in[\tau_j,\tau_{j+1})\ (j=k,k+1,\ldots,n);$$
$$v^{(n)}[\tau]=v[\tau_i] \text{ при } \tau\in[\tau_i,\tau_{i+1})\ (i=1,2,\ldots,n).$$

Векторы $u[\tau_j]$, $v[\tau_i]$ удовлетворяют включениям $u[\tau_j]\in U(\tau_j, x^{(n)}[\tau_j-\eta], u^{(n)\tau_j})$, $v[\tau_i]\in V_{\tau_i}$.

Рассмотрим последовательность $\{x^{(n)}[t]\}$, $(t\in[t_0-\eta,\theta])$ ломаных Эйлера, соответствующую последовательности $[\tau_i,\tau_{i+1})^{(n)}$ разбиений отрезка $[t_0-\eta,\theta]$ на полуинтервалы при $n\to\infty$ и $\max\limits_i(\tau_{i+1}-\tau_i)\to 0$. Поскольку множества $U(t,x,u^t)$, V_t равноограничены, из /3.1/ следует, что вектор-функции $x^{(n)}[t]$, $(t\in[t_0-\eta,\theta])$ являются равномерно-ограниченными и удовлетворяют условию Липшица

$$\|x^{(n)}[t]-x^{(n)}[t+\Delta]\|\le L\cdot|\Delta|.$$

Тогда существует подпоследовательность $\{x^{(n_k)}[t]\}$, сходящаяся к некоторой функции $x^0[t]$ равномерно по t, $(t\in[t_0-\eta,\theta])$. При этом $x^0[t]$ удовлетворяет условию Липшица с той же постоянной L, что и $x^{(n)}[t]$. Следовательно, $x^0[t]$ является абсолютно-непрерывной функцией.

В силу ограниченности множеств $U(t,x,u^t)$, V_t при переходе в /2.1/ к пределу получаем, что $x^0[t]$ удовлетворяет формуле Коши

$$x^0[t]=X(t,t_0-\eta)x_0+\int_{t_0-\eta}^{t}X(t,\tau)B(\tau)u^0[\tau]-\int_{t_0-\eta}^{t}X(t,\tau)C(\tau)v^0[\tau]d\tau,$$

где $u^0[\tau]$ и $v^0[\tau]$, $(\tau\in[t_0-\eta,\theta])$ – слабые пределы подпоследовательностей функций $u^{(n_k)}[\tau]$ и $v^{(n_k)}[\tau]$, рассматриваемых как элементы пространства $L_{2[t_0-\eta,\theta]}$. Тогда абсолютно-непрерывная функция $x^0[t]$, $(t\in[t_0-\eta,\theta])$ почти всюду удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dx^0[t]}{dt}=A(t)x^0[t]+B(t)u^0[t]-C(t)v^0[t].$$

Покажем теперь, что уравнения $u^0[t]$, $(t\in[t_0,\theta])$ и $v^0[t]$, $(t\in[t_0-\eta,\theta])$ удовлетворяют почти всюду включениям $u^0[t]\in U(t,x^0[t-\eta],u^{0t})$

и $v^\circ[t] \in V_t$. Докажем сначала первое включение. Рассмотрим на отрезке вектор-функции

$$y^\circ[t] = \int\limits_{t_0-\eta}^{t} u^\circ[\tau]\,d\tau \quad , \quad y^{(n)}[t] = \int\limits_{t_0-\eta}^{t} u^{(n)}[\tau]\,d\tau .$$

Последовательность $\{y^{(n)}[t]\}$ равномерно на отрезке $[t_0, \theta]$ сходится к функции $y^\circ[t]$. Возьмем точку $t = t_* > t_0$, в которой существует производная

$$\frac{dy^\circ[t_*]}{dt} = u^\circ[t_*] .$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $|\Delta| < \delta$ выполняются неравенства

$$\left\| u^\circ[t_*] - \frac{\int\limits_{t_*}^{t_*+\Delta} u^\circ[\tau]\,d\tau}{\Delta} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

В силу равномерной сходимости последовательности $\{y^{(n)}[t]\}$ для фиксированного $\Delta \neq 0$ можно указать номер N такой, что справедливы неравенства

$$\left\| \int\limits_{t_*}^{t_*+\Delta} u^{(N)}[\tau]\,d\tau - \int\limits_{t_*}^{t_*+\Delta} u^\circ[\tau]\,d\tau \right\| < \frac{\varepsilon\cdot|\Delta|}{2},\ |\Delta| > \max_i(\tau_{i+1} - \tau_i)^{(N)}.$$

Отсюда для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать числа δ и N таким образом, что будут выполняться условия

$$\left\| u^\circ[t_*] - \frac{\int\limits_{t_*}^{t_*+\Delta} u^{(N)}[\tau]\,d\tau}{\Delta} \right\| < \varepsilon , \qquad /3.2/$$

$$\max_i(\tau_{i+1} - \tau_i)^{(N)} < |\Delta| < \delta .$$

Для доказательства включения $u^\circ[t_*] \in U(t_*, x^\circ[t_*-\eta], u^{\circ t_*})$ достаточно теперь показать, что выполняется включение

$$\frac{\int\limits_{t_*}^{t_*+\Delta} u^{(N)}[\tau]\,d\tau}{\Delta} \in U^{\varepsilon}(t_*, x^\circ[t_*-\eta], u^{\circ t_*}). \qquad /3.3/$$

Условие полунепрерывности теоремы I.I можно записать в следующем виде. Для любой позиции $\{t_*, x^\circ[t_*-\eta], u^{\circ t_*}\}$ любого числа $\varepsilon > 0$ и любой функции $f(\tau) \in L_{2[0,\eta]}$ $(\tau \in [0,\eta])$ существует число $\gamma > 0$ такое, что если справедливо неравенство

$$|t - t_*| + \|x - x^\circ[t_*-\eta]\| + \|z^t - z_\circ^{t_*}\| < \gamma, \qquad /3.4/$$

то имеет место включение

$$U(t, x, u^t) \in U^{\varepsilon}(t_*, x^\circ[t_*-\eta], u^{\circ t_*}),$$

где

$$z^t = \int\limits_{t-\eta}^{t} f(\tau+\eta-t)\cdot u^t[\tau]\,d\tau \quad , \quad z_\circ^{t_*} = \int\limits_{t_0-\eta}^{t_*} f(\tau+\eta-t)\,u^{\circ t_*}[\tau]\,d\tau .$$

Из равномерной сходимости последовательности $\{x^{(N)}[t]\}$ и из условия Липшица для функции $x^{\circ}[t]$ при достаточно большом N следуют неравенства

$$\|x^{(N)}[t_*-\eta+\Delta]-x^{\circ}[t_*-\eta+\Delta]\|<\frac{\gamma}{4},$$
$$\|x^{\circ}[t_*-\eta+\Delta]-x^{\circ}[t_*-\eta]\|<L\cdot|\Delta|. \qquad /3.5/$$

Возьмем произвольную функцию $f(\tau)\in L_{2[0,\eta]}$. Рассмотрим функции $Z^t_{(N)}$ и Z^t_0, определяемые формулами

$$Z^t_{(N)}=\int\limits_{t-\eta}^{t} f(\tau+\eta-t)\,u^{(N)t}[\tau]d\tau,\quad Z^t_0=\int\limits_{t-\eta}^{t} f(\tau+\eta-t)\,u^{\circ t}[\tau]d\tau.$$

Можно, как и выше, показать, что выполняются неравенства

$$\|Z_0^{t_*+\Delta}-Z_0^{t_*}\|<L_1|\Delta|,\ \|Z^{t_*+\Delta}_{(N)}-Z_0^{t_*+\Delta}\|<\frac{\gamma}{4}. \qquad /3.6/$$

Возьмем теперь в качестве δ из /3.2/ следующую величину

$$\delta=\frac{\gamma}{1+2(L+L_1)}.$$

Тогда из неравенств /3.5/ и /3.6/ следует, что для всех j, удовлетворяющих условию

$$[\tau_j,\tau_{j+1}]\cap[t_*,t_*+\Delta]\neq\phi,$$

позиция $\{\tau_j,x^{(N)}[\tau_j-\eta],u^{(N)\tau_j}\}$ удовлетворяет неравенству /3.4/. Отсюда выполняется включение

$$u[\tau_j]\in U^{\varepsilon}(t_*,x^{\circ}[t_*-\eta],u^{\circ t_*}).$$

Тогда в силу выпуклости множества $U(t_*,x^{\circ}[t_*-\eta],u^{\circ t_*})$ имеет место требуемое включение /3.3/. Легко показать, что в силу непрерывности V_t по t при почти всех t $(t\in[t_0-\eta,\theta])$ справедливо включение $v^{\circ}[t]\in V_t$.

Теорема I.I. доказана.

Поступила в редакцию 28.9.1970 г.

Литература

Н.Н.Красовский. Игровые задачи динамики I,П. Известия АН СССР. Техническая кибернетика № 5, 1969, № I, 1970.

2. Н.Н.Красовский.,А.И.Субботин. Дифференциальная игра наведения. Дифференциальные уравнения,том УI, № 4, 1970.

3.Л.С.Понтрягин.Линейные дифференциальные игры 2. Доклады АН СССР, том 175, № 4, 1967.

4.Ф.Л.Черноусько. О дифференциальных играх с запаздыванием информации. Доклады АН СССР, том 188, № 4, 1969.

5.Н.Н.Красовский. Игровые задачи о встрече движений. М.1970.

6.А.Ф.Филиппов. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.Математический сборник,51/93/,№I,1960.

7. Л.А.,В.И.Соболев. Элементы функционального анализа.М.196[illegible]