Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1970 г. выпуск 7.
УДК.519.1.

# КРИТИЧЕСКИЕ ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ С ДАННЫМ ДИАМЕТРОМ

Л.С.Мельников

## § 1. Введение Типы диаметров

Рассматривается класс ориентированных графов $G(X,U)$ /в дальнейшем просто орграфов/ с множеством вершин $X(|X|=n)$ и с множеством дуг $U$, которое не содержит параллельных дуг и петель.

Расстоянием $d\langle x,y\rangle$ между парой упорядоченных вершин $\langle x,y\rangle$ называется длина кратчайшего ориентированного пути из $x$ в $y$. В случае, если такой ориентированный путь из вершины $x$ в $y$ не существует, полагаем расстояние $d\langle x,y\rangle$ между этими вершинами равным $\infty$. В [1] отмечалось, что функция $d\langle x,y\rangle$-орметрика,т.е. удовлетворяет всем аксиомам обычной метрики за исключением аксиомы симметрии.

Существует целый ряд возможностей определения функции расстояний на орграфе, удовлетворяющей всем аксиомам метрики, причем существенно использующих ориентацию графа. Например, функция $d_M(x,y)=\max[d\langle x,y\rangle, d\langle y,x\rangle]$ является метрикой для произвольного орграфа. Похожая на нее функция $d_m(x,y)=\min[d\langle x,y\rangle, d\langle y,x\rangle]$ является метрикой, но в более узком классе орграфов. А именно в классе орграфов $\Gamma(X',U')$, обладающих следующим свойством: $\langle x,z\rangle\in U' \& \langle y,z\rangle\in U' \Rightarrow d_m(x,y)\leq 2$. Более тонкое изучение структуры графов из этого класса в наши планы здесь не входит. Заметим только, что дезориентация графов Герца от искомого класса приводит к графам, в которых из существования циклов длины большей четырех вытекает существование циклов той же длины, но с хордами. Можно также определить метрику на произвольном орграфе,как функцию $d_+(x,y)=d\langle x,y\rangle+d\langle y,x\rangle$. Причем последнее определение имеет следующий содержательный смысл: $d_+(x,y)$ -длина минимального орцикла, проходящего через вершины $x$ и $y$, причем если вершины $x$ и $y$ совпадают, то под орциклом понимается пустой орцикл, длина которого, очевидно, нуль, а если через вершины $x$ и $y$ орцикла не проходит, то в качестве длины его берется $\infty$.

Вводя несколько типов функции расстояния на орграфе естественно ввести и несколько типов диаметра. Под диаметром $d(G), d_M(G), d_m(G), d_+(G)$ в орграфе $G$ /в терминологии [1] $d$ - это ордиаметр/ понимаем максимальное значение соответствующей функции на всевозможных упорядоченных парах вершин $\langle x,y\rangle$. В силу симметрии функций $d_M(x,y), d_m(x,y)$ и $d_+(x,y)$ достаточно ограничиться для них лишь неупорядоченными парами вершин. Именно благодаря этому отличию первый диаметр иногда называется упорядочен-

ным, а остальные неупорядоченными.

Для произвольного орграфа $G$ , очевидно, $d(G) \leq d_M(G) < d_+(G)$ . А для орграфов $G$ , на которых функция $d_m(x,y)$ является метрикой, $d_m(G) \leq d(G)$ .

Заметим, что упорядоченный диаметр $d(G)$ и неупорядоченные $d_M(G)$ и $d_+(G)$ равны $\infty$ тогда и только тогда, когда существует упорядоченная пара вершин, одна из которых недостижима по ориентированному пути из другой, а для того чтобы неупорядоченный диаметр $d_m(G)$ равнялся бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы существовала пара вершин, ни одна из которых недостижима по ориентированному пути из другой.

Две вершины $x$ и $y$ называются взаимно достижимыми, если как из $x$ в $y$ , так и из $y$ в $x$ идут ориентированные цепи. Две вершины $x$ и $y$ называются взаимно зацикленными, если существует орцикл проходящий через $x$ и $y$ . Очевидно, вершины $x$ и $y$ взаимно достижимы тогда и только тогда, когда они взаимно зациклены. Поэтому в дальнейшем будем говорить только об отношении взаимной достижимости.

Отношение взаимной достижимости, очевидно, является отношением эквивалентности. Поэтому множество вершин, на котором это отношение определено, разбивается на классы

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup_k , \; X_i \cap X_j = \phi \text{ для } i \neq j .$$

Подграф, натянутый на множество $X_i$ называется бикомпонентой. Если для орграфа $G$ количество бикомпонент $k(G) = 1$ , то он называется сильно связным или бисвязным.

Из выше сделанного замечания ясно, что орграф имеет каждый из диаметров $d(G)$, $d_M(G)$ и $d_+(G)$ конечным тогда и только тогда, когда он бисвязный. Диаметр $d_m(G)$ также конечен тогда и только тогда, когда орграф $G$ односторонне связный в смысле [2] , т.е. для произвольных двух вершин по крайней мере одна достижима из другой по ориентированной цепи. Так как на орграфах, для которых $d_m(x,y)$ - метрика, из существования между двумя вершинами цепи из дуг без учета ориентации следует существование ориентированной цепи, то в этом классе орграфов все компоненты связности орграфа являются односторонне связными.

Орграф $G$ , обладающий данным свойством $P$ , называется критическим в смысле добавления дуг /в дальнейшем просто критическим/, если добавление любой дуги нарушает свойство $P$ .

Целью настоящей статьи является описание некоторых классов критических орграфов с данным диаметром и некоторыми дополнительными условиями. Аналогичная задача для неориентированных графов была поставлена и решена в [3] . Незнакомый с некоторыми используемыми понятиями и обозначениями читатель может обратиться к [1].

§ 2. Критические орграфы с бесконечным диаметром.

Рассмотрим класс орграфов $\{G(n,k,\infty)\}$ с данными числом вершин $n$, количеством бикомпонент $k$ и бесконечным диаметром типа $d$, $d_H$ или $d_+$. Тогда $k \geqslant 2$. Опишем подкласс критических орграфов с описанными выше свойствами.

Очевидно, что независимо от типа диаметра каждая бикомпонента критического графа является полным симметрическим орграфом, и если $|X_i| = n_i$ $(i=1,2,\dots,k)$, то число дуг в бикомпоненте $G_i(X_i, U_i)$ равно $n_i(n_i-1)$. Естественно также, что если между вершинами двух бикомпонент критического орграфа существует хотя бы одна дуга, то существуют дуги между всевозможными парами вершин этих бикомпонент. Легко показать, что орграф Герца /орграф бикомпонент/ от критического орграфа является полным антисимметрическим орграфом. Таким образом, между любыми двумя бикомпонентами критического орграфа существуют всевозможные дуги, идущие в одном направлении.

Т е о р е м а I. Критический орграф $G(n,k,\infty)$ с возможными типами диаметра $-d, d_H, d_+$ является суммой не пересекающихся по дугам полного антисимметрического транзитивного орграфа на $n$ вершинах и таких же транзитивных орграфов на соответствующих $n_i$ вершинах $(i \geqslant 2)$.

Согласно теореме I, количество дуг в критическом орграфе $G(n,k,\infty)$ равно

$$\frac{n(n-1)}{2} + \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i(n_i-1)}{2} \quad \text{или}$$

$$\frac{n^2}{2} - n + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i^2 , \qquad \text{причем} \sum_{i=1}^{k} n_i = n .$$

Известно, что эта величина достигает максимума при некотором $n_{i_0} = n-k+1$ и $n_j = 1$, где $j \neq i_0$.

Итак, максимум числа дуг для критических орграфов $G(n,k,\infty)$ есть

$$\frac{n^2}{2} - n + \frac{1}{2}(k-1) + \frac{1}{2}(n-k+1)^2 = n^2 - nk + \frac{k(k-1)}{2} .$$

С л е д с т в и е I.I. Если количество дуг в орграфе с $n$ вершинами и $k$ бикомпонентами больше, чем $n^2 - nk + \frac{k(k-1)}{2}$, то его диаметры $d, d_H, d_+$ конечны.

С л е д с т в и е . I.2. Если количество дуг в орграфе с $n$ вершинами больше, чем $(n-1)^2$, то его диаметры $d, d_H, d_+$ конечны.

Перейдем теперь к случаю бесконечного диаметра вида $d_m$. Из сделанных в § I замечаний ясно, что орграф состоит из $k$ компонент связности $(k \geqslant 2)$, каждая из которых является односторонне связной. То есть рассматривается класс орграфов $\{G(n,k,\infty = d_m)\}$

с $n$ вершинами, $k$ компонентами связности и диаметром $d_m = \infty$ .

Так как при добавлении дуг, оба конца которых лежат в одной компоненте, односторонняя связность ее не нарушается, а количество компонент не изменяется, то мы в состоянии доказать следующий результат.

Т е о р е м а 2. Критический орграф $G(n,k,\infty)$ с диаметром $d_m$ является объединением $k$ компонент связности, каждая из которых является полным симметрическим орграфом на $n_i$ вершинах $\left(\sum_{i=1}^{k} n_i = n, k \geq 2\right)$.

Согласно теореме 2, количество дуг в орграфе $G(n, k, d_m = \infty)$ равно

$$\sum_{i=1}^{k} n_i(n_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} n_i^2 - n .$$

Аналогично ранее проведенному рассуждению максимум числа дуг для критических орграфов $G(n, k, d_m = \infty)$ есть

$$(n - k + 1)(n - k) .$$

С л е д с т в и е 2.1. Если количество дуг в орграфе с $n$ вершинами и $k$ компонентами больше, чем $(n - k + 1)(n - k)$ , и $d_m(x,y)$ на нем определена, то $d_m$ конечен.

## § 3. Критические графы с конечными диаметрами $d$ и $d_m$ .

Перейдем теперь к случаю, когда диаметр конечен. Из сделанных выше замечаний ясно, что рассматриваются сильно связные орграфы, $G(n,1,d) \doteq G(n,d)$ и $G(n,1,d_M) \doteq G(n,d_M)$ . Добавление дуги к критическим орграфам $G(n , d)$ и $G(n, d_M)$ уменьшает их диаметр. Попытаемся дать описание таких критических орграфов.

Для малых значений диаметров примеры таких критических орграфов легко привести.

Если критический орграф имеет диаметр $d$ или $d_M$ , равный единице, то он есть полный симметрический орграф $\vec{K}_n$ с $n$ вершинами и $n(n - 1)$ дугами. Если же $d = 2$ или $d_M = 2$ , то критическим орграфом является орграф, полученный из $\vec{K}_n$ удалением произвольной дуги.

Оказывается, что диаметры $d$ и $d_M$ равны на одном и том же орграфе $G$ . Неравенство $d(G) \leq d_M(G)$ получено во введении, а обратное неравенство следует из того, что всегда можно взять две периферийные вершины для диаметра $d_M(G)$ в соответствующем порядке, чтобы показать, что $d(G) \geq d_M(G)$ .

Таким образом, ясно, что и классы критических орграфов для этих двух определений диаметра совпадают. Поэтому в дальнейшем будем говорить о классе критических орграфов диаметра $d$ , имея в виду, что точно так же можно сказать в случае диаметра $d_M$ .

Когда диаметр орграфа равен $d$, то в нем существует пара вершин $x_0$, $x_d$, для которых кратчайший соединяющий их путь $P(x_0, x_d) = (x_0, x_1)(x_1, x_2)\dots(x_{d-1}, x_d)$ имеет, как это видно из записи, длину $d$. Обозначим через $Y_i$ множество вершин, расположенных на расстоянии $i$ от $x_0$. $Y_0 = \{x_0\}$. Таким образом, имеем разбиение $X = Y_0 \cup Y_1 \cup \dots \cup Y_d$ с $n = n_0 + n_1 + \dots + n_d$, где $n_i = |Y_i|$. Рассматриваемый орграф $G$ состоит из подграфов $G_i(X_i, U_i)$ вместе с дугами вида

$$(y_{i-1}, y_i) = u_i, \quad \text{где } y_{i-1} \in Y_{i-1},\ y_i \in Y_i,$$

соединяющими вершины $y_{i-1}$ и $y_i$ двух последовательных подграфов $G_{i-1}$ и $G_i$, причем каждая $y_i \in Y_i$ является концом хотя бы одной дуги $u_i$.

Добавление дуги, соединяющей две вершины из одного орграфа $G_i(Y_i, U_i)$, не может уменьшить расстояния между $x_0$ и $x_d$, так как путь $P(x_0, x_d)$ остается неизменным. Следовательно, в критическом орграфе все подграфы, расположенные на расстоянии $i$, являются полными симметрическими $n_i$-вершинниками.

В критическом орграфе $G$ множество $Y_d$ одноэлементно. Действительно, в противном случае существуют вершины $x_d, x'_d \in Y_d$, а так как $G_d(Y_d, U_d)$ полный, то существует дуга $(x'_d, x_d)$, соединяющая эти вершины в $G_d$. Добавим дугу $(x_{d-2}, x'_d)$ к орграфу $G$. Это добавление, очевидно, не уменьшает расстояния от $x_0$ до $x_d$. Но так как орграф $G$ критический, то полученное противоречие доказывает, что $Y_d$ – одноэлементный.

Заметим также, что добавление в $G(X, U)$ новых дуг, ведущих из множества $Y_{i-1}$ в $Y_i$ $(i = 1, 2, \dots, d)$ или из множества $Y_i$ в $Y_j$ $(i > j)$, не изменяет диаметра. Следовательно, между этими множествами в критическом орграфе существуют всевозможные дуги.

О п р е д е л е н и е. Орграф $G(X, U)$, множество вершин которого разбито на классы $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_d$, называется односторонней тугой симплициальной цепью, если

$$(x, x') \in U \Leftrightarrow (x \in X_{i-1} \,\&\, x' \in X_i) \vee (x \in X_i \,\&\, x' \in X_j \,\&\, i > j).$$

Т е о р е м а 3. Орграф $G$ с диаметром $d$ критический в том и только в том случае, если он является односторонней тугой симплициальной цепью с концевыми одноэлементными множествами $X_0$ и $X_d$.

Заметим, что эта теорема также верна и для бесконечных орграфов с конечным диаметром.

## § 4. Максимальное количество дуг в орграфе с данным диаметром.

Благодаря определенной структуре критического орграфа $G$ легко подсчитать количество дуг $m(G)$ в нем через величины $n_i$.

$$m(\mathcal{G})=\sum_{i=0}^{d-1}\left(n_i\cdot n_{i+1}+\frac{1}{2}n_{i+1}(n_{i+1}-1)\right)+\frac{1}{2}n(n-1)=$$
$$=\sum_{i=1}^{d}\left(n_{i-1}\cdot n_i+\frac{1}{2}n_i^2\right)+\frac{(n-1)^2}{2}. \qquad /1/$$

Число дуг в критических орграфах с диаметрами 2 и 3 равны, соответственно, $n^2-n-1$ и $(n-1)^2$, т.к. в первом случае $n_0=n_2=1$, $n_1=n-2$, а во втором случае $n_0=n_3=1$, $n_1+n_2=n-2$. Для больших значений $d$ число дуг в критическом орграфе зависит от выбора $n_i$. Определим для данного $d\geqslant 4$ все критические орграфы с максимальным количеством дуг.

Пусть $n_{i-1}\geqslant 2$ и $n_i$ - два последовательных числа. Заменим их на $n_{i-1}-1$ и $n_i+1$, соответственно. Члены в /1/, содержащие $n_{i-1}$ и $n_i$,

$$n_{i-2}\cdot n_{i-1}+\frac{1}{2}n_{i-1}^2+n_{i-1}\cdot n_i+\frac{1}{2}n_i^2+n_i\cdot n_{i+1},$$

заменяются на

$$n_{i-2}\cdot(n_{i-1}-1)+\frac{1}{2}(n_{i-1}-1)^2+(n_i-1)(n_i+1)+\frac{1}{2}(n_i+1)^2+n_{i+1}(n_i+1).$$

Если первое выражение вычесть из второго, то их разность $\Delta=$ $=n_{i+1}-n_{i-2}$. Таким образом, если $n_{i+1}>n_{i-2}$, это изменение приводит нас к критическому орграфу с тем же самым диаметром, но с большим числом дуг. Следовательно, если $n_{i-2}=1$, то должно быть $n_{i+1}=1$ или $n_{i-1}=1$. Согласно этому следствию, существует лишь два типа последовательностей $\{n_i\}$, отличных от единицы.

/I/ Пусть $n_{i-1}=n_{i+1}=1$, $n_i>1$. Согласно формуле /1/ в куске односторонней тугой симплициальной цепи от $x_{i-1}$ до $x_{i+1}$ число содержащихся дуг равно

$$(n_i+2)(n_i+1)-1.$$

Предположим, что существует другой такой кусок типа /I/ $n_{j-1}=n_{j+1}$, $n_j>1$. Общее число дуг в них равно

$$(n_i+2)(n_i+1)+(n_j+2)(n_j+1)-2.$$

Без ограничения общности можно считать $n_j\geqslant n_i$. Тогда произведем замену $n_i$ и $n_j$ соответственно на $n_i-1$ и $n_j+1$. Общее число дуг в результате такой замены возрастает. Следовательно, в односторонней тугой симплициальной цепи не существует больше одного куска типа /I/.

/II/ Пусть $n_{i-2}=n_{i+1}=1$, $n_{i-1}>1$, $n_i>1$..

Согласно ранее доказанному, число дуг в куске односторонней тугой симплициальной цепи от $x_{i-2}$ до $x_{i+1}$ равно

$$(n_{i-1}+n_i+1)^2.$$

Предположим, что существует другой такой кусок типа /II/ $n_{j-1}=$ $=n_{j+1}=1$, $n_{j-1}>1$, $n_j>1$. Общее число дуг в этих двух кусках равно

$$(n_{i-1}+n_i+1)^2+(n_{j-1}+n_j+1)^2.$$

Без ограничения общности можно считать $n_{j-1}+n_j \geqslant n_{i-1}+n_i$. Тогда произведем замену $n_i$ и $n_j$ соответственно на $n_i-1$ и $n_j+1$. Тогда общее число дуг станет равным

$$(n_{i-1}+n_i)^2+(n_{j-1}+n_j+2)^2.$$

Разность же между вторым и первым числом равна

$$2(n_{j-1}+n_j-n_{i-1}-n_i)\geqslant 0$$

Число дуг в результате такой замены не убывает. Следовательно, в односторонней тугой симплициальной цепи не существует больше одного куска типа /П/.

Более того, если в цепи существует кусок типа /I/ и кусок типа /П/, то возможно увеличение дуг при некоторой замене.

Т е о р е м а 4. Произвольный орграф $G(X,U)$ с данным диаметром $d$ и максимальным числом дуг является односторонней тугой симплициальной цепью со всеми $n_i=1$, за исключением единственной пары последовательных $n_i$ /причем одно из этих чисел также может быть равным I/ внутри цепи.

С л е д с т в и е 4.I. В произвольном орграфе $G(X,U)$ с $n$ вершинами и диаметром $d$ для числа дуг верна следующая верхняя оценка:

$$m(G)\leqslant\frac{1}{2}\left[n(n-1)+(n-d-1)(n-d+4)\right]+d_0.$$

Заметим что эта оценка точна и достигается на графе, описанном в теореме 3. Обращением этой оценки можно получить известный результат Гуйя-Ури [4].

С л е д с т в и е 4.2. Пусть $G$ -бисвязный орграф с $n$ вершинами и $m$ дугами. Тогда для его диаметра имеем

$$d(G)\leqslant\begin{cases} n-1, & n\leqslant m\leqslant\dfrac{n(n+1)}{2}-3\\ n+\dfrac{1}{2}-\sqrt{2m-n^2-n+\dfrac{17}{4}} \end{cases}$$

при

$$\frac{n(n+1)}{2}-3<m\leqslant n(n-1).$$

§ 5. Случай $k$ - бисвязных орграфов

Если о критическом орграфе $G$ с диаметром $d$ известно еще, что он $k$ -бисвязный, то о его структуре легко можно доказат[ь] следующий результат.

Т е о р е м а 5. $k$ -бисвязный орграф $G$ с диаметро[м] [...] критический в том и только в том случае, если он является [...]сторонней тугой симплициальной цепью с $|X_0|=|X_d|=1$ и $|X_i|\geqslant$

для всех $0 < i < d$ .

Методом, аналогичным примененному в доказательстве теоремы 4, получается.

Т е о р е м а 6. Произвольный $k$ -бисвязный орграф $G$ с данным диаметром $d(G) = d$ и максимальным количеством дуг является односторонней тугой симплициальной цепью с $n_0 = n_d = 1$ и со всеми остальными $n_i = k$ за исключением единственной пары последовательных $n_{i_0} \geqslant k, n_{i_0+1} \geqslant k$ внутри цепи /причем одно из этих чисел также может быть равным $k$ /.

С л е д с т в и е 6.1. В произвольном $k$ -бисвязном орграфе $G(X,U)$ с $n$ вершинами и диаметром $d$ для числа дуг справедлива следующая верхняя оценка:

$$m(G) \leqslant \frac{1}{2}k^2d^2 - nkd - \frac{5}{2}k^2d + 2kd + n^2 + k^2 + 4kd - 3n - 6k + 3.$$

Далее возникает естественное желание обратить полученное неравенство для установления оценки на $d$ . Для этого необходимо дать оценку $d$ хотя бы членом, который стоит перед корнем в следующем следствии.

С л е д с т в и е 6.2. Пусть $G$ $k$ -бисвязный орграф с $n$ вершинами и $m$ дугами. Тогда для его диаметра имеем

$$d(G) \leqslant \frac{n-2}{k} \pm \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{2m}{k^2} - \frac{(n-1)(n+2k-1)+nk+1}{k^2} + \frac{17}{4}}$$

при

$$n(n-1) \geqslant m \geqslant \left[\frac{(n-1)(n+2k-1)+nk-4}{2}\right].$$

Последнее следствие является обобщением результата Гуйя-Ури [4] на $k$ -бисвязные орграфы.

На основании простых соображений дадим точную оценку для $d$ в классе $n$ - вершинных, $k$ - бисвязных орграфов, лучшую той оценки, что была нам необходима для получения следствия 6.2.

Пусть $G_n^k$ $k$ -бисвязный орграф с $n$ вершинами. Так как он бисвязный, то диаметр его конечен. Допустим, вершины $x, y$ наиболее удаленные друг от друга. Рассмотрим все множество элементарных ориентированных путей, ведущих из $x$ в $y$ . Так как $G_n^k$ -бисвязный, то полустепени для каждой его вершины $s^- \geqslant k$ и $s^+ \geqslant k$ . Следовательно, $s^+(x) \geqslant k$ . Пусть вершины $x_1', x_2', \ldots, x_{k_1}'$ суть концы дуг, идущих из $x$ в элементарных путях из $x$ в $y$ . Эти вершины образуют множество $A_1$ , чья мощность $k_1 \geqslant k$ . Из вершин множества $A_i$ $(i < d-1)$ идут дуги, принадлежащие описанным элементарным путям. Их концы обозначим как множество $A_{i+1}$ . Мощность множества $A_i$ не меньше $k$ , так как иначе, удаляя его, мы бы нарушили бисвязность орграфа удалением менее чем $k$ вершин.

В связи с тем, что расстояние между вершинами $x$ и $y$ равно

$d(G)$, в орграфе необходимо должно быть, кроме двух выделенных вершин $x$ и $y$, еще $d-1$ множеств $A_1, A_2, \dots, A_{d-1}$, мощность каждого из которых не меньше $k$. Поэтому

$$d(G) \leqslant \left[\frac{n-2}{k}\right] + 1.$$

Покажем достижимость этой оценки. Построим орграф $O_n^k$ следующим образом: его вершины $x_1, x_2, \dots, x_n$ соединим дугами $(x_i, x_{i+1}), (x_i, x_{i+2}), \dots, (x_i, x_{i+k})$, где все индексы берутся по модулю $n$. Две наиболее удаленные вершины в орграфе $O_n^k$ - это $x_{i+1}$ и $x_i$. Легко проверить, что

$$d\langle x_{i+1}, x_i\rangle = \left[\frac{n-2}{k}\right] + 1.$$

Кроме того, орграф $O_n^k$ обладает еще тем интересным свойством, что он является $k$ -бисвязным с минимальным числом дуг $nk$.

В заключение автор выражает надежду, что описания классов критических орграфов с конечными диаметрами $d_+$ и $d_m$ не слишком долго останутся открытыми задачами.

Поступила в редакцию 25.10.1970г.

Литература

1. А.А.Зыков. Теория конечных графов. Изд-во "Наука". Новосибирск.1969.

2. F.Harary,R.Z.Norman,D.Cartwright. Structural Models, An Introduction to the Theory of Directed Graphs, John Wiley & Sons, Inc.New-York.London.Sydney 1965.

3. O.Ore.Diameters in Graphs.J.Combin.Theory.,v5,N1 (1968) pp 75-81.

4. A. Ghouila-Houri. Un resultat relatif a la notion d diametre. C.r.Acad.Sci.Paris,250(1960),N26,4254-4256.