Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1970 г. выпуск 7.
УДК.519.1.

О МИНИМАЛЬНОЙ СВЯЗНОСТИ ГРАФОВ С ТРАНЗИТИВНОЙ ГРУППОЙ АВТОМОРФИЗМОВ

В.Г.Визинг. /Чернигов/

В заметке дается нижняя оценка связности графа с транзитивной группой автоморфизмов. Тем самым решается одна из поставленных в /[2],стр.123/ задач. Приведем необходимые определения.

Всюду под графом понимается обыкновенный граф [1]. Граф $\mathcal{L}$ с множеством вершин X и множеством ребер U обозначается $\mathcal{L}=(X,U)$.

Автоморфизмом графа называется взаимно однозначное отображение множества вершин на себя, сохраняющее отношение смежности. Граф с транзитивной группой автоморфизмов называется правильным. Иными словами, в правильном графе $\mathcal{L}=(X,U)$ для любых двух вершин $x\in X$ и $y\in X$ существует автоморфизм φ такой, что $\varphi(x)=y$. Легко видеть, что степени всех вершин правильного графа одинаковы. Если они равны натуральному числу m, то будем говорить, что $\mathcal{L}$ - правильный граф степени m.

Два ребра u_1 и u_2 правильного графа называются подобными,если существует автоморфизм графа, переводящий u_1 в u_2. Отношение подобия ребер является отношением эквивалентности, которое разбивает множество всех ребер графа на классы подобных ребер. При этом, очевидно, суграф, порожденный каким-либо одним классом подобных ребер, является правильным графом.

Пусть $\mathcal{L}=(X,U)$ - произвольный связный n -вершинный граф. Подмножество $Y\subset X$ называется множеством сочленения графа $\mathcal{L}$, если либо $|Y|=n-1$ [x], либо подграф, порожденный вершинами $X\setminus Y$, несвязен. Множество сочленения с наименьшим возможным числом вершин называется минимальным. Граф $\mathcal{L}$ называется h -связным, если минимальное множество сочленения его содержит не меньше, чем h вершин.

Введем важное для дальнейшего понятие агрессивного множества сочленения. Пусть Y - некоторое минимальное множество сочленения графа $\mathcal{L}=(X,U)$. Индексом множества Y назовем наименьшее число вершин в компоненте связности подграфа, порожденного вершинами $X\setminus Y$. Минимальное множество сочленения графа $\mathcal{L}$ с минимальным индексом называется агрессивным.

Цель настоящей заметки - доказать следующую теорему.

Теорема. Пусть $h(m)$ - наибольшее натуральное число такое, что любой связный правильный граф степени m является $h(m)$ - связным. Тогда

---

[x] Если A конечное множество, то $|A|$ - число его элементов.

$$h(m)=\begin{cases} m & \text{при } m\leqslant 3,\\ 2\left[\frac{m+3}{3}\right] & \text{при } m\geqslant 4.\end{cases}$$

где скобки [ ] обозначают целую часть числа. Доказательство теоремы проводится с помощью нескольких лемм.

Лемма I. Пусть $\mathcal{L}=(X,U)$ - связный граф, отличный от полного, и пусть Y_1 - агрессивное множество сочленения графа $\mathcal{L}$. Обозначим через X_1 множество вершин наименьшей компоненты связности графа $\mathcal{L}_1=(X\setminus Y_1, U_1)$, полученного из графа $\mathcal{L}$ удалением вершин Y_1. Если существует минимальное множество сочленения Y_2 графа $\mathcal{L}$ такое, что $Y_2\cap X_1\neq\Phi$, то $|X_1|\leqslant\frac{|Y_1|}{2}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}_2=(X\setminus Y_2, U_2)$ - граф, полученный из $\mathcal{L}$ удалением вершин Y_2. Поскольку $\mathcal{L}$ не является полным графом, то как $\mathcal{L}_1$, так и $\mathcal{L}_2$, содержат больше одной компоненты связности. Введем следующие обозначения: $X_2=X\setminus(Y_1\cup X_1)$, $|Y_1|=|Y_2|=S$; $|Y_2\cap Y_1|=S_0$; $|Y_2\cap X_1|=S_1$; $|Y_2\cap X_2|=S_2$.
Очевидно, $|X_2|\geqslant|X_1|\geqslant S_1\geqslant 1$; $S=S_0+S_1+S_2$.
Сформулируем несколько простых утверждений, касающихся графа $\mathcal{L}_2$.

Если некоторая компонента связности графа $\mathcal{L}_2$:

а/ содержит вершину из множества X_1, то она содержит не меньше, чем S_2+1 вершин из Y_1;

б/ содержит вершину из множества X_2, то она содержит не менее S_1 вершин из Y_1;

в/ не содержит ни одной вершины из X_1, то она содержит не менее S_1 вершин из Y_1.

Докажем последовательно утверждения а/, б/, в/.

Пусть $y_1, y_2,\dots, y_\ell$ - вершины из Y_1, принадлежащие рассматриваемой компоненте;

а/ если бы выполнялось неравенство $\ell\leqslant S_2$, то вершины $Y_2\cap Y_1$, $Y_2\cap X_1$ и $y_1,y_2,\dots,y_\ell$ образовывали бы множество сочленения графа $\mathcal{L}=(X,U)$, содержащее не более S вершин и имеющее меньший индекс, чем множество Y_1, что противоречит агрессивности Y_1;

б/ $\ell\geqslant S_1$, так как в противном случае вершины $Y_2\cap Y_1$, $Y_2\cap X_1$ и $y_1,y_2,\dots,y_\ell$ образуют множество сочленения графа $\mathcal{L}$, содержащее меньше, чем S вершин, чего не может быть в силу минимальности множества сочленения Y_1;

в/ если бы выполнялось неравенство $\ell< S_1$, то в силу б/ рассматриваемая компонента не содержала бы вершин из X_2 и состояла бы только из вершин $y_1,y_2,\dots,y_\ell$, что вследствие $S_1\leqslant|X_1|$ противоречило бы агрессивности множества Y_1.

Покажем теперь, что $X_1\subset Y_2$. Предположим противное. Пусть C_1 - компонента связности графа $\mathcal{L}_2$, содержащая хотя бы одну вершину из X_1, C_2 - какая-либо другая /произвольная/ компонента графа $\mathcal{L}_2$. В силу а/ компонента C_1 содержит по меньшей мере S_2+1 вершин из Y_1. Так как графу $\mathcal{L}_2$ принадлежит ровно S_1+S_2 вершин из Y_1, то C_2 содержит не более s_1-1 вершин из Y_1; в силу б/ и в/ C_2 не содержит вершин из множества X_2 и содержит по крайней мере одну вершину из X_1. Проводя то же самое рассуждение, отправляясь от компоненты C_2, заключаем, что C_1 не содержит вершин из X_2. Таким образом, ни одна компонента графа $\mathcal{L}_2$ не содержит вершин из X_2, т.е. $X_2 \subset Y_2$, $|X_2| = s_2$. Поскольку $|X_2| \geq |X_1| > s_1$, то $s_2 > s_1$. Но по утверждению а/ каждая из компонент C_1 и C_2 содержит не менее чем s_2+1 вершин из Y_1. Так как $2(s_2+1) > s_1 + s_2$, а графу $\mathcal{L}_2$ принадлежат равно $s_1 + s_2$ вершин из Y_1, то компоненты C_1 и C_2 имеют общую вершину из Y_1, и, следовательно, не могут быть различными компонентами связности графа $\mathcal{L}_2$. Мы пришли к противоречию, которое возникло вследствие предположения $X_1 \not\subset Y_2$. Значит, $X_1 \subset Y_2$, $|X_1| = s_1$.

Так как граф $\mathcal{L}_2$ имеет не меньше двух компонент связности и каждая из компонент, согласно утверждению в/, содержит не менее $s_1 = |X_1|$ вершин из Y_1, то $2|X_1| \leq |Y_1|$, откуда $|X_1| \leq \frac{|Y_1|}{2}$.

Лемма I доказана.

С л е д с т в и е. В правильном графе степени $m \geq 2$ индекс агрессивного множества сочленения не превосходит половины мощности этого множества.

Действительно, если правильный граф является полным, то мощность любого множества сочленения равна $m \geq 2$, а индекс равен 1. Если же правильный граф не является полным, то утверждение вытекает из леммы I. Требуемое в лемме множество Y_2 является образом множества Y_1 при автоморфизме графа, переводящем какую-либо вершину из Y_1 в какую-либо вершину из X_1.

Л е м м а 2. При $m \geq 2$ $h(m) \geq \frac{2}{3}(m+1)$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем $h(m)$ - связный правильный граф $\mathcal{L}(X, U)$ степени m; пусть Y_1 - агрессивное множество сочленения его, $|Y_1| = h(m)$; X_1 - множество вершин наименьшей компоненты связности подграфа, порожденного вершинами $X \setminus Y_1$. По следствию из леммы I, $|X_1| \leq \frac{h(m)}{2}$. Так как любая вершина из X_1 может быть смежной только с вершинами из множеств X_1 и Y_1, то ее степень $m \leq |X_1| - 1 + |Y_1| \leq \frac{h(m)}{2} - 1 + h(m)$, откуда $h(m) \geq \frac{2}{3}(m+1)$.

Л е м м а 3. $h(1) = 1$; $h(2) = 2$; $h(3) = 3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое равенство очевидно. Далее, по лемме 2, $h(2) \geq \frac{2}{3}(2+1) = 2$, $h(3) \geq 8/3$, откуда, в силу $h(m) \leq m$ следует $h(2) = 2$, $h(3) = 3$.

Л е м м а 4. При $m \geq 4$ $h(m) \geq 2\left[\frac{m+3}{3}\right]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если m есть число вида $3k+2$

или $3k+1$, где k - натуральное $\geqslant 1$, то требуемое неравенство непосредственно следует из леммы 2.

Сложнее обстоит дело в случае $m=3k$ $(k\geqslant 2)$. Из леммы 2 вытекает лишь неравенство $h(3k)\geqslant 2k+1=2\left[\frac{m+3}{3}\right]-1$, которое на единицу хуже требуемого, и нужно показать, что $h(3k)\neq 2k+1$.

Предположим противное. Пусть существует правильный связный граф степени $3k$, $\mathcal{L}=(X,U)$, имеющий /минимальное/ множество сочленения, состоящее из $2k+1$ вершин. Как и в лемме I, обозначим через Y_1 агрессивное множество сочленения графа $\mathcal{L}$ $(|Y_1|=2k+1)$, через X_1 - множество вершин наименьшей компоненты связности графа $\mathcal{L}_1=(X\setminus Y_1, U)$. По следствию из леммы I, $|X_1|\leq k$. Так как степень каждой вершины графа $\mathcal{L}$ равна $3k$, то $|X_1|=k$ и каждая вершина из X_1 смежна со всеми остальными $2k+1$ вершинами из множества Y_1.

Возьмем ребро v графа $\mathcal{L}$, оба конца которого принадлежат X_1 и обозначим через V класс подобных ребер графа $\mathcal{L}=(X,U)$, содержащий ребро v. Отметим следующие утверждения.

1/ Каждое ребро, имеющее оба конца в X_1, принадлежит классу V.

Действительно, если v_1 - такое ребро, то взаимно однозначное отображение вершин графа $\mathcal{L}$, переводящее ребро v в ребро v_1 и v_1 в v и оставляющее на месте все вершины графа $\mathcal{L}$ за исключением концов ребер v и v_1, будет автоморфизмом графа $\mathcal{L}$.

2/ Каждое ребро класса V, инцидентное вершине из Y_1, имеет оба конца в Y_1.

Действительно, если a и b - концы некоторого ребра из класса V, то каждая отличная от b вершина, смежная с a, должна быть смежной с b и наоборот. В этом нетрудно убедиться, взглянув на ребро v. Вершины же множества Y_1 и только они обладают тем свойством, что каждая из них смежна как с вершинами из X_1, так и с вершинами из X_2, где $X_2=X\setminus(X_1\cup Y_1)$. Поэтому если один конец ребра из V принадлежит множеству Y_1, то другой конец не может принадлежать ни X_1, ни X_2.

Суграф графа $\mathcal{L}$, порожденный всеми ребрами класса V, является правильным графом, одна из компонент связности которого, как следует из доказанных только что утверждений, представляет собой полный k - вершинный граф /имеется в виду компонента с вершинами X_1/.

Следовательно, каждая компонента связности суграфа есть полный k - вершинный граф; при этом, в силу утверждения 2/, вершины Y_1 разбиваются на непересекающиеся подмножества по k вершин. Но $|Y_1|=2k+1$ и при $k\geqslant 2$ $2k+1$ не делится на k.

Получается противоречие, опровергающее допущение $h(3k)=2k+1$.

Значит, $h(3k)\geqslant 2k+2$, т.е. и при $m=3k$, где $k\geqslant 2$, $h(m)\geqslant 2\cdot\left[\frac{m+3}{3}\right]$.

Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы. В силу лемм 3 и 4 остается доказать, что при $m\geqslant 4$ $h(m)\geqslant 2\left[\frac{m+3}{3}\right]$.

Рассмотрим три случая.

Случай 1. $m=3k+2$, где k – натуральное $\geqslant 1$.

Случай 2. $m=3k+1$, где k – натуральное $\geqslant 1$.

Случай 3. $m=3k$, где k – натуральное $\geqslant 2$.

В случае 1 построим граф $H_1^{(k)}$ следующим образом. Возьмем 4 полных $(k+1)$ – вершинных графа P_1 , P_2 , P_3 , P_4 и соединим каждую вершину из P_1 и P_3 с каждой вершиной из P_2 и P_4 . Получим правильный связный граф $H_1^{(k)}$ степени $3k+2$.

Для случая 2 удалим из графа $H_1^{(k)}$ максимальное паросочетание, образованное из ребер, соединяющих P_1 с P_2 и P_3 с P_4 . Получим связный правильный граф степени $3k+1$.

Наконец, в случае 3 построим граф $H_3^{(k)}$ следующим образом. Возьмем граф $H_1^{(k)}$ /при $k\geqslant 2$ /, в каждом подграфе $P_i\ (i=1,2,3,4)$ построим гамильтонов цикл и удалим из $H_1^{(k)}$ все ребра построенных четырех циклов. Полученный граф $H_3^{(k)}$ является правильным связным графом степени $3k$.

Теперь заметим, что в каждом из построенных графов $H_1^{(k)}$, $H_2^{(k)}$, $H_3^{(k)}$ вершины, принадлежащие P_2 и P_4 , образуют множество сочленения мощности $2k+2$. Но для всех трех случаев $2k+2=2\left[\frac{m+3}{3}\right]$. Следовательно, при $m\geqslant 4$ $h(m)\leqslant 2\left[\frac{m+3}{3}\right]$.

Теорема доказана.

Замечание. Как стало известно автору, недавно вышла работа [3] , в которой получен более слабый результат: $h(m)\geqslant \frac{2}{3}m$

Поступила в редакцию 5.5.1970г.

Литература

1. А.А.Зыков, Теория конечных графов, Новосибирск, "Наука", 1969.

2. В.Г.Визинг, Некоторые нерешенные задачи в теории графов, УМН, т.XXIII, вып. 6 /144/, 1968, 117-134.

3. M.E.Watkins, Connectivity of transitive graphs,J.of combin.theory,v.8 ,N1((1970),23-29.