Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1970 г. выпуск 7.
УДК.519.24.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОЦЕНОК СРЕДНЕГО КВАДРАТИЧЕСКОГО ОТКЛОНЕНИЯ

Г.Н.Вагаев

1°. Пусть ξ - случайная величина с функцией распределения $F(\frac{x-a}{\sigma})$, где $F(y)$ - известная функция, a и σ - неизвестные параметры, $\xi_1 \le \xi_2 \le \ldots \le \xi_n$ - вариационный ряд выборки из этого распределения и

$$\theta_n = \sum_{i=1}^{n} h_i^n \xi_i$$ - линейная оценка параметров a и σ.

В работе [1] в предположении, что

$$h_i^n = \frac{1}{n} h\left(\frac{i}{n+1}\right)$$

и $h(u)$ - функция с ограниченной четвертой производной на $(0, 1)$, методом вариационного исчисления была найдена функция

$$h_0(u) = -\frac{a_1}{G'(u)} \cdot \frac{d^2}{du^2} \cdot \frac{1}{G'(u)} - \frac{a_2}{G'(u)} \cdot \frac{d^2}{du^2} \cdot \frac{G(u)}{G'(u)},$$

минимизирующая дисперсию оценки θ_n / $G(u)$ - функция, обратная к $F(u)$, a_1 и a_2 - константы, зависящие от $F(u)$ /. Доказана состоятельность и асимптотическая эффективность оценки

$$\theta_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} h_0\left(\frac{i}{n+1}\right) \cdot \xi_i .$$

В настоящей работе для доказательства асимптотической эффективности линейных оценок стандартного отклонения σ в случае симметричного распределения используется метод, отличный от метода, примененного в [1]. При этом при нахождении коэффициентов h_i^n, минимизирующих дисперсию оценки θ_n, не предполагалось, что h_i^n являются значениями некоторой функции $h(u)$, и поэтому не требовалась ограниченность четвертой производной $h^{IV}(u)$, а в конечном счете конечность

$$\left[\frac{yF''(y)}{F'(y)}\right]^{(5)}, \quad y \in \{y : 0 < F(y) < 1\}.$$

Найдены минимизирующие дисперсию оценки θ_n коэффициенты

$$h_i^n = \frac{1}{n}\left[\frac{yF''(y)}{F'(y)}\right]'_{y=y_i}$$

/ y_i - квантили распределения $F(y)$ порядка $\frac{i}{n+1}$ / Доказана асимптотическая эффективность оценки θ_n при минимизирующих значениях h_i^n.

Полученные коэффициенты h_i^n совпадают с соответствующими ми-

нимизирующими коэффициентами в [I] .

2°. Пусть

$$\omega_i = \xi_{\left[\frac{n+1}{2}\right]+i} - \xi_{\left[\frac{n}{2}\right]+1-i}$$

- порядковые размахи выборки и

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \omega_i$$

- линейные оценки для неизвестного стандартного отклонения σ /значение k определено ниже/. Распределения ω_i не зависят от математического ожидания $a = M\xi$. Поэтому, не ограничивая общности, можно положить $a = 0$.

Мы будем рассматривать симметричные распределения $F(x)$ / $F(x) = 1 - F(-x)$ / с существующей $F'''(x)$ и $F'(x) > 0$ на $J = \{x : 0 < F(x) < 1\}$. Пусть также выполняется условие:

$(i\ 1)$ если $J = (-b, b)$ конечен, то

$$\lim_{x \to -b} F(x) \left[\frac{xF'(x)}{F(x)}\right]' = 0 ;$$

если бесконечен, то

$$1 - F(x) = x^{-\gamma} h(x),$$

где $\dfrac{h(cx)}{h(x)} \to 1$ при $x \to \infty$, $\gamma > 0$.

Обозначим через x_i и x_{-i} квантили распределения $F(x)$ порядков q_i и $1 - q_i$, через $f(x)$ плотность распределения. В силу симметричности распределения $x_i = -x_{-i}$, $f(x_i) = f(x_{-i})$.

При $n \to \infty$ справедлива

Л е м м а I.

$$\frac{1}{\sigma} M\xi_{[nq_i]} = x_i (1 + o(1)), \qquad /2/$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sigma^2} D\xi_{[nq_i]} = \frac{q_i(1-q_i)}{nf^2(x_i)} (1 + o(1)), \\ (x_i < x_j) \quad &\frac{1}{\sigma^2} \operatorname{cov}\left(\xi_{[nq_i]}, \xi_{[nq_j]}\right) = \frac{q_i(1-q_j)}{nf(x_i)f(x_j)} (1 + o(1)) \end{aligned}\right\} \qquad /3/$$

При $nq_i = O(n)$ лемма доказана в [2] ; при $nq_i \to \infty$ так, что $nq_i = o(n)$, и выполнении условия $(i\ 1)$ лемма доказана в [3] .

Положим

$$\alpha_i = \frac{r_i}{\sum_{j=1}^{k} r_j (x_{-j} - x_j)} , \quad q_i = \frac{\left[\frac{n}{2}\right] + 1 - i}{n+1} . \qquad /3'/$$

/ коэффициенты r_i определены ниже/. Пусть при $n \to \infty$ имеем $k \to \infty$

и $\frac{\left[\frac{n}{2}\right]-k}{n} \to 0$ / тогда и $q_k \to 0$ /, $\left[\frac{n}{2}\right]-k \to \infty$.

Лемма 2.

$$M\Phi_k = \sigma(1+o(1)),$$

$$D\Phi_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} r_i^2 a_i b_i + 2\sum\limits_{i=1}^{k-1} r_i a_i \sum\limits_{j=i+1}^{k} r_j b_j}{2\left(\sum\limits_{i=1}^{k} r_i a_i\right)^2} \cdot \frac{\sigma^2}{n}\left(1+o(1)\right), \qquad /4/$$

где $a_i = \frac{1-2q_i}{f(x_i)}$, $b_i = \frac{q_i}{f(x_i)}$.

Доказательство.

$$M\Phi_k = M\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} r_i \omega_i}{\sum\limits_{j=1}^{k} r_j (x_{-j}-x_j)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} r_i (x_{-i}\sigma - x_i\sigma)}{\sum\limits_{j=1}^{k} r_j (x_{-j}-x_j)}(1+o(1)) = \sigma(1+o(1)).$$

Значит, Φ_k –асимптотически несмещенные оценки.

$$D\left(\sum_{i=1}^{k} r_i \omega_i\right) = D\left[\sum_{i=1}^{k} r_i\left(\xi_{\left[\frac{n+1}{2}\right]+i} - \xi_{\left[\frac{n}{2}\right]+1-i}\right)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} r_i^2 D\xi_{\left[\frac{n+1}{2}\right]+i} + \sum_{i=1}^{k} r_i^2 D\xi_{\left[\frac{n}{2}\right]+1-i} - 2\sum_{i=1}^{k} r_i^2 \operatorname{cov}\left(\xi_{\left[\frac{n+1}{2}\right]+i}, \xi_{\left[\frac{n}{2}\right]+1-i}\right) +$$

$$+2\sum_{j>i}^{k} r_i r_j \operatorname{cov}\left(\xi_{\left[\frac{n}{2}\right]+1-j}, \xi_{\left[\frac{n}{2}\right]+1-i}\right) - 2\sum_{j>i}^{k} r_i r_j \operatorname{cov}\left(\xi_{\left[\frac{n}{2}\right]+1-j}, \xi_{\left[\frac{n+1}{2}\right]+i}\right) +$$

$$+2\sum_{j>i}^{k} r_i r_j \operatorname{cov}\left(\xi_{\left[\frac{n+1}{2}\right]+j}, \xi_{\left[\frac{n+1}{2}\right]+i}\right) - 2\sum_{j>i}^{k} r_i r_j \operatorname{cov}\left(\xi_{\left[\frac{n+1}{2}\right]+j}, \xi_{\left[\frac{n}{2}\right]+1-i}\right).$$

Учитывая /3/, имеем

$$D\left(\sum_{i=1}^{k} r_i \omega_i\right) = \left[2\sum_{i=1}^{k} r_i^2 \frac{q_i(1-2q_i)}{f^2(x_i)} + 4\sum_{j>i}^{k} \frac{r_i r_j q_j (1-2q_i)}{f(x_i) f(x_j)}\right] \cdot \frac{\sigma^2}{n}(1+o(1)).$$

Следовательно,

$$D\Phi_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} r_i^2 a_i b_i + 2\sum\limits_{i=1}^{k-1} r_i a_i \sum\limits_{j=i+1}^{k} r_j b_j}{2\left(\sum\limits_{i=1}^{k} r_i x_i\right)^2} \cdot \frac{\sigma^2}{n}(1+o(1)).$$

Лемма 3. Коэффициенты r_i, минимизирующие дисперсию оценки Φ_k, определяются по формулам /8/ /формулы приведены ниже/.

Доказательство. $D\Phi_k$ -функция от $r_1, r_2, \dots, r_k$, поэтому минимум $D\Phi_k$ следует искать в точках, в которых

$$(D\Phi_k)'_{r_t} = 0 \qquad (t=\overline{1,k}),$$

откуда

$$\left(b_t\sum_{i=1}^{t} r_i a_i + a_t\sum_{j=t+1}^{k} r_j b_j\right)\left(\sum_{i=1}^{k} r_j x_j\right)^2 - x_t\sum_{i=1}^{k} r_i x_i\left(\sum_{i=1}^{k} r_i^2 a_i b_i + 2\sum_{j>i} a_i b_j r_i r_j\right) = 0,$$

или

$$\frac{b_t\sum\limits_{i=1}^{k} r_i a_i + a_t\sum\limits_{j=t+1}^{k} r_j b_j}{x_t} = c, \qquad /5/$$

где

$$c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} r_i^2 a_i b_i + 2\sum\limits_{i=1}^{k-1} r_i a_i \sum\limits_{j=i+1}^{k} r_j b_j}{\sum\limits_{i=1}^{k} x_i r_i} < 0.$$

Для решения системы уравнений /5/ положим $t = s-1;\ s;\ s+1\ (1<s<k)$. Получим три уравнения:

$$b_s\sum_{i=1}^{s-1} r_i a_i + a_{s-1} b_s r_s + a_{s-1}\sum_{j=s+1}^{k} r_j b_j = c x_{s-1},$$

$$b_s\sum_{i=1}^{s-1} r_i a_i + a_s b_s r_s + a_s\sum_{j=s+1}^{k} r_j b_j = c x_s\ ,$$

$$b_{s+1}\sum_{i=1}^{s-1} r_i a_i + a_s b_{s+1} r_s + a_{s+1}\sum_{j=s+1}^{k} r_j b_j = c x_{s+1}$$

с тремя неизвестными

$$\sum_{i=1}^{s-1} r_i a_i\ ,\ \sum_{j=s+1}^{k} r_j b_j\ ,\ r_s\ .$$

Решая уравнения, находим

$$r_s = \frac{c f_s\left[(q_{s+1}-q_s)x_{s-1}f_{s-1} - (q_{s+1}-q_{s-1})x_s f_s + (q_s - q_{s-1})x_{s+1}f_{s+1}\right]}{(q_s - q_{s-1})(q_{s+1}-q_s)} \qquad /6/$$

/вместо a_i и b_i подставлены их значения, и через f_i обозначено $f(x_i)$ /. Для вычисления r_1 и r_k в системе уравнений /5/ нужно рассмотреть две пары уравнений, которые получаются при t = I; 2 и $t = k-1;\ k$. Из первой пары уравнений находим

$$r_1 = \frac{c f_1\left[x_2 f_2(1-2q_1) - x_1 f_1(1-2q_2)\right]}{(q_2-q_1)(1-2q_1)},$$

из второй - /7/

$$r_k = \frac{c f_k\left[x_{k-1}f_{k-1}q_k - x_k f_k q_{k-1}\right]}{q_k(q_k - q_{k-1})}.$$

Поскольку $|x_s| \le |x_k|$, $(s=\overline{1,k})$, x_k подбирается по /10" /,

$$q_{s-1}-q_s=q_s-q_{s+1}=\int\limits_{x_{s+1}}^{x_s} f(x)dx=\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

$|f'(x_s)|$ - ограничена $(s=\overline{1,k})$ и $f(x)\geq\min\limits_{|x|\leq|x_k|} f(x)>0,(|x|\leq|x_k|)$, то

$$\Delta x_s=-(x_{s+1}-x_s)=-(x_s-x_{s-1})+o(\Delta x_s)\to 0,\ n\to\infty.$$

Так как $q(0)=F(0)=\frac{1}{2}$, то $q(x_1)=\frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n+1}\to\frac{1}{2}$ и $x_1\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Поэтому из /6/ и /7/ имеем

$$r_s=cf_s\left[\frac{x_{s+1}f_{s+1}-x_sf_s}{q_{s+1}-q_s}-\frac{x_sf_s-x_{s-1}f_{s-1}}{q_s-q_{s-1}}\right]=cf_s\left\{\frac{[xf(x)]'}{q'(x)}\right\}'_{x=x_s}\Delta x_s+o(\Delta x_s)\quad(s=\overline{2,k-1})$$

$$r_1=cf_1\left[\frac{x_2f_2-x_1f_1}{q_2-q_1}-\frac{x_1f_1-0\cdot f(0)}{q_1-0,5}\right]=-cf_1\left\{\frac{[xf(x)]'}{q'(x)}\right\}'_{x=x_1}\Delta x_1+o(\Delta x_1)\qquad /8/$$

$$r_k=cf_k q_{k-1}\frac{\frac{x_{k-1}f_{k-1}}{q_{k-1}}-\frac{x_kf_k}{q_k}}{q_k-q_{k-1}}=cq_{k-1}\left[\frac{xf(x)}{q(x)}\right]'_{x=x_{k-1}}+o(\Delta x_{k-1})$$

Лемма 3 доказана.

Л е м м а 4. Минимальное значение дисперсии

$$D\Phi_k=\frac{c\sigma^2(1+o(1))}{2n\sum\limits_{i=1}^{k}r_i x_i}. \qquad /9/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$Q=\sum_{i=1}^{k}r_i^2a_ib_i+2\sum_{i=1}^{k-1}a_ir_i\sum_{j=i+1}^{k}b_jr_j=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}r_i^2a_ib_i+\sum_{i=1}^{k-1}a_ir_i\sum_{j=i+1}^{k}b_jr_j+\sum_{j=2}^{k}r_jb_j\sum_{i=1}^{j-1}r_ia_i=$$

$$=\sum_{i=2}^{k-1}r_i\left(r_ia_ib_i+a_i\sum_{j=i+1}^{k}b_jr_j+b_i\sum_{j=1}^{i-1}a_jr_j\right)+$$

$$+r_1\left(r_1a_1b_1+a_1\sum_{j=2}^{k}r_jb_j\right)+r_k\left(r_ka_kb_k+b_k\sum_{i=1}^{k-1}r_ib_i\right).$$

Учитывая /5/, имеем

$$Q=c\sum_{i=1}^{k}r_ix_i$$

и из /4/ - утверждение леммы.

Л е м м а 5. Для $\forall\varepsilon>0\ \exists n,k$ такие, что

$$\left|\frac{D\Phi_k}{\left\{-\frac{n}{\sigma^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf(x)\left[\frac{(xf(x))'}{f(x)}\right]'dx\right\}^{-1}}-1\right|<3\varepsilon. \qquad /10/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию $(i\ 1)$ функция $h(x)$ медленно меняющаяся при $x\to\infty$, поэтому /см. [3] /.

$$\frac{xh'(x)}{h(x)}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$$

При $\mathfrak{I}$, совпадающем со всей числовой прямой, учитывая, что $F(x)=x^{-\gamma}h(x)$, имеем

$$\left[\frac{xf(x)}{q(x)}\right]'=\left[\frac{xF'(x)}{F(x)}\right]'\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0;\quad r_k x_k=\left\{cq_{k-1}\left[\frac{xf(x)}{q(x)}\right]'_{x=x_{k-1}}+o(\Delta x_{k-1})\right\}x_k\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Если же $\mathfrak{I}$ конечен, то непосредственно из условия $(i\ 1)$ следует, что $x_k r_k\to 0$. Поэтому

$$2\sum_{i=1}^{k}r_i x_i=-2c\sum_{i=1}^{k-1}\left\{f(x)\left[\frac{(xf(x))'}{f(x)}\right]'_{x=x_i}\Delta x_i+o(\Delta x_i)\right\}x_i+r_k x_k. \qquad /10'/$$

Интеграл

$$L=-\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\left[\frac{(xf(x))'}{f(x)}\right]'dx$$

сходится,как показано ниже, к величине, отличной от нуля. Следовательно, для $\forall\varepsilon>0\ \exists x_k$ такое, что

$$\left|\frac{1}{L}-\frac{1}{\int_{x_k}^{x_{-k}}xf(x)\left[\frac{(xf(x))'}{f(x)}\right]'dx}\right|<\frac{\varepsilon}{L}. \qquad /10''/$$

По /10'/. $\exists r, k$ - такие, что

$$\left|\frac{1}{\frac{2}{c}\sum_{i=1}^{k}r_i x_i}-\frac{1}{\int_{x_k}^{x_{-k}}xf(x)\left[\frac{(xf(x))'}{f(x)}\right]'dx}\right|<\frac{\varepsilon}{L}.$$

Поэтому

$$\left|\frac{1}{L}-\frac{1}{\frac{2}{c}\sum_{i=1}^{k}r_i x_i}\right|<\frac{2\varepsilon}{L}. \qquad /11/$$

Выберем n настолько большим, чтобы $o(1)$, входящее в /9/,было меньше ε. Тогда из /11/ получим утверждение леммы.

Л е м м а 6.

$$\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[f'_\sigma(x,\sigma)]^2}{f(x,\sigma)}dx=-\int_{-\infty}^{\infty}yf(y)\left[\frac{(yf(y))'}{f(y)}\right]'dy, \qquad /12/$$

где $f(x,\sigma)=F'_x\left(\frac{x}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}f\left(\frac{x}{\sigma}\right)$.

Поскольку

$$f'_\sigma\left(\frac{x}{\sigma}\right)=-\frac{x}{\sigma^2}f'_{\frac{x}{\sigma}}\left(\frac{x}{\sigma}\right),$$

то

$$\frac{[f'_\sigma(x,\sigma)]^2}{f(x,\sigma)} = \frac{\sigma}{f(\frac{x}{\sigma})}\left\{\left[\frac{1}{\sigma}f\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right]'_\sigma\right\}^2 = \frac{\sigma}{f(\frac{x}{\sigma})}\left[-\frac{f(\frac{x}{\sigma})}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma}f'_\sigma\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right]^2 =$$

$$= \frac{\sigma}{f(\frac{x}{\sigma})}\left[-\frac{f(\frac{x}{\sigma})}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma}\left(-\frac{x}{\sigma^2}\right)f'_{\frac{x}{\sigma}}\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right] = \frac{1}{\sigma^3 f(\frac{x}{\sigma})}\left[f\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \frac{x}{\sigma}f'_{\frac{x}{\sigma}}\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right]^2 = \frac{1}{\sigma^3 f(y)}\left\{[yf(y)]'\right\}^2,$$

где $y = \frac{x}{\sigma}$. Интегрируя по частям, получим

$$\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[f'_\sigma(x,\sigma)]^2}{f(x,\sigma)}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\{[yf(y)]'\}^2}{f(y)}dy = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{[yf(y)]'d\,[yf(y)]}{f(y)} =$$

$$= y[yf(y)]'\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)\left\{\frac{[yf(y)]'}{f(y)}\right\}'dy .$$

Из того, что

$$\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}y^2 f(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x,\sigma)dx = \sigma^2 < \infty ,$$

следует

$$y^2 f(y)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

а так как

$$\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}y^2 f'(y)dy = -2\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}yf(y)dy = -2\int_{-\infty}^{\infty}x f(x,\sigma)dx = 0,$$

то

$$y^2 f'(y)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

и поэтому

$$y[yf(y)]'\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Тем самым доказана лемма 6 и

Т е о р е м а. Для симметричных распределений $F\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$, /$a$ и σ - неизвестные математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение/ с существующей $F'''(y)$ и $F'(y) > 0$ на $\mathcal{J} = \{y : 0 < F(y) < 1\}$ при выполнении условия $(l\ 1)$, линейные оценки σ

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left\{ \xi_{\left[\frac{n+1}{2}\right]+i} - \xi_{\left[\frac{n}{2}\right]+1-i} \right\} ,$$

где $\left[\frac{n}{2}\right] - k \to \infty$, $\left[\frac{n}{2}\right] - k = o(n)$, коэффициенты α_i определены по формулам /3'/, /6/, /7/, /8/, асимптотически эффективны.

Автор выражает благодарность В.А. Рогозину за ряд полезных советов.

Поступила в редакцию 18.5.1970 г.

Л и т е р а т у р а

1. J. Jung, On linear estimates defined by a continuous weight function, Arkiv for Matematik, 3, 3, 1956.

2. Э.Гумбель, Статистика экстремальных значений, Изд.МИР, М.1965,

3. T. Kawata , Limit distribution of single order statistic, Rep.Stat.Appl.Res.JUSE (Japan), I, 4, 1951.