Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 8.
УДК.519.95.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА НАВЕДЕНИЯ ПРИ ЗАПАЗДЫВАНИИ ИНФОРМАЦИИ.II

В.С.Шишмаков /Свердловск/

В статье рассматривается дифференциальная игра приведения на заданное множество. В данной части работы на основе описанной в первой части [1] программной задачи строится оптимальное управление первого игрока. Рассматриваются достаточные условия, при которых оптимальное управление гарантирует приведение системы на заданное множество за конечный интервал времени. Материал статьи примыкает к работам [2] - [6] .

1. Движение конфликтно управляемой системы описывается уравнениями:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u - C(t)v, \qquad /1.1/$$
$$t \geq t_0 - \eta, \quad x[t_0-\eta] = x_0.$$

Здесь η - положительная постоянная величина;

x - n - мерный фазовый вектор системы;

u и v - векторные управляющие воздействия размерности k и l соответственно; $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ - непрерывные по t матрицы соответствующих размерностей. Управления $u(t)$ и $v(t)$ стеснены ограничениями

$$u(t) \in U_t, \quad v(t) \in V_t,$$

где U_t , V_t - ограниченные, замкнутые и выпуклые множества, непрерывные по t .

Первый игрок (u) стремится привести систему /1.1/ на выпуклое, замкнутое множество M , второй игрок стремится этому помешать. Данная игровая ситуация рассматривается с позиции первого игрока. Первый игрок строит свое управление в каждый момент времени $t \geq t_0$ на основании информации о позиции игры $p = \{t, x[t-\eta], u^t\}$ ./Здесь и далее будем использовать определения и обозначения, принятые в [1]/.

Рассматривается следующая задача.

ЗАДАЧА 1.1. Требуется построить допустимую стратегию первого игрока $U^0 \div U^0(t, x, u^t)(t \geq t_0)$ такую, что любое движение системы дифференциальных уравнений в контингенциях

$$\frac{dx[t]}{dt} \in A(t)x(t) + B(t)U(t) - C(t)V_t \qquad /1.2/$$

$$u(t) = \begin{cases} u^{t_0}(t) & \text{при } t \in [t_0 - \eta, t_0) \\ U^0(t, x[t-\eta], u^t) & \text{при } t \in [t_0, \theta] \end{cases}$$

попадало на множество M не позже конечного момента времени θ .

2. Опишем построение экстремальной стратегии $U^0 \div U^0(t,x,u^t)$, которая при выполнении условия стабильности поглощения [I] решает задачу I.I.

Обозначим через $U^{(e)}(t,s^0)$ множество всех векторов u_e, удовлетворяющих условию

$$s^{0\prime}X(t-\eta,t)B(t)u_e = \min_u s^{0\prime}X(t-\eta,t)\cdot B(t)\cdot u \qquad /2.1/$$
$$u\in U_t,\ t\geqslant t_0.$$

Здесь $s^0 = s^0(t,x,u^t)$ – вектор, доставляющий максимум выражению /2.I/ из [I].

Экстремальной стратегией первого игрока назовем стратегию $U^0 \div U^0(t,x,u^t)$, определяемую следующим соотношением:

$$U^0(t,x,u^t) = \begin{cases} U_t & \text{при } \varepsilon^0(t,x,u^t)=0, \\ U^{(e)}(t,s^0(t,x,u^t)) & \text{при } \varepsilon^0(t,x,u^t)>0. \end{cases} \qquad /2.2/$$

Покажем, что U^0 является допустимой стратегией первого игрока. Выпуклость и замкнутость множеств $U^0(t,x,u^t)$, а также включение $U^0(t,x,u^t)\subset U_t$ вытекают непосредственно из соотношений /2.I/ и /2.2/. Для доказательства выполнения условия 3 в определении I.3 из [I] в силу утверждения /УП/ [I] достаточно показать, что множества $U^{(e)}(t,s^0)$ полунепрерывны сверху относительно включения по t и s^0. Последнее выполняется, что можно доказать так же, как и в работе [3].

Ниже приводится доказательство следующего утверждения.

Т е о р е м а 2.I. Пусть для начальной позиции $\{t_0, x_0, u^{t_0}\}$ существует момент поглощения θ^0 [I], пусть выполняется условие стабильности поглощения; тогда экстремальная стратегия $U^0 \div U^0(t,x,u^t)$ гарантирует приведение любого движения системы /I.I/ на множество M не позже, чем к моменту $t=\theta^0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.I основано на вспомогательной программной задаче, рассмотренной в [I]. Допустим, что в результате игры реализовалась позиция $\{t_*, x_*, u_*^{t_*}\}$ такая, что выполняется неравенство

$$\varepsilon^0(t_*, x_*[t_*-\eta], u_*^{t_*})>0. \qquad /2.3/$$

Возьмем эту позицию за начальную. Покажем, что вдоль любого решения $x(t)$ системы дифференциальных уравнений в контингенциях /I.2/, порожденного стратегиями $U^0(t,x,u^t)$ и V_t $(t\geqslant t_*)$, выполняется условие

$$\left\{\frac{d\varepsilon^0[t]}{dt}\right\}_{t=t_*+0} \leqslant \lambda\,\varepsilon^0[t_*]. \qquad /2.4/$$

Здесь $\varepsilon^0[t]=\varepsilon^0(t,x[t-\eta],u^t)$; λ – некоторая положительная постоянная; символ в левой части /2.4/ означает верхнее правое произ-

водное число, вычисленное в точке $t=t_*$.

Допустим, что второй игрок на отрезке времени $[t_*-\eta, t-\eta+\Delta]$ реализовал управление $v^*[\tau]$ $(0<\Delta<\eta)$. Возьмем точку w_* из множества программного поглощения [1] $W(u_*^{t_*}, t_*, \theta^0)$ такую, что

$$\|x_*-w_*\|=\varepsilon^0(t_*, x_*, u_*^{t_*}). \qquad /2.5/$$

Такая точка существует в силу замкнутости множеств $W(u^t, t, \theta^0)$.

Поскольку выполняется условие стабильности поглощения, то существует управление первого игрока $u^*(\tau)(\tau\in[t_*, t_*+\Delta))$ такое, что точка $w^*=x[t_*-\eta]$ парой управлений $v^*[\tau]$ и $u_*^{t_*}[\tau](\tau\in[t_*-\eta, t_*-\eta+\Delta))$ переводится в точку $w^0\in W(u_*^{t_*+\Delta}, t_*+\Delta, \theta^0)$, где

$$u_*^{t_*+\Delta}[\tau]=\begin{cases} u^{t_*}[\tau] & \text{при } \tau\in[t_*-\eta+\Delta, t_*), \\ u^*[\tau] & \text{при } \tau\in[t_*, t_*+\Delta). \end{cases} \qquad /2.6/$$

Пусть та же пара управлений переводит систему /I.I/ из точки $x_*=x_*[t_*-\eta]$ в точку $x^0=x^0[t_*-\eta+\Delta]$. Из формулы Коши для точек x^0 и w^0 вытекает равенство

$$\|x^0-w^0\|=\|X(t_*-\eta+\Delta, t_*-\eta)\cdot(x_*-w_*)\|. \qquad /2.7/$$

Из равенств /2.5/ и /2.7/ следует, что расстояние от точки x^0 до множества $W(u_*^{t_*+\Delta}, t_*+\Delta, \theta^0)$ оценивается следующим образом

$$\varepsilon^0(t_*+\Delta, x^0, u_*^{t_*+\Delta})\le(1+\lambda\Delta)\varepsilon^0(t_*, x_*, u_*^{t_*}). \qquad /2.8/$$

Здесь λ – положительная постоянная, удовлетворяющая при всех t неравенству

$$\|X(t-\eta+\Delta, t-\eta)e\|\le 1+\lambda\Delta,\ \Delta\le\Delta_0,\ \|e\|=1.$$

Возьмем экстремальное управление

$$u_e[\tau]\in U^{(e)}(\tau\ , x[\tau-\eta], u_e^\tau)(\tau\in[t_*, t_*+\Delta)).$$

В момент $t=t_*+\Delta$ управлению $u_e^{t_*+\Delta}[\tau]$, где

$$u_e^{t_*+\Delta}[\tau]=\begin{cases} u_*^{t_*}[\tau] & \text{при } \tau\in[t_*-\eta+\Delta, t_*), \\ u_e[\tau] & \text{при } \tau\in[t_*, t_*+\Delta), \end{cases} \qquad /2.9/$$

соответствует множество $W(u_e^{t_*+\Delta}, t_*+\Delta, \theta^0)$.

Оценим разность расстояний от точки $x^0=x^0[t_*-\eta+\Delta]$ до множеств $W(u_e^{t_*+\Delta}, t_*+\Delta, \theta^0)$ и $W(u_*^{t_*+\Delta}, t_*+\Delta, \theta^0)$. По определению величины $\varepsilon^0(t, x, u^t)$ [1] получим

$$\varepsilon^0(t_*+\Delta, x^0, u_e^{t_*+\Delta})-\varepsilon^0(t_*+\Delta, x^0, u_*^{t_*+\Delta})=\varepsilon_e-\varepsilon^0=$$

$$=\max_{\|s\|=1}[s'x-\rho(s, t_*+\Delta, \theta^0, u_e^{t_*+\Delta})]-$$

$$-\max[s'x-\rho(s, t_*+\Delta, \theta^0, u_*^{t_*+\Delta})]. \qquad /2.10/$$

Пусть S^0 - вектор, доставляющий максимум первому слагаемому в/2.10/. Тогда по определению опорной функции $\rho(S, t, \theta^0, u^t)$ из /2.10/ следует неравенство

$$\varepsilon_e^0 - \varepsilon^0 \le \max_x S^{0'}x - \max_{x_e} S^{0'}x_e , \qquad /2.11/$$

где $x \in W(u_*^{t_*+\Delta}, t_* + \Delta, \theta^0)$, $x_e \in W(u_e^{t_*+\Delta}, t_*+\Delta, \theta^0)$. Пусть точка x доставляет максимум первому слагаемому в правой части /2.11/. Из свойства /IУ/ из [I] с учетом выражений /2.6/ и /2.9/ следует, что существует такая точка x_e, что имеет место равенство

$$x = x_e + \int_{t_*}^{t_*+\Delta} X(t_* - \eta + \Delta, \tau) B(\tau)(u_e[\tau] - u^*[\tau]) d\tau. \qquad /2.12/$$

Из выражений /2.11/ и /2.12/ следует оценка

$$\varepsilon_e^0 - \varepsilon^0 \le \int_{t_*}^{t_*+\Delta} S^{0'}(t_*+\Delta) X(t_* - \eta + \Delta, \tau) B(\tau)(u_e[\tau] - u^*[\tau]) d\tau. \qquad /2.13/$$

Здесь вектор - функция $S^0(\tau) = S^0(\tau , x[\tau - \eta], u^\tau)$ непрерывна по τ /в силу свойства /УП/ из [I] и непрерывности вектор-функций $x[\tau]$ и $q^\tau = \int_{\tau-\eta}^{\tau} X(\theta^0, \xi) B(\xi) u^\tau(\xi) d\xi$/ ; матрица $X(t, \tau)$ непрерывна по τ ; вектор-функция $u_e[\tau]$ удовлетворяет условию

$$S^{0'}(\tau) X(\tau - \eta, \tau) B(\tau) u_e[\tau] = \min_u S^{0'}(\tau) X(\tau - \eta, \tau) B(\tau) u$$

при $u \in U_\tau$.

Тогда подинтегральное выражение в /2.13/ можно оценить сверху функцией $\alpha(\Delta)$, причем $\alpha(\Delta) \to 0$ при $\Delta \to 0$. Отсюда следует оценка

$$\varepsilon_e^0 - \varepsilon^0 \le \Delta \cdot \alpha(\Delta). \qquad /2.14/$$

Из оценок /2.8/ и /2.14/ вытекает, что выполняется неравенство /2.4/.

Поскольку справедлива оценка /2.4/, то в силу непрерывности функции $\varepsilon^0[t]$ следует, что если для начальной позиции $\{t_0, x_0, u^{t_0}\}$ выполняется включение $x_0 \in W(u^{t_0}, t_0, \theta^0)$, то любое решение системы дифференциальных уравнений в контингенциях /1.2/, порожденное экстремальной стратегией первого игрока $U^0 \div U^0(t, x, u^t)$ и стратегией второго игрока $V \div V_t$ удовлетворяет включению

$$x[t-\eta] \in W(u^t, t, \theta^0) \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \theta^0].$$

Отсюда по свойству /П/ из [I]справедливо включение $x[\theta^0] \in M$

Теорема доказана.

3.Теорема 2.I. доказывает, что экстремальная стратегия $U^0 \div \div U^0(t, x, u^t)$ гарантирует приведение системы /I.I/ на множество M не позже момента поглощения θ^0 в случае, когда множества $W(u^t, t, \theta^0)$ стабильны.Рассмотрим условия, обеспечивающие выполнение свойства стабильности множеств $W(u^t, t, \theta^0)$.

Пусть выбрана позиция $\{t_*, x_*, u_*^{t_*}\}$, для которой выполняется включение $x_* \in W(u_*^{t_*}, t_*, \theta^0)$. Пусть также выбрано число $\Delta (0<\Delta<\eta)$ и допустимое управление второго игрока $v^0(t), (t\in[t_*-\eta, t_*-\eta+\Delta))$. Пара управлений $u_*^{t_*}(t)$ и $v^0(t), (t\in[t_*-\eta, t_*-\eta+\Delta))$ переводит систему /I.I/ из точки $x[t_*-\eta]=x_*$ в точку $x[t_*-\eta+\Delta]$, которую обозначим x^0. Построим множество управлений первого игрока $u_*^{t_*+\Delta}(t)\ (t\in[t_*-\eta+\Delta, t_*+\Delta))$, определяемых выражением:

$$u_*^{t_*+\Delta}(t)= \begin{cases} u_*^{t_*}(t) & \text{при } t\in[t_*-\eta+\Delta, t_*), \\ u(t) & \text{при } t\in[t_*, t_*+\Delta), \end{cases} \qquad /3.1/$$

где $u(t)$ пробегает всевозможные допустимые управления $u(t)\in U_t$, $(t\in[t_*, t_*+\Delta))$. Это множество обозначим $Y(u_*^{t_*})$. В силу выпуклости и ограниченности множеств U_t множество $Y(u_*^{t_*})$ является выпуклым и ограниченным в $L_2[t_*-\eta+\Delta, t_*+\Delta]$.

Пусть $u^{t_*+\Delta}(t)$ - управление первого игрока, для которого выполняется условие $x^0 \notin W(u^{t_*+\Delta}, t_*+\Delta, \theta^0)$. Тогда по определению множеств $W(u^t, t, \theta^0)$ управлению $u^{t_*+\Delta}(t)$ можно поставить в соответствие некоторое множество $V^*(u^{t_*+\Delta})$ управлений второго игрока $v^*(t)$, $(t\in[t_*-\eta+\Delta, \theta^0])$ таких, что любое из движений системы /I.I/, порожденных парами управлений $v^*(t)$, $u^*(t)$, из точки $x[t_*-\eta+\Delta]=x^0$ не попадет в момент θ^0 на множество M. Здесь управления $u^*(t)$ определяются соотношением:

$$u^*(t)= \begin{cases} u^{t_*+\Delta}(t) & \text{при } t\in[t_*-\eta+\Delta, t_*+\Delta], \\ u(t) & \text{при } t\in[t_*+\Delta, \theta^0], \end{cases}$$

где $u(t)$ пробегает всевозможные допустимые управления $u(t)\in U_t$, $(t\in[t_*+\Delta, \theta^0])$. Таким образом можно получить некоторое соответствие

$$u^{t_*+\Delta}(t) \to V^*(u^{t_*+\Delta}).$$

С другой стороны, поскольку выполняется включение $x_*\in W(u_*^{t_*}, t_*, \theta^0)$, каждому управлению $v(t)$, где

$$v(t) = \begin{cases} v^0(t) & \text{при } t\in[t_*-\eta, t_*-\eta+\Delta), \\ v^*(t) & \text{при } t\in[t_*-\eta+\Delta, \theta^0], \end{cases} \qquad /3.2/$$

можно поставить в соответствие множество управлений $u(t) (t\in[t_*, \theta^0]$ таких, что пара управлений $v(t)$, $u(t)$, где

$$u_*(t)= \begin{cases} u_*^{t_*}(t) & \text{при } t\in[t_*-\eta, t_*). \\ u(t) & \text{при } t\in[t_*, \theta^0] \end{cases} \qquad /3.3/$$

переводит систему /I.I/ из точки $x[t_*-\eta]=x_*$ в некоторое положе-

кие $x[\vartheta]\in M$. В свою очередь, каждому управлению $u_*(t)$ поставим в соответствие управление $u_*^{t_*+\Delta}(t), (t\in[t_*-\eta+\Delta, t_*+\Delta))$, совпадающее с $u_*(t)$ на этом промежутке. То есть можно установить соответствие между управлением $v^*(t), (t\in[t_*-\eta+\Delta,\vartheta^0])$ и множеством $E(v^*)$ управлений $u_*^{t_*+\Delta}(t)$. Это соответствие обозначим $v^*(t)\to E(v^*)$. Очевидно, что справедливо включение $E(v^*)\subset Y(u_*^{t_*})$.

Таким образом, для выбранных позиций $\{t_*, x_*, u_*^{t_*}\}$, $(x_*\in \in W(u_*^{t_*}, t_*,\vartheta^0))$, числа $\Delta, (0<\Delta<\eta)$, управления $v^0(t), (t\in[t_*-\eta, t-\eta+\Delta))$ можно установить некоторое отображение $u^{t_*+\Delta}(t)\to E^*(u^{t_*+\Delta})$, определяемое двумя соответствиями $u^{t_*+\Delta}(t)\to V^*(u^{t_*+\Delta})$ и $v^*(t)\to E(v^*)$. Отображение $u^{t_*+\Delta}(t)\to E^*(u^{t_*+\Delta})$ определяется только в области тех управлений $u^{t_*+\Delta}(t)$, которые удовлетворяют условию $x^0\notin \notin W(u_*^{t_*+\Delta}, t_*+\Delta,\vartheta^0)$. Для множеств $E^*(u^{t_*+\Delta})$ управлений $u_*^{t_*+\Delta}(t)$ очевидно справедливо включение $E^*(u^{t_*+\Delta})\subset Y(u_*^{t_*})$.

Докажем следующее достаточное условие стабильности множеств $W(u^t, t, \vartheta^0)$.

Л е м м а 3.1. Если для любой позиции $\{t_*, x_*, u_*^{t_*}\}$, $(x_*\in W(u_*^{t_*}, t_*,\vartheta^0))$, любого управления $v^0(t), (t\in[t_*-\eta, t_*-\eta+\Delta))$ и любого достаточно малого числа $\Delta, (0<\Delta<\eta)$ отображение $u^{t_*+\Delta}(t)\to E^*(u^{t_*+\Delta})$ можно выбрать таким, что множества $E^*(u^{t_*+\Delta})$ будут выпуклыми и ω - полунепрерывными сверху относительно включения по $u^{t_*+\Delta}(t)$, то множества $W(u^t, t,\vartheta^0)$ стабильны.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы ведется от противного. Допустим, что множества $W(u^t, t,\vartheta^0)$ не являются стабильными. Это означает [1], что для произвольно малого $\Delta, (0<\Delta<\eta)$ существует позиция $\{t_*, x_*, u_*^{t_*}\}, (x_*\in W(u_*^{t_*}, t_*,\vartheta^0))$ и управление $v^0(t), (t\in[t_*-\eta, t_*-\eta+\Delta))$ такие, что соотношение $x^0\notin W(u_*^{t_*+\Delta}, t_*+\Delta,\vartheta^0)$ выполняется для всех управлений $u_*^{t_*+\Delta}(t)\in Y(u_*^{t_*})$. Но тогда можно построить отображение всех элементов $u_*^{t_*+\Delta}(t)$ множества $Y(u_*^{t_*})$ на множества $E^*(u_*^{t_*+\Delta})\subset \subset Y(u_*^{t_*})$. Это отображение удовлетворяет всем условиям теоремы о неподвижной точке [7].

В силу этой теоремы существует управление $u_0^{t_*+\Delta}(t)\in Y(u_*^{t_*})$ такое, что выполняется включение $u_0^{t_*+\Delta}(t)\in E^*(u_0^{t_*+\Delta})$. Но это невозможно, так как по построению множеств $E^*(u^{t_*+\Delta})$ получается, что одновременно движение $x[t]$ приходит из точки $x^0=x[t_*-\eta+\Delta]$ в момент ϑ^0 на множество M, и в то же время не может попасть на M в момент ϑ^0. Полученное противоречие доказывает лемму 3.1.

4. Условия леммы 3.1 базируются на построении отображения $u^{t_*+\Delta}(t)\to E^*(u^{t_*+\Delta})$. Опишем теперь построение конкретного отображения $u^{t_*+\Delta}(t)\to E^*(u^{t_*+\Delta})$, обладающего свойствами указанными в лемме 3.1.

Обозначим через $\rho^{(1)}(\ell, t, \theta^o), \rho^{(2)}(\ell, t-\eta, \theta^o), \rho_{(-M)}(\ell)$ - опорные функции множеств

$$G^{(1)}(t,\theta^o),$$
$$G^{(2)}(t-\eta,\theta^o), -M.$$
$$\rho^{(1)}(\ell,t,\theta^o) = \max_x \ell' x \quad \text{при} \quad x \in G^{(1)}(t,\theta^o),$$
$$\rho^{(2)}(\ell,t-\eta,\theta^o) = \max_x \ell' x \quad \text{при} \quad x \in G^{(2)}(t-\eta,\theta^o),$$
$$\rho_{(-M)}(\ell) = \max_x \ell' x \quad \text{при} \quad -x \in M.$$

По определению множества $W(u^t, t, \theta^o)$ [1] его можно представить как совокупность векторов w, удовлетворяющих условию

$$G^{(2)}(t-\eta,\theta^o) \subset G^{(1)}(t,\theta^o) + X(\theta^o, t-\eta)w + g^t - M,$$

где

$$g^t = \int_{t-\eta}^{t} X(\theta^o, \tau) B(\tau) u^t[\tau] d\tau.$$

Отсюда следует, что точка w тогда и только тогда принадлежит множеству $W(u^t, t, \theta^o)$, когда выполняется условие

$$\max_{\|S\|=1} \{ \rho^{(2)}(\ell, t-\eta, \theta^o) - \rho^{(1)}(\ell, t, \theta^o) -$$
$$- \rho_{(-M)}(\ell) - \ell' g^t - \ell' X(\theta^o, t-\eta) w \} \leq 0. \qquad /4.1/$$

Возьмем позицию $\{t^*, x^o, u^{t^*}\}$ такую, что $x^o \notin W(u^{t^*}, t^*, \theta^o)$. Для точки x^o очевидно справедливо неравенство

$$\alpha^o(t^*, x^o, u^{t^*}) = \max_{\|S\|=1} \{ \rho^{(2)}(\ell, t^*-\eta, \theta^o) - \rho^{(1)}(\ell, t^*, \theta^o) -$$
$$- \rho_{(-M)}(\ell) - \ell' g^{t^*} - \ell' X(\theta^o, t^*-\eta) x^o \} > 0. \qquad /4.2/$$

Обозначим через $G(t^*, x^o, u^{t^*}, \theta^o)$ следующее множество

$$G(t^*, x^o, u^{t^*}, \theta^o) = G^{(1)}(t^*, \theta^o) + g^{t^*} + X(\theta^o, t^*-\eta) \cdot x^o - M \qquad /4.3/$$

Условие /4.2/ означает, что $\alpha^o(t^*, x^o, u^{t^*})$ является наименьшим значением параметра α, при котором выполняется включение

$$G^{(2)}(t^*-\eta, \theta^o) \subset G^{\alpha}(t^*, x^o, u^{t^*}, \theta^o).$$

Здесь G^{α} - замкнутая α - окрестность множества G.

Пусть $H^2(t^*, \theta^o)$ - граница области $G^2(t^*, \theta^o)$ и $H^{\alpha^o}(t^*, x^o, u^{t^*}, \theta^o)$ - граница области $G^{\alpha^o}(t^*, x^o, u^{t^*}, \theta^o)$. Обозначим через $H^o(t^*, x^o, u^{t^*}, \theta^o)$ пересечение замкнутых множеств $H^{(2)}(t^*, \theta^o)$ и $H^{\alpha^o}(t^*, x^o, u^{t^*}, \theta^o)$. Множество $H^o(t^*, x^o, u^{t^*}, \theta^o)$ в силу условия /4.2/ непусто. Рассмотрим множество $V(u^{t^*})$ всех допустимых управлений $v(t)$, $(t \in [t^*-\eta, \theta^o])$, которые удовлетворяют условию

$$q=\int_{t^*-\eta}^{\theta^0} X(\theta^0,\tau)C(\tau)v(\tau)d\tau \quad \text{при} \quad q\in H^0(t^*,x^0,u^{t^*},\theta^0) \qquad /4.4/$$

Покажем, что множества $V(u^{t^*})$ являются ω - полунепрерывными сверху относительно включения по $u^{t^*}(t)$. Допустим, от противного, что это не так. Это означает, что существуют такие управления $u_0^{t^*}(t)\in L_2[t^*-\eta,t^*]$, $V_0(t)\in L_2[t^*-\eta,\theta^0]$ и слабо сходящиеся к ним последовательности управлений $\{u_k^{t^*}(t)\}$, $\{V_k(t)\}$, что при выполнении включений $V_k(t)\in V(u_k^{t^*})$ имеет место соотношение $V_0(t)\notin V(u_0^{t^*})$. Отсюда $q_0\notin H^0(t^*,x^0,u^{t^*},\theta^0)$, где

$$q_0=\int_{t^*-\eta}^{\theta^0} X(\theta^0,\tau)C(\tau)v_0^{t^*}(\tau)d\tau. \qquad /4.5/$$

В силу слабой сходимости последовательности управлений $\{v_k(t)\}$ к $v_0(t)$ последовательность векторов $\{q_k\}$ сходится к вектору q_0, где

$$q_k=\int_{t^*-\eta}^{\theta^0} X(\theta^0,\tau)C(\tau)v_k(\tau)d\tau.$$

Так как $q_0\in H^{(\eta)}(t^*,\theta^0)$, то из /4.5/ следует, что $q_0\notin H^{\alpha^0}(t^*,x^0,u^{t^*},\theta^0)$. Тогда, поскольку $H^{\alpha^0}(t^*,x^0,u^{t^*},\theta^0)$ - замкнутое множество, существует число $\varepsilon>0$ такое, что выполняется неравенство

$$\rho(q_0,H^{\alpha_0}(t^*,x^0,u^{t^*},\theta^0))>\varepsilon, \qquad /4.6/$$

где $\rho(q,H)$ - евклидово расстояние от точки q до множества H. Множество $G^{\alpha}(t^*,x^0,u^{t^*},\theta^0)$ очевидно изменяется непрерывно с изменением q^{t^*} и α. Тогда, в силу сходимости векторов $q_k^{t^*}$ к $q_0^{t^*}$ при $u_k^{t^*}(t)\xrightarrow[\omega]{} u_0^{t^*}(t)$ и в силу сходимости векторов q_k к q_0 для достаточно больших k справедливы неравенства

$$\rho(q_k,H^{\alpha^0}(t^*,x^0,u^{t^*},\theta^0))<\frac{\varepsilon}{2},\quad \rho(q_k,q_0)<\frac{\varepsilon}{2},$$

которые противоречат неравенству /4.6/. Следовательно, ω - полунепрерывность множеств $V(u^{t^*})$ сверху относительно включения по $u^{t^*}(t)$ имеет место.

Пусть теперь даны позиция $\{t_*,x_*,u_*^{t_*}\}$, $(x_*\in W(u_*^{t_*},t_*,\theta^0))$ число Δ, $(0<\Delta<\eta)$, управление $v^0(t)$, $(t\in[t_*-\eta,\ t_*-\eta+\Delta))$. Отображение $u^{t_*+\Delta}(t)\to E^*(u^{t_*+\Delta})$ построим следующим образом. В качестве соответствия $u^{t_*+\Delta}(t)\to V^*(u^{t_*+\Delta})$ возьмем соответствие $u^{t^*}(t)\to V(u^{t^*})$, полагая в нем $t^*=t_*+\Delta$, $u^{t^*}(t)=u^{t_*+\Delta}(t)$, $v(t)=v^*(t)$. В качестве множества $E(v^*)$ возьмем множество управлений $u_*^{t_*+\Delta}(t)$,

которое соответствует множеству всех управлений $u_*(t)$ /3.3/, переводящих вместе с управлением $V(t)$ /3.2/ систему /I.I/ из точки $x_* = x[t_*-\varrho]$ в некоторое положение $x[\theta^0]\in M$.

Множества $V^*(u^{t_*+\Delta})$, по доказанному выше, ω - полунепрерывны сверху относительно включения по $u^{t_*+\Delta}(t)$. Аналогично можно доказать для множеств $E(v^*)$ ω - полунепрерывность сверху относительно включения по $v^*(t)$. Отсюда вытекает, что множества $E^*(u^{t_*+\Delta})$ ω - полунепрерывны сверху относительно включения по $u^{t_*+\Delta}(t)$.

В силу выпуклости множеств $G^{(1)}(t,\theta^0)$ и M множество $E(v^*)$ выпукло. Действительно, обозначив множество всех управлений $u_*(t)$/3.3/ через $U_*(t)$, по формуле Коши можно записать равенство

$$M\bigcap_{\theta^0}[G^{(1)}(t_*,\theta^0)+q_*^{t*}+x_*-q_*]= \tag{4.7}$$

$$=\int_{t_*-\varrho}^{\theta^0} X(\theta^0,\tau)B(\tau)U_*(\tau)d\tau+x_*-q_*,$$

где
$$q_*=\int_{t_*-\varrho}^{\theta^0}X(\theta^0,\tau)C(\tau)v(\tau)d\tau, \text{ а } v(t)$$

определяется выражением /3.2/. Поскольку в левой части стоит выпуклое множество, то множество управлений $U_*(t)$, а,следовательно,и $E(v^*)$, будет выпуклым.

Теперь, чтобы удовлетворить условию леммы 3.I о выпуклости множеств $E^*(u^{t_*+\Delta})$ достаточно выпуклости множеств $V^*(u^{t_*+\Delta})$.

Покажем, что множества $V^*(u^{t_*+\Delta})$ выпуклы, если имеет место следующее условие.

Условие 4.I. Для любой позиции $\{t^*, x^0, u^{t^*}\}$, для которой выполняется соотношение $x^0 \notin W(u^{t^*}, t^*, \theta^0)$, максимум в выражении /4.2/ достигается на единственном векторе ℓ^0.

Действительно, в этом случае множество $H^{\alpha^0}(t^*, x^0, u^{t^*}\theta^0)$ целиком лежит в гиперплоскости с направляющим вектором ℓ^0 и является выпуклым множеством /с учетом выпуклости множеств $G^{(2)}(t^*, \theta^0)$ и $G^{\alpha^0}(t^*, x^0, u^{t^*}, \theta^0)$ /. Отсюда следует выпуклость множеств $V(u^{t^*})$.

Таким образом, при выполнении условия 4.I построенное отображение $u^{t_*+\Delta}(t)\to E^*(u^{t_*+\Delta})$ удовлетворяет условиям леммы 3.I, т.е. условие 4.I является достаточным для стабильности множеств $W(u^t, t, \theta^0)$.

Справедливо следующее утверждение, являющееся следствием леммы 3.I и теоремы 2.I.

Т е о р е м а 4.I. Если для любой позиции $\{t, x, u^t\}$ такой, что $x\notin W(u^t, t, \theta^0)$, максимум в выражении /4.2/ достигается на единственном векторе ℓ^0, то экстремальная стратегия гарантирует

приведение системы /I.I/ на множество M не позже момента поглощения θ^0 .

Автор благодарен Н.Н.Красовскому за постановку задачи и ценные советы.

Поступила в редакцию 28.9.1970 г.

Литература

I.В.С.Шишмаков.Дифференциальная игра наведения при запаздывании информации.I. Сб."Управляемые системы" вып.7. Новосибирск, 1970.

2.Н.Н.Красовский. К задаче о преследовании. Доклады АН СССР, том I9I, № 2, I970.

3. Н.Н.Красовский, А.И.Субботин. Дифференциальная игра наведения. Дифференциальные уравнения том УI, № 4, I970.

4.Л.С.Понтрягин. Линейные дифференциальные игры.II. Доклады АН СССР том I74, № 4. I967.

5.Н.Н.Красовский. Игровые задачи о встрече движений. М. I970.

6.Ф.Л.Черноусько. О дифференциальных играх с запаздыванием информации. Доклады АН СССР, том I88, № 4, I969.

7.Бесконечные антогонистические игры /сб.переводов/.Под ред. Н.Н.Воробьева. М.,Физматгиз, I963.

8.Л.А.Люстерник,В.И.Соболев. Элементы функционального анализа, М. I965.