Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 8.
УДК.519.3:62-50.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОИСКА ТОЧКИ ВСТРЕЧИ НЕСКОЛЬКИХ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

Л.И.Плотникова /Одесса/

Пусть в фазовом пространстве E^n имеется m управляемых объектов, движение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^i, u^i), \quad i=1,2,\dots,m, \qquad /1/$$

где $u^i(t)$ - допустимые управления, принадлежащие соответственно областям U^i из E^{r_i}.

Рассматривается несколько вариантов задачи об оптимальном приведении этих объектов из данного начального состояния

$$x^i(0) = c^i, \quad i=1,2,\dots,m, \qquad /2/$$

в некоторую точку множества

$$G = \{x \in E^n : g(x) = 0\}, \qquad /3/$$

где g -заданная функция из C^1.

При этом суммарные затраты по переводу определяются величиной

$$J = \sum_{i=1}^{m} \int_0^{T_i} \varphi^i(x^i, u^i)\, dt,$$

где $u^i(t)$ -используемые управления, $x^i(t)$ -траектории движения объектов, а $T_i \geqslant 0$ таковы, что

$$x^1(T_1) = x^2(T_2) = \dots = x^m(T_m) = x^0,$$

причем соответствующая точка x^0 принадлежит множеству G.

Варианты задачи связаны с различными предположениями относительно величин T_i:

/а/ величины T_1, T_2, ..., T_m заданы;

/б/ эти величины могут принимать произвольные неотрицательные значения;

/в/ указанные величины должны иметь одно и то же значение T.

Предположим, что $x^0 \in G$ -оптимальная точка приведения объектов для одного из приведенных вариантов и T_i / $i = 1,2,\dots,m$ / -соответствующие времена приведения. Тогда оптимальные управления $u^i(t)$, траектории движения $x^i(t)$ и отвечающие им решения $\psi^i(t) = (\psi_1^i(t), \psi_2^i(t), \dots, \psi_n^i(t))$ присоединенных систем могут быть найдены с помощью принципа Понтрягина. При этом рассуждениями, аналогичными приведенным в [1], можно показать, что

$$\sum_{i=1}^{m} \psi_j^i(T_i) = \frac{\partial g(x^0)}{\partial x_j}, \quad j = 1,2,\dots,n.$$

Далее, в случае /б/ имеют место равенства:

$$\sum_{j=1}^{m} \varphi_j^i(T_i) f_j^i(x^i(T_i), u^i(T_i)) - \varphi^i(x^i(T_i), u^i(T_i)) = 0, \; i=1,2,\dots,m, \qquad /4/$$

а в случае /в/ - равенство

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^i(T) f_j^i(x^i(T), u^i(T)) - \varphi^i(x^i(T), u^i(T)) = 0 \qquad /5/$$

Через $F_i(x,T)$ обозначим функцию Беллмана, выражающую затраты при оптимальном переходе i -го объекта из начального состояния C^i в точку X за время T. Тогда функция Беллмана общей задачи имеет вид:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} F_i(x, T_i), \qquad /6/$$

где T_i в случае /а/ совпадают с заданными величинами, в случае /б/ удовлетворяют условию

$$F_i(x, T_i) = \min_{T_i' > 0} F_i(x, T_i'), \; i=1,2,\dots,m,$$

а в случае /в/ имеют одно и то же значение T, причем

$$\sum_{i=1}^{m} F_i(x,T) = \min_{T'>0} \sum_{i=1}^{m} F_i(x,T').$$

Искомая точка X^0, очевидно, доставляет минимум функции Беллмана /6/ на множестве /3/.

Для простоты мы ограничимся в дальнейшем рассмотрением случая, когда это множество совпадает со всем пространством E^n. Тогда точка X^0 доставляет абсолютный минимум функции /6/, и, следовательно, если функции $F_i(x, T_i)$ дифференцируемы в окрестности точки X^0, то в этой точке имеем:

$$\operatorname{grad} F(x^0) = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{grad}_x F_i(x, T_i) = 0.$$

Таким образом, искомая точка X^0 является точкой равновесия системы

$$\dot{x} = -\operatorname{grad} F(x). \qquad /7/$$

Для преобразования этой системы к интересующему нас виду введем операторы Ψ^i, сопоставляющие каждой точке $X \in E^n$ вектор $\varphi^i(T_i)$, где φ^i и T_i отвечают задаче оптимального перевода объектов в точку X. Поскольку в точках дифференцируемости функций $F_i(x,T)$

$$\operatorname{grad}_x F_i(x, T_i) = \varphi^i(T_i), \; i=1,2,\dots,m,$$

система /7/ может быть переписана в виде:

$$\dot{x} = -\sum_{i=1}^{m} \Psi^i(x). \qquad /8/$$

Если эта система асимптотически устойчива, то при любом X^* решение $x(t)$ системы /8/ с начальным условием $x(0)=X^*$ при $t\to\infty$ стремится к искомой точке X^0

Таким образом, интересующая нас задача сводится к решению системы /8/, которое может быть получено на ЭВМ с помощью имеющихся стандартных программ /например, методом Рунге-Кутта/. При этом в случае /а/ для вычисления значений $\Psi^i(x)$ в каждой точке X необходимо решать задачи оптимального перехода объектов из начального положения /2/ в точку X за заданное время T_i. В случае /б/ решаются аналогичные задачи, в которых, однако, величины T_i уже не заданы, а определяются условием /4/. В случае /в/ время перехода определяется из условия /5/.

Пример. Рассмотрим решение задачи об оптимальной встрече трех судов, движущихся в условиях волнения.

Уравнения движения имеют вид [2] :

$$\dot{x}^i = V_0^i \cos\alpha^i, \qquad /9/$$
$$\dot{y}^i = V_0^i \sin\alpha^i, \quad i=1,2,3,$$

где

$$V_0^i = V_T^i - (a^i h + b^i h^2) + k^i h q^i,$$

V_T^i - скорость i -го судна при отсутствии ветра и волнения /техническая скорость в узлах/;

h - высота волн /в метрах/, которая зависит от фазовых координат;

q^i - курсовой угол фронта волны /в радианах/;

a^i, b^i, k^i -коэффициенты, различные для различных типов судов.

При решении задачи предполагалось, что на рассматриваемом участке движения судов фронт волн параллелен оси Ox и высота волн линейно зависит от координаты y, т.е.

$$q^i = \alpha^i$$
$$h = h_0 + h_1 y^i, \quad i=1,2,3.$$

Требуется найти точку $X^0 \in E^2$, величину T и управления $\alpha^1(t)$, $\alpha^2(t)$, $\alpha^3(T)$ в интервале $[0,T]$, переводящие объекты из начального положения $C^1=(2,90;-6,14)$, $C^2=(-11,94;2,60)$, $C^3=(15,13;32.19)$ в точку X^0 и минимизирующие суммарный расход топлива

$$J = \int_0^T \sum_{i=1}^3 \left[(V_0^i)^3 + 2\right] dt.$$

Вектор-функции $\varphi^i(t)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{d\varphi_1^i}{dt} = 0, \qquad /10/$$
$$\frac{d\varphi_2^i}{dt} = -\left[\varphi_1^i \cos\alpha^i + \varphi_2^i \sin\alpha^i - 3(V_0^i)^2\right]\cdot\left[k^i\alpha^i - a^i - 2b^i h\right]h_1,$$
$$i=1,2,3.$$

Для решения задачи воспользуемся уравнением /8/, причем для вычисления значений $\psi^i(x,y)$ нужно решать в каждой точке (x,y) краевые задачи /9/, /10/ с граничными условиями:

$$x^i(0)=c_1^i,$$
$$y^i(0)=c_2^i,$$
$$x^i(T)=x,$$
$$y^i(T)=y,\quad i=1,2,3$$

Величина T определяется в каждой точке (x,y) из условия

$$\sum_{i=1}^{3} V_0^i(\varphi_1^i\cos\alpha^i+\varphi_2^i\sin\alpha^i)-(V_0^i)^3-2=0$$

При $V_T^1=12{,}5$, $V_T^2=15{,}5$, $V_T^3=17$, $a^1=0{,}49$, $a^2=0{,}61$, $a^3=0{,}56$, $b^1=0{,}06$, $b^2=0{,}05$, $b^3=0{,}02$, $k^1=0{,}23$, $k^2=0{,}26$, $k^3=0{,}18$, $h_0=2$ и $h_1=0{,}02$ решение задачи имеет следующий вид:

$$T=1{,}51,\quad x^0=(7{,}57;\,11{,}03),\quad \varphi^1(T)=(0{,}27;\,1{,}13),$$

$$\varphi^2(T)=(0{,}26;\,0{,}20),\quad \varphi^3(T)=(-0{,}53;\,-1{,}33),\quad J=59{,}20.$$

Л и т е р а т у р а

1. Л.И.Плотникова. Об одной задаче оптимального управления.-Управляемые системы, Новосибирск, 1970, вып. 6.

2. Ю.П.Петров. Методы оптимизации и их применение в судостроении.-Судостроение, Л., 1968.