Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 8.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОТЫСКАНИЯ ГЛОБАЛЬНОГО МАКСИМУМА ФУНКЦИЙ ОТ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В.В.Леонов

1°. Постановка задачи. Основные обозначения и определения. Вспомогательные утверждения.

Как известно, существует большое число работ, посвященных методам нахождения хотя бы одного локального экстремума. В то же время поиску глобального оптимума уделяется недостаточно внимания, и число публикаций по этому вопросу крайне незначительно /см.,например, [1 - 4]/.

В 1964 г. автором [5] в докладе на Втором Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике был предложен метод, названный в дальнейшем методом покрытий, который принципиально позволял находить глобальный максимум с любой наперед заданной точностью. При этом предполагалось, что оптимизируемая функция в области задания удовлетворяет условию Липшица и сама константа Липшица известна. В дальнейшем эта схема автором [6] была усовершенствована. В данной статье излагается общая схема метода покрытий и устанавливаются условия конечности числа итерационных шагов*/.

Решается следующая задача. Пусть на некотором ограниченном замкнутом выпуклом множестве $\widetilde{X}$ из евклидова пространства E_n задана непрерывная функция $f(\bar{x})$, удовлетворяющая в $\widetilde{X}$ условию:

$$f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_2) \leq L \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| \qquad \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \widetilde{X}, \qquad /1/$$

где

$$L = const < +\infty . \qquad /2/$$

Рассмотрим следующую задачу A_{ε_0} : по заданному $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ требуется найти такую точку $\bar{x} = \bar{x}(\varepsilon_0) \in X_0 \subseteq \widetilde{X}$, которая удовлетворяла бы неравенству

$$f(\bar{x}(\varepsilon_0)) \geq \hat{f}(X_0) - \varepsilon_0 , \qquad /3/$$

где

$$\hat{f}(X) = \sup_{\bar{x} \in X} f(\bar{x}) , \qquad /4/$$

причем

$$\hat{f}(\emptyset) = -\infty . \qquad /4'/$$

Очевидно, что при сделанных нами предположениях решение задачи A_{ε_0} всегда существует, хотя в общем случае глобального максимума функции $f(\bar{x})$ на множестве X_0 может и не быть.

*/ В работе [6] содержится ряд неточностей и опечаток. При написании этой статьи автор учел недостатки работы [6].

Пусть теперь нами найдены такие две достаточно простые функции $F_1(\bar{x},t,\bar{e})$ и $F_2(\bar{x},t,\bar{e})$, заданные при $\bar{x},t,\bar{e}$ из множества D, определяемого условиями:

$$\bar{x}\in\tilde{X},\ t\geqslant 0,\ \|\bar{e}\|=1,\ (\bar{x}+t\bar{e})\in\tilde{X}, \tag{5}$$

и удовлетворяющие в D неравенствам:

$$F_1(\bar{x},t,\bar{e})\leqslant f(\bar{x}+t\bar{e})-f(\bar{x})\leqslant F_2(\bar{x},t,\bar{e}), \tag{6}$$

$$F_2(\bar{x},t,\bar{e})\leqslant L\bar{t}. \tag{7}$$

В частности, если $f(\bar{x})$ непрерывно дифференцируема в $\tilde{X}$, то можно положить

$$F_i(\bar{x},t,\bar{e})=L_i(\bar{x},\bar{e})t, \tag{8}$$

где

$$L_1(\bar{x},\bar{e})\leqslant\min_{\substack{t\geqslant 0\\ \bar{x}+t\bar{e}\in\tilde{X}}}\frac{\partial f(\bar{x}+t\bar{e})}{\partial t}, \tag{9}$$

$$L_2(\bar{x},\bar{e})\geqslant\max_{\substack{t\geqslant 0\\ \bar{x}+t\bar{e}\in\tilde{X}}}\frac{\partial f(\bar{x}+t\bar{e})}{\partial t}. \tag{10}$$

Аналогично, в случае, когда $f(\bar{x})$ дважды непрерывно дифференцируема в $\tilde{X}$, в качестве F_i можно взять функции

$$F_i(\bar{x},t,\bar{e})=[\bar{e}\cdot\operatorname{grad}f(\bar{x})]t+\frac{g_i(\bar{x},\bar{e})}{2}t^2, \tag{8'}$$

где

$$g_1(\bar{x},\bar{e})\leqslant\min_{\substack{t\geqslant 0\\ \bar{x}+t\bar{e}\in\tilde{X}}}\frac{\partial}{\partial t}[\bar{e}\cdot\operatorname{grad}f(\bar{x}+t\bar{e})], \tag{9'}$$

$$g_2(\bar{x},\bar{e})\geqslant\max_{\substack{t\geqslant 0\\ \bar{x}+t\bar{e}\in\tilde{X}}}\frac{\partial}{\partial t}[\bar{e}\cdot\operatorname{grad}f(\bar{x}+t\bar{e})]. \tag{10'}$$

Обозначим:

$$S_X^{F_2}(\bar{x}^\circ,\rho)=X\cap\{(\bar{x}^\circ+t\bar{e}):F_2(\bar{x}^\circ,t,\bar{e})\leqslant\rho;\ (\bar{x}^\circ,t,\bar{e})\in D\};$$

$$r(\bar{x}^\circ,\bar{e}^\circ,X)=\begin{cases}-\infty, & \text{если } \{(\bar{x}^\circ+t\bar{e}^\circ):(\bar{x}^\circ,t,\bar{e}^\circ)\in D\}\cap X=\phi,\\ \sup\limits_{\substack{t\geqslant 0\\ \bar{x}^\circ+t\bar{e}^\circ\in X}}F_1(\bar{x}^\circ+t\bar{e}^\circ), & \text{если } \{(\bar{x}^\circ+t\bar{e}^\circ):(\bar{x}^\circ,t,\bar{e}^\circ)\in D\}\cap X\neq\phi;\end{cases}$$

$$S_X^{F_1,F_2}(\bar{x}^\circ,\rho,\varepsilon)=\{(\bar{x}^\circ+t\bar{e}):F_2(\bar{x}^\circ,t,\bar{e})\leqslant\max[\rho,r(\bar{x}^\circ,\rho,\bar{e},X)-2\varepsilon];$$

$$(\bar{x}^\circ+t\bar{e})\in D\}\cap X,$$

$$Q_X^{F_2}(a,V,\varepsilon)=\bigcup_{\bar{x}\in V}S_X^{F_2}(\bar{x},a+\varepsilon-f(\bar{x})),$$

$$Q_X^{F_1,F_2}(a,V,\varepsilon)=\bigcup_{\bar{x}\in V}S_X^{F_1,F_2}(\bar{x},a+\varepsilon-f(\bar{x}),\varepsilon),$$

$$G_X^{F_2}(a,V,\varepsilon)=X\setminus Q_X^{F_2}(a,V,\varepsilon),$$

$$G_X^{F_1,F_2}(a,V,\varepsilon)=X\setminus Q_X^{F_1,F_2}(a,V,\varepsilon),$$

где $\bar{x}^0\in\tilde{X}$, V - конечное множество, $V\subset X$, X - произвольное подмножество множества $\tilde{X}$.

Очевидно, что

$$S_X^{F_2}(\bar{x}^0,\rho)\subseteq S_X^{F_1,F_2}(\bar{x}^0,\rho,\varepsilon), \qquad /11/$$

$$Q_X^{F_2}(a,V,\varepsilon)\subseteq Q_X^{F_1,F_2}(a,V,\varepsilon), \qquad /12/$$

$$G_X^{F_1,F_2}(a,V,\varepsilon)\subseteq G_X^{F_2}(a,V,\varepsilon). \qquad /13/$$

Кроме того,

$$S_X^{\bar{F}_2}(\bar{x}^0,\rho)\subseteq S_X^{\bar{\bar{F}}_2}(\bar{x}^0,\rho), \qquad /14/$$

$$S_X^{F_1,\bar{F}_2}(\bar{x}^0,\rho,\varepsilon)\subseteq S_X^{F_1,\bar{\bar{F}}_2}(\bar{x}^0,\rho,\varepsilon), \qquad /15/$$

если

$$\bar{\bar{F}}_2(\bar{x}^0,t,\bar{e})\leq F_2(\bar{x}^0,t,\bar{e}) \text{ для } (\bar{x}^0,t,\bar{e})\in D, \qquad /16/$$

причем

$$S_X^{F_2}(\bar{x}^0,\rho)=X\cap S_{\tilde{X}}^{F_2}(\bar{x}^0,\rho), \qquad /17/$$

$$S_X^{F_1,F_2}(\bar{x}^0,\rho,\varepsilon)=X\cap S_{\tilde{X}}^{F_1,F_2}(\bar{x}^0,\rho,\varepsilon), \qquad /18/$$

$$S_{\tilde{X}}^{F_2\equiv Lt}(\bar{x}^0,\rho)=\begin{cases}\bar{x}^0, & \text{если } \frac{\rho}{L}>0,\\ R(\bar{x}^0,\frac{\rho}{L}), & \text{если } \frac{\rho}{L}>0,\end{cases} \qquad /19/$$

где $R(\bar{x}^0,\rho)=\{\bar{x}:\|\bar{x}-\bar{x}^0\|\leq\rho\}$.

Помимо этого, в дальнейшем при анализе сходимости итерационного процесса, основанного на излагаемом ниже методе покрытий, нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

В связи с этим докажем следующие леммы.

Л е м м а I. В случае $X\subseteq\tilde{X}$ имеет место неравенство:

$$\hat{f}(S_X^{F_1,F_2}(\bar{x}^0,\rho,\varepsilon))\leq max\left[f(\bar{x}^0)+\rho,\hat{f}(X)-2\varepsilon\right], \qquad /20/$$

причем если

$$\tilde{S}_X^{F_1,F_2}(\bar{x}^0,\rho,\varepsilon)=S_X^{F_1,F_2}(\bar{x}^0,\rho,\varepsilon)\setminus S_X^{F_2}(\bar{x}^0,\rho)=\Phi, \qquad /21/$$

то

$$\hat{f}(S_X^{F_1,F_2}(\bar{x}^0,\rho,\varepsilon))=\hat{f}(S_X^{F_2}(\bar{x}^0,\rho))\leq f(\bar{x}^0)+\rho. \qquad /22/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$S_X^{F_1,F_2}(\bar{x}^0,\rho,\varepsilon)=S_X^{F_2}(\bar{x}^0,\rho)\cup\tilde{S}_X^{F_1,F_2}(\bar{x}^0,\rho,\varepsilon), \qquad /23/$$

причем

$$\hat{f}(X_1 \cup X_2) = \max[\hat{f}(X_1), \hat{f}(X_2)], \qquad /24/$$
$$\hat{f}(\phi) = -\infty,$$

то достаточно показать, что

$$\hat{f}(S_X^{F_2}(\bar{x}^\circ, \rho)) \leq f(\bar{x}^\circ) + \rho, \qquad /25/$$

$$\hat{f}(\tilde{S}_X^{F_1,F_2}(\bar{x}^\circ, \rho, \varepsilon)) \leq \hat{f}(X) - 2\varepsilon. \qquad /26/$$

Действительно,

$$\hat{f}(S_X^{F_2}(\bar{x}^\circ, \rho)) \leq f(\bar{x}^\circ) + \sup_{(\bar{x}^\circ + t\bar{e}) \in S_X^{F_2}(\bar{x}^\circ, \rho)} F_2(\bar{x}^\circ, t, \bar{e}) \leq f(\bar{x}^\circ) + \rho.$$

$$\hat{f}(\tilde{S}_X^{F_1,F_2}(\bar{x}^\circ, \rho, \varepsilon)) \leq f(\bar{x}^\circ) + \sup_{(\bar{x}^\circ + t\bar{e}) \in S_X^{F_1,F_2}(\bar{x}^\circ, \rho, \varepsilon)} F_2(\bar{x}^\circ, t, \bar{e}) \leq$$

$$\leq f(\bar{x}^\circ) + \sup_{(\bar{x}^\circ + t\bar{e}) \in X} F_1(\bar{x}^\circ, t, \bar{e}) - 2\varepsilon \leq \hat{f}(X) - 2\varepsilon,$$

причем если $S_X^{F_2}(\bar{x}^\circ, \rho) = \phi$, то

$$\hat{f}(S_X^{F_2}(\bar{x}^\circ, \rho)) = -\infty < f(\bar{x}^\circ) + \rho.$$

Аналогично, в случае $\tilde{S}_X^{F_1,F_2}(\bar{x}^\circ, \rho, \varepsilon) = \phi$ также справедливо неравенство

$$\hat{f}(\hat{S}_X^{F_1,F_2}(\bar{x}^\circ, \rho, \varepsilon)) = -\infty \leq \hat{f}(X) - 2\varepsilon.$$

откуда уже непосредственно следует утверждение леммы.

Л е м м а 2. Если $X \subseteq \tilde{X}$, $V = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_M\} \subseteq X$, то

$$\hat{f}(Q_X^{F_1,F_2}(a, V, \varepsilon)) \leq \max[a + \varepsilon, \hat{f}(X) - 2\varepsilon].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$Q_X^{F_1,F_2}(a, V, \varepsilon) = \bigcup_{k=1}^{M} S_X^{F_1,F_2}(\bar{x}_k, u_k, \varepsilon),$$

где

$$u_k = a + \varepsilon - f(\bar{x}_k),$$

причем, согласно лемме I,

$$f^k = \hat{f}(S_X^{F_1,F_2}(\bar{x}_k, u_k, \varepsilon)) \leq \max[f(\bar{x}_k) + u_k, \hat{f}(X) - 2\varepsilon] = \max[a + \varepsilon, \hat{f}(X) - 2\varepsilon],$$

то

$$\hat{f}(Q_X^{F_1,F_2}(a, V, \varepsilon)) = \max_{1 \leq k \leq M} f^k \leq \max[a + \varepsilon, \hat{f}(X) - 2\varepsilon],$$

что и требовалось доказать.

Л е м м а 3. Если множество

$$X^* = \bigcup_{k=1}^{N} X_k \subseteq \widetilde{X},$$

каждому X_k поставлено в соответствие конечное множество $V_k = \{\bar{x}_1^k, \ldots, \bar{x}_{m_k}^k\} \subseteq X_k$ такое, что $\hat{f}(X_k) \leq \hat{f}(V_k) + \varepsilon$, причем найдены точки $\bar{w}_k \in V_k$ $(k = 1, \ldots, N)$, удовлетворяющие условиям

$$f(\bar{w}_k) = \hat{f}(V_k) \quad (k = 1, \ldots, N),$$

то любая точка $\bar{w}^* \in \{\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_N\}$, доставляющая максимум

$$\max_{1 \leq k \leq N} f(\bar{w}_k) = \max_{1 \leq k \leq N} \hat{f}(V_k) = f(\bar{w}^*),$$

удовлетворяет неравенству

$$f(\bar{w}^*) \geq \hat{f}(X^*) - 2\varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$q_k = \hat{f}(V_k), \quad r_k = \hat{f}(X_k), \quad q = \max_{1 \leq k \leq N} q_k.$$

Так как справедливы неравенства $r_k \leq q_k + \varepsilon$,

то, следовательно, $$r_k \leq \max_{1 \leq k \leq N} q_k + \varepsilon = q + \varepsilon,$$

$$\hat{f}(X^*) = \max_{1 \leq k \leq N} r_k \leq q + \varepsilon,$$

из чего уже непосредственно вытекает справедливость леммы.

Л е м м а 4. Если $X \subseteq \hat{X}$, для $f(\bar{x})$ выполняются условия /1/-/2/, задано конечное множество $V \subseteq X$ такое, что величина

$$d(X, V) = \sup_{\bar{x} \in X} \min_{\bar{y} \in V} \|\bar{x} - \bar{y}\| \tag{27}$$

удовлетворяет неравенству

$$d(X, Y) \leq \frac{\varepsilon}{L}, \tag{28}$$

то

$$Q_X^{F_1, F_2}(\hat{f}(V), V, \varepsilon) = X, \tag{29}$$

$$\hat{f}(X) \leq \hat{f}(V) + \varepsilon. \tag{30}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала /29/. Легко заметить, что из /11/, /14/, /7/, /19/ следует

$$Q_X^{F_1, F_2}(\hat{f}(V), V, \varepsilon) \supseteq Q_X^{F_2 \equiv Lt}(\hat{f}(V), V, \varepsilon) = X \cap \left\{ \bigcup_{\bar{x} \in V} S_{\bar{x}}^{F_2 \equiv Lt}(x, \hat{f}(V) + \varepsilon - f(x)) \right\} = X \cap \left[\bigcup_{\bar{x} \in V} R\left(\bar{x}, \frac{\hat{f}(V) + \varepsilon - f(\bar{x})}{L}\right) \right]. \tag{31}$$

Так как справедливо неравенство /28/, причем $\hat{f}(V) \geq f(\bar{x})$ для $\bar{x} \in V$, то

$$X \subseteq \bigcup_{\bar{x} \in V} R\left(\bar{x}, \frac{\varepsilon}{L}\right) \subseteq \bigcup_{\bar{x} \in V} R\left(\bar{x}, \frac{\hat{f}(V) + \varepsilon - f(\bar{x})}{L}\right). \tag{32}$$

Если учесть, что для $X \subseteq \tilde{X}, d(X,V) \leq \frac{\varepsilon}{L}$

$$X \subseteq \bigcup_{\bar{x} \in V} S_{\bar{x}}^{F_2 \equiv Lt}(\bar{x}, \varepsilon), \qquad /33/$$

то с помощью неравенства /25/ можно доказать, что

$$\hat{f}(X) \leq \sup_{\bar{x} \in V} \hat{f}(S_{\bar{x}}^{F_2 \equiv Lt}(\bar{x}, \varepsilon)) \leq \max_{\bar{x} \in V} f(\bar{x}) + \varepsilon = \hat{f}(V) + \varepsilon.$$

Тем самым лемма доказана полностью.

2°. Схема метода покрытий. Доказательство сходимости

Пусть выполнены все условия предыдущего параграфа. Задается некоторое семейство K подмножеств X множества $\tilde{X}$, такое что каждому $X \in K$ ставится в однозначное соответствие конечное множество $V = V(X) \subset X$, которое будем называть базисным множеством для X. Кроме того, задается такая процедура, которая для любого a и любого $\varepsilon > 0$ каждому $X \in K$ задает однозначным образом множество

$$X' = \Phi(X, a, \varepsilon) \in K, \qquad /34/$$

удовлетворяющее условиям:

$$\Phi(X, a, \varepsilon) \subset X, \qquad /35/$$

$$\phi \neq X \setminus \Phi(X, a, \varepsilon) \subseteq Q_X^{F_1, F_2}(a, V(X), \varepsilon). \qquad /36/$$

Пусть $X_0 \in K$. Будем для данного X_0 решать задачу A_{ε_0} с помощью следующей итерационной схемы. На первом шаге находятся последовательно $V(X_0)$, величина $g_1 = \hat{f}(V(X_0))$, множества $Q_{X_0}^{F_1, F_2}(g_1, V(X_0), \varepsilon_0)$, $X_1 = \Phi(X_0, g_1, \varepsilon_0)$ и точка $\bar{w}^1 \in V(X_0)$, удовлетворяющая условию: $f(\bar{w}^1) = g_1$. При этом если $X_1 = \phi$, то процесс прекращается; но если $X_1 \neq \phi$, то переходим ко второму шагу.

Предположим теперь, что уже проделано k шагов, в результате чего были определены точка $\bar{w}^k \in X_0$, множество $X_k \in K$, величина g_k, причем нам известно, что $Q_{X_k}^{F_1, F_2}(g_k, V(X_k), \varepsilon_0)$ является собственным подмножеством X_k.

Тогда переходим к $(k+1)$ - му шагу схемы, на котором последовательно находятся множество $V(X_k)$, величина $\hat{f}(V(X_k))$, точка $\bar{w}_{k+1}^* \in V(X_k)$, удовлетворяющая условию:

$$f(\bar{w}_{k+1}^*) = \hat{f}(V(X_k)), \qquad /37/$$

величина

$$g_{k+1} = \max[g_k, \hat{f}(V(X_k))], \qquad /38/$$

точка

$$\bar{w}^{k+1} = \begin{cases} \bar{w}^k, & \text{если } g_{k+1} = g_k, \\ \bar{w}_{k+1}^*, & \text{если } g_{k+1} > g_k, \end{cases} \qquad /39/$$

и, наконец, множество

$$X_{k+1} = \Phi(X_k,\ g_{k+1},\ \varepsilon_0). \qquad /40/$$

Итерационный процесс прекращается после k_0 -го шага, для которого имеет место равенство

$$X_{k_0} = Q^{F_1,F_2}_{X_{k_0}}(g_{k_0}, V(X_{k_0}), \varepsilon_0). \qquad /41/$$

Справедливы следующие теоремы, связанные с оценками точности решения.

Т е о р е м а 1. Для любого k -го шага итераций метода покрытий справедлива оценка

$$\hat{f}(X_0) - f(\bar{w}^k) \le max[\varepsilon_0, \hat{f}(X_k) - g_k]. \qquad /42/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$X_j = \Phi(X_{j-1}, g_j, \varepsilon_0) \subset X_{j-1} \quad (j = 1,\dots,k), \qquad /43/$$

$$X_0 = X_k \cup Z_k, \qquad /44/$$

где

$$Z_k = \bigcup_{j=1}^{k} Y_j, \qquad /45/$$

$$Y_j = X_{j-1} \setminus X_j = X_{j-1} \setminus \Phi(X_{j-1}, g_j, \varepsilon_0) \subseteq Q^{F_1,F_2}_{X_{j-1}}(g_j, V(X_{j-1}), \varepsilon_0) \qquad /46/$$

$$(j = 1,\dots,k),$$

то на основании лемм 2 и 3 и /46/ можно заключить, что

$$\hat{f}(X_0) \le max[\hat{f}(X_k), \hat{f}(Z_k)] \le max[\hat{f}(X_k), \hat{f}(Y_1),\dots,\hat{f}(Y_k)] \le$$

$$\le max\{\hat{f}(X_k), \max_{1\le j\le k} \hat{f}(Q^{F_1,F_2}_{X_{j-1}}(g_j, V(X_{j-1}), \varepsilon_0))\} \le$$

$$\le max\{\hat{f}(X_k), \max_{1\le j\le k}[g_j + \varepsilon_0], \max_{1\le j\le k}[\hat{f}(X_{j-1}) - 2\varepsilon_0]\}.$$

Но так как $g_j \ge g_{j-1}$ $(j = 2,\dots,k)$, $X_j \subset X_{j-1}$ $(j=1,\dots,k)$, то

$$\hat{f}(X_0) \le max\{\hat{f}(X_k), (g_k + \varepsilon_0), \hat{f}(X_0) - 2\varepsilon_0\} = max[\hat{f}(X_k), g_k + \varepsilon_0],$$

откуда уже непосредственно следует /42/.

Т е о р е м а 2. Если на k_0 -ом шаге выполняется условие /41/, то тогда $\bar{X}(\varepsilon_0) = \bar{w}^{k_0} \in X_0$ доставляет решение задачи A_{ε_0} и имеет место неравенство

$$g_{k_0} = f(\bar{w}^{k_0}) \ge \hat{f}(X_0) - \varepsilon_0. \qquad /42'/$$

Справедливость теоремы следует из неравенства

$$\hat{f}(X_{k_0}) = \hat{f}(Q^{F_1,F_2}_{X_{k_0}}(g_{k_0}, V(X_{k_0}), \varepsilon_0)) \le max(g_{k_0} + \varepsilon_0, \hat{f}(X_{k_0}) - 2\varepsilon_0) = g_{k_0} + \varepsilon_0$$

и оценки /42/.

С л е д с т в и е. Условия теоремы 2 выполняются, если

$$d(X_{k_0}, V(X_{k_0})) \le \frac{\varepsilon_0}{L}. \qquad /43/$$

Для доказательства следствия достаточно воспользоваться леммой 4.

Поступила в редакцию 22.2.1971г.

Литература

1. И.М.Гельфанд, М.Л.Цетлин. Принцип нелокального поиска в системах автоматической оптимизации.-ДАН, 1961, т.137, № 2.

2. В.В.Немыцкий. Об одном методе разыскания всех решений нелинейных операторных уравнений.-ДАН, 1960, т. 131, № 4.

3. В.Н.Пшеничный, Д.И.Марченко. Об одном подходе к нахождению глобального минимума.- Труды семинара "Теория оптимальных решений", 1967, вып. 2, Киев.

4. Ю.М.Данилин, С.А.Пиявский. Об одном алгоритме отыскания абсолютного минимума.-Труды семинара "Теория оптимальных решений", 1967, вып. 2, Киев.

5. В.В.Леонов. О вычислительных методах построения оптимальных процессов.-"Второй Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике /аннотации докладов/", М.,"Наука", 1964.

6. В.В.Леонов. Метод покрытий для отыскания глобального максимума функций от многих переменных.-Сб. "Исследования по кибернетике", Изд. "Советское радио", 1970.