Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 8.
УДК.51:330.115.

О ДИНАМИКЕ РАЗВИТИЯ ОДНОРОДНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Н.И.Глебов, В.Т.Дементьев, А.Н.Сычев

§ 1. Стационарная задача

Многие из создаваемых технических систем являются однородными, т.е. они состоят из подобных элементов /или компонентов/, имеющих одинаковое функциональное назначение. Примерами однородных технических систем могут служить: система грузовых автомобилей различной грузоподъемности, система электрогенераторов различной мощности, система контейнеров различной емкости, система станков, различающихся длиной обрабатываемой детали и т.д.

При проектировании однородных технических систем, возникают следующие основные вопросы: каковы оптимальные значения характеристик комплексов, каково оптимальное число типов комплексов и каковы их области применений? Выяснению этих вопросов посвящены работы [1] - [6] в случае, когда изделия характеризуются одним параметром и исходные данные не зависят от времени /стационарная задача/. При этом рассматривается следующая основная задача: найти минимум суммарных затрат на разработку, производство и эксплуатацию системы при условии выполнения ею заданного объема работ.

Математическая постановка этой задачи в общем случае формулируется следующим образом: найти минимум по X_k, $\mathcal{G}_k$ и N величины

$$S=\sum_{k=1}^{N}\left\{c(X_k)\left(\int_{\mathcal{G}_k} p(x,X_k)\varphi(x)dx\right)^{\alpha}+\right.$$

$$\left.+a(X_k)\int_{\mathcal{G}_k} p(x,X_k)\varphi(x)dx+c^{0}(X_k)\right\} \qquad /1.1/$$

при условии $\bigcup_{k=1}^{N}\mathcal{G}_k=\mathcal{G}$, $\mathcal{G}_i\cap\mathcal{G}_j=\phi \ (i\neq j)$. /1.2/

Здесь $X=(X^{(1)},X^{(2)},\dots,X^{(n)})$ - вектор возможных значений параметров комплексов, входящих в систему;

$X_k=(X_k^{(1)},X_k^{(2)},\dots,X_k^{(n)})$ - вектор значений параметров комплексов k -го типа;

$\mathcal{G}$ - область изменения параметров X ;

$\mathcal{G}_k$ - область применения комплексов k -го типа;

$c(X)$ - функция, характеризующая стоимость комплекса в зависимости от значений параметров X $(c'_{X^{(i)}}(X) > 0)$;

$\varphi(x)$ – функция, характеризующая потребность в комплексах с параметрами $x\ (\varphi(x)\geqslant 0)$;

$p(x, x_k)$ – число комплексов с параметрами x_k , способных заменить один комплекс с параметрами $x\ (p(x_k, x_k)=1)$;

$a(x)$ – стоимость эксплуатации комплекса с параметрами $x\ (a'_k(x)\geqslant 0)$;

$c^0(x)$ – затраты на разработку и пуск в производство комплексов с параметрами $x\ (c^0(x)\geqslant 0)$;

α – коэффициент, характеризующий зависимость стоимости производства от объема партии $(0<\alpha\leqslant 1)$.

Помимо указанных условий /I.2/, в зависимости от специфики системы могут быть добавлены и другие, обусловленные характером применения комплексов.

Таким образом, мы имеем задачу нелинейного программирования, которая в некоторых случаях /см. [I] – [6] / может быть решена методом динамического программирования. Однако решение данной задачи не дает ответа на ряд весьма важных вопросов, касающихся динамики производства комплексов и плана замены старой системы новой. Иными словами, возникает необходимость в рассмотрении моделей, описывающих развитие той или иной системы во времени, и в разработке методов, позволяющих отыскивать оптимальные пути их развития.

§ 2. Постановка динамической задачи

Будем рассматривать систему, в которой каждый из комплексов характеризуется одним основным параметром $x\in\Omega=[0,X]$. Предположим также, что $p(x, x_k)\equiv 1$ и, следовательно, $\Omega_k=(x_{k-1}, x_k]$. Вводя соответствующие зависимости исходных данных от времени t , сформулируем следующую задачу:

Найти минимум по t_i, $x_{k,i}$, N_i, M, $n_{k,i}(\tau)$ и $\beta_{k,i}$ величины

$$S(0,T)=\sum_{i=1}^{M}\left\{\sum_{k=1}^{N_i}\left[c(x_{k,i},t_{i-1})\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} n_{k,i}(\tau)d\tau\right)^{\alpha}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+a(x_{k,i},t_{i-1})\int_{t_{i-1}}^{t_i} n_{k,i}(\tau)d\tau+c^0(x_{k,i},t_{i-1},\beta_{k,i})\right]\right\} \qquad /2.1/$$

при условиях

$$0=x_{0,i}\leqslant x_{1,i}\leqslant x_{2,i}\leqslant\ldots\leqslant x_{N_i}=X, \qquad /2.2/$$

$$0=t_0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\ldots t_M=T, \qquad /2.3/$$

$$n_{k,i}(\tau)\geqslant 0 \text{ при } \tau\in(t_{i-1},t_i],\ n_{k,i}(\tau)=0 \text{ при } \tau\notin(t_{i-1},t_i], \qquad /2.4/$$

$$\int_{t-\theta}^{t} n_{k,i}(\tau)d\tau \geqslant q(t_{i-1},t)\cdot\int_{x_{k-1,i}}^{x_{k,i}} \tilde{\varphi}_i(x,t)dx,\ t_{i-1}<t\leqslant t_i, \qquad /2.5/$$

где

$$\tilde{\varphi}_i(x,t)=\tilde{\varphi}_{i-1}(x,t)\left(1\dot{-}\frac{\int_{t-\theta}^{t} n_{k,i-1}(\tau)d\tau}{q(t_{i-2},t)\int_{x_{k-1,i-1}}^{x_{k,i-1}}\tilde{\varphi}_{i-1}(x,t)dx}\right) \text{ при } x\in(x_{k-1,i-1},x_{k,i-1}] \text{ и } t_i<t, \qquad /2.6/$$

$$\tilde{\varphi}_1(x,t)=\varphi(x,t).$$

Здесь t_i - момент прекращения производства старых комплексов и начало производства новых;

$x_{k,i}$ - значение характеристики x комплексов k -го типа,производимых в интервале времени $(t_{i-1},t_i]$;

N_i - число типов комплексов, производимых в i -й период $(t_{i-1},t_i]$;

M - число моментов пересмотра системы;

$n_{k,i}(\tau)$ - число комплексов k -го типа, произведенных в момент τ ;

$\beta_{k,i}=\max\limits_{\tau} n_{k,i}(\tau)$ - максимальная производительность /или производственная мощность/, необходимая для производства комплексов k-го типа в i -й период;

$\varphi(x,t)$ - функция, характеризующая потребность в комплексах с характеристикой x в момент времени t ;

$q(t_i,t)$ - функция, характеризующая эффективность комплексов "образца t_i -го года" в зависимости от момента их применения;

$c(x,t_i)$ - стоимость производства комплекса с характеристикой x "образца t_i -го года";

$a(x,t_i)$ - затраты на эксплуатацию комплекса с характеристикой x "образца t_i -го года" /затраты определяются для всего времени "жизни" комплекса θ /;

$c^0(x,t_i,\beta)$ - затраты на разработку и пуск в производство комплексов с характеристикой x "образца t_i -го года" при максимальной производительности β ;

$[0,T]$ - рассматриваемый плановый период.

Знак $\dot{-}$ означает вычитание до нуля, т.е.

$$1\dot{-}u=\begin{cases}1-u, & \text{если } 1-u\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } u\geqslant 1.\end{cases}$$

В рассматриваемой модели предполагается, что в момент времени $t_{i-1}\ (i=1,\dots,M)$ прекращается производство комплексов старого образца и начинается производство комплексов, разработка которых закончена к моменту t_{i-1} . При этом старые комплексы продолжают эксплуатироваться до их полного "отмирания", которое может длиться до момента $t_{i-1}+\theta$. Поэтому на интервале времени $(t_{i-1}, t_{i-1}+\theta]$ могут одновременно применяться как новые, так и старые комплексы.

В переходный период $(t_{i-1}, t_{i-1}+\theta]$ часть потребности в комплексах покрывается за счет еще имеющихся в наличии старых комплексов. Такое представление об этапе технического переоснащения представляется целесообразным, потому что процесс перехода от старых образцов к новым не может быть осуществлен мгновенно, так как производственные мощности, как правило, ограничены.

Функция $\tilde{\varphi}_i(x,t)$ характеризует ту часть потребности в комплексах с характеристикой x в момент $t > t_{i-1}$, которая остается неудовлетворенной в результате использования имеющихся комплексов старых образцов, т.е. образцов t_{i-2} -го и более ранних годов. При этом предполагается, что старые комплексы используются равномерно каждый на своем интервале применения.

Условие /2.5/ означает, что число комплексов k -го типа, имеющихся в наличии в момент t , должно быть не меньше потребного. Эта потребность определяется правой частью неравенства.

Относительно последнего этапа $(t_{M-1}, T]$ предполагается, что эксплуатационные затраты, производимые на интервале $(T, T+\theta]$, также входят в суммарные затраты /2.1/. Для первого же этапа считается, что функция $\varphi(x,t)$ задана с учетом предшествующей системы, затраты на которую отнесены к предыдущему плановому периоду.

Перейдем теперь к рассмотрению весьма важного частного случая системы, состоящей из одного типа комплексов.

§ 3. Динамика производства комплексов одного типа

При решении динамической задачи большое значение приобретает рассмотрение частного случая: производство и замена комплексов одного типа. Это объясняется тем, что алгоритм, разработанный для этого случая, входит в качестве одного из основных "блоков" в алгоритм решения общей задачи. Кроме того, задача о производстве и замене однотипных комплексов представляет и самостоятельный интерес.

Здесь мы рассмотрим задачу об оптимальном плане производства одного типа комплексов без ограничения на производственные мощности в непрерывном варианте, а затем - производство и замену однотипных комплексов как при наличии ограничений на производственные мощности, так и без них - в дискретном варианте.

I. Н е п р е р ы в н ы й   в а р и а н т. Пусть задана неотрицательная ограниченная функция $\varphi(t)$, характеризующая потребности в комплексах одного типа в промежутке времени $[0,T]$. Требуется определить план производства $n(t)$ комплексов, который доставляет минимум суммарным затратам за весь период их эксплуатации, т.е. требуется найти

$$\min_{n(t)} \left\{ c \cdot \left(\int_0^T n(t)\,dt \right)^{\alpha} + a \cdot \int_0^T n(t)\,dt + c^0 \right\} \qquad /3.1/$$

при условиях:

$$\int_{t-\theta}^{t} n(\tau)\,d\tau \geq \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \qquad /3.2/$$

$$\left. \begin{array}{lll} n(t) = 0 & \text{при} & t < 0, \\ n(t) \geq 0 & \text{при} & t \geq 0. \end{array} \right\} \qquad /3.3/$$

Введем обозначения:

$$x(t) = \int_0^t n(\tau)\,d\tau,$$

$$F(x(t)) = c \cdot (x(t))^{\alpha} + a \cdot x(t) + c^0.$$

Тогда задачу /3.1/ - /3.3/ можно сформулировать так: найти

$$\min_{x(t)} F(x(T)) \qquad /3.4/$$

при ограничениях:

$$x(t) - x(t-\theta) \geq \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \qquad /3.5/$$

$$\begin{array}{ll} x(t) = 0 & \text{при } t < 0, \\ x(t) - & \text{монотонно неубывающая функция} \end{array} \qquad /3.6/$$

Так как константы c, a, α положительны, то $F(x)$ является монотонно возрастающей функцией от x, и задача /4/ - /6/ эквивалентна следующей:

$$\min_{x(t)} x(T) \qquad /3.7/$$

при условиях /3.5/, /3.6/.

Т е о р е м а 1. Решение задачи /3.5/ - /3.7/ определяется "рекуррентным" соотношением

$$x(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} \left[x(\tau - \theta) + \varphi(\tau) \right], \quad t \in [0, T], \qquad /3.8/$$

где $x(\tau - \theta) = 0$ при $\tau \leq \theta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, функция $x(t)$, найденная из этого соотношения, удовлетворяет условиям /3.5/, /3.6/, т.е. является допустимым решением задачи. Покажем, что она является оптимальным решением, т.е. минимизирует функционал $x(T)$.

Пусть $y(t)$ есть произвольная функция, удовлетворяющая условиям /3.5/, /3.6/. Тогда при $\tau \geq 0$ и $t \geq \tau$ будем иметь $y(t) \geq y(\tau) \geq y(\tau - \theta) +$

$+\varphi(\tau)$ или

$$y(t)\geqslant \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\left[y(\tau-\theta)+\varphi(\tau)\right].$$

Отсюда следует, что неравенство $x(t)\leqslant y(t)$ будет выполняться на отрезке $[t_0, t_0+\theta]$, если только оно имело место при всех $t\leqslant t_0$. Действительно, если $t\in[t_0,t_0+\theta]$ и $x(\tau-\theta)\leqslant y(\tau-\theta)$ при $\tau-\theta\leqslant t_0$, то

$$y(t)\geqslant \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\left[y(\tau-\theta)+\varphi(\tau)\right]\geqslant \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\left[x(\tau-\theta)+\varphi(\tau)\right]=x(t)$$

Так как в нашем случае $x(t)=y(t)$ при $t\leqslant 0$ и $\theta>0$, то при всех $t\geqslant 0$ будет иметь место $x(t)\leqslant y(t)$. В частности, $x(T)=y(T)$. Теорема доказана.

Таким образом, из доказанной теоремы следует, что задача /3.4/- - /3.6/ разрешима для любой неотрицательной ограниченной функции $\varphi(t)$ и ее решение может быть получено из соотношения /3.8/.

Опираясь на этот факт, попытаемся установить дополнительные ограничения, накладываемые на функцию $\varphi(t)$, при которых будет разрешима и исходная задача /3.1/ - /3.3/. Для этого нам понадобится

Л е м м а I. Если функция $\varphi(t)$ абсолютно непрерывна на $[0,T]$ и $\varphi(0)=0$, то функция $x(t)$, определяемая соотношением /3.8/, также абсолютно непрерывна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего докажем, что функция $z(t)=\sup\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t}F(\tau)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[t_0, t_1]$, если абсолютно непрерывна функция $F(t)$.

Пусть a и b -произвольные точки отрезка $[t_0,t_1]$ и $a\leqslant b$. Тогда на отрезке $[a,b]$ найдется такая точка c, что $|z(b)-z(a)|\leqslant$ $\leqslant|F(c)-F(a)|$. В самом деле, если максимальные значения $F(t)$ на отрезках $[t_0,a]$ и $[t_0,b]$ совпадают, то

$$|z(b)-z(a)|=\max_{t_0\leqslant\tau\leqslant b}F(\tau)-\max_{t_0\leqslant\tau\leqslant a}F(\tau)=0$$

и в качестве c можно взять любую точку отрезка $[a,b]$. Если же

$$\max_{t_0\leqslant\tau\leqslant b}F(\tau)>\max_{t_0\leqslant\tau\leqslant a}F(\tau),$$

то

$$\max_{t_0\leqslant\tau\leqslant b}F(\tau)=\max_{a\leqslant\tau\leqslant b}F(\tau)=F(c),$$

где $c\in[a,b]$. В этом случае будем иметь

$$|z(b)-z(a)|=F(c)-\max_{t_0\leqslant\tau\leqslant a}F(\tau)\leqslant|F(c)-F(a)|.$$

В силу абсолютной непрерывности $F(t)$ для всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для любой совокупности попарно не пересекающихся интервалов $(a_k,c_k)\subset[t_0,t_1]$, $k=1,2,\dots,n$, имеем

$$\sum_{k=1}^{n}|F(c_k)-F(a_k)|<\varepsilon,$$

как только

$$\sum_{k=1}^{n}(c_k-a_k)<\delta .$$

Пусть интервалы $(a_k,b_k)\subset[t_0,t_1]$, $k=1,2,\dots,n$, попарно не пересекаются,

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$$

и точки $c_k\in[a_k,b_k]$ выбраны так, что $|z(b_k)-z(a_k)|\le|F(c_k)-F(a_k)|$. Поскольку интервалы (a_k,c_k) также попарно не пересекаются и

$$\sum_{k=1}^{n}(c_k-a_k)\le\delta ,$$

то

$$\sum_{k=1}^{n}|z(b_k)-z(a_k)|\le\sum_{k=1}^{n}|F(c_k)-F(a_k)|<\varepsilon .$$

Следовательно, функция $z(t)$ абсолютно непрерывна.

Переходя к доказательству абсолютной непрерывности функции $x(t)$, заметим, что $x(t)=0$ при $t\le0$ /$x(0)=0$ в силу условия $\varphi(0)=0$ /. Следовательно, функция $F(t)=x(t-\theta)+\varphi(t)$, а вместе с ней и $x(t)=\sup\limits_{0\le\tau\le t}F(\tau)$, абсолютно непрерывны на отрезке $[0,\theta]$. Аналогичным образом доказываем, что $x(t)$ абсолютно непрерывна на отрезках $[(k-1)\theta,k\theta],k=1,2,\dots$

Отсюда следует, что функция $x(t)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0,T]$, поскольку он может быть разбит на конечное число отрезков, на каждом из которых $x(t)$ абсолютно непрерывна. Лемма доказана.

Поскольку $x(t)$ монотонно не убывает, то для некоторой неотрицательной функции $n(t)$ равенство $n(t)=x'(t)$ имеет место почти всюду на $[0,T]$. С другой стороны, если $\varphi(t)$ абсолютно непрерывна и $\varphi(0)=0$, то $x(t)$ также абсолютно непрерывна и, следовательно,

$$x(t)=\int_0^t n(\tau)d\tau$$

всюду на отрезке $[0,T]$.

Таким образом, нами доказана

Т е о р е м а 2. Если функция $\varphi(t)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0,T]$ и $\varphi(0)=0$, то решением задачи /3.1/ - /3.3/ является $n(t)=x'(t)$, где $x(t)$ определяется из соотношения /3.8/.

З а м е ч а н и е. В этом случае, когда $\varphi(t)$ представляет собой монотонно неубывающую функцию, из /3.8/ непосредственно следует, что

$$x(t)=\sum_{n=0}^{[t/\theta]}\varphi(t-n\theta).$$

Рассмотрим вкратце случай, когда производственные мощности ограничена. Соответствующая задача может быть сформулирована следующим образом: требуется найти

$$\min_{n(t),\beta}\left\{c\left(\int_0^T n(t)dt\right)^{\alpha}+a\int_0^T n(t)dt+C^0(\beta)\right\} \qquad /3.9/$$

при ограничениях /3.2/, /3.3/ и

$$\left.\begin{array}{ll} n(t)\le\beta & \text{при } t\ge 0,\\ \beta_1\le\beta\le\beta_2. & \end{array}\right\} \qquad /3.10/$$

Здесь β_1 и β_2 - заданные числа и $C^0(\beta)$ - заданная монотонно неубывающая функция от β .

Предположим, что β фиксировано, т.е. $\beta_1=\beta_2$.Тогда справедлива

Т е о р е м а 3. Для существования допустимого плана производства $n(t)$ при фиксированном β необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(0)=0$ и

$$\beta\ge\begin{cases}\dfrac{\varphi(t)}{t} & \text{при } 0<t<\theta,\\ \dfrac{\varphi(t)}{\theta} & \text{при } \theta\le t\le T.\end{cases}$$

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть существует $n(t)$, удовлетворяющая ограничениям /3.2/, /3.3/ и /3.10/. Тогда

$$\varphi(t)\le\int_0^t n(\tau)d\tau\le\beta\cdot t,\quad 0\le t<\theta,$$

и

$$\varphi(t)\le\int_{t-\theta}^t n(\tau)d\tau\le\beta\cdot\theta,\quad \theta\le t\le T,$$

что и доказывает необходимость указанных в теореме условий.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Если выполнены сформулированные в теореме условия, то функция $n(t)$, равная β при $t\in[0,T]$ и 0 при $t<0$, удовлетворяет ограничениям /3.2/, /3.3/, /3.10/.

Конструктивное построение решения сформулированной выше задачи и определение оптимального плана замены однотипных комплексов комплексами нового образца будет проведено для дискретного варианта этой задачи. Поскольку дискретный вариант особенно важен с точки зрения машинной реализации, то для этого случая будет также рассмотрена задача, аналогичная /3.1/ - /3.3/.

2.Д и с к р е т н ы й в а р и а н т. В этом пункте рассматривается задача производства и замены оборудования в дискретные моменты времени. /Здесь термин "оборудование" употребляется как синоним термина "комплекс"/. В каждый из моментов времени $k=0,1,\dots,N$ может быть начато производство оборудования с характеристиками, соответствующими этому моменту. Такое оборудование будем называть оборудованием образца k -го года, или k -оборудованием. Оборудование образца k -го года может производиться и в последующие моменты времени. Каждая единица оборудования используется в течение всего срока ее эксплуатации. Срок эксплуатации считается одинаковым для всех образцов. Если оборудование изготовлено в момент i, то оно пригодно к употреблению в моменты $i, i+1, \ldots, i+\rho$, где ρ - заданное целое неотрицательное число.

Условные обозначения:

a_k - стоимость производства первой единицы k -оборудования.

b_k - стоимость эксплуатации единицы k -оборудования за весь срок эксплуатации.

c_k - стоимость первоначальных затрат, необходимых для организации производства k -оборудования.

$n_k(i)$ - количество k -оборудования, изготовленного с i -го по $(i+1)$ -й моменты времени $(n_k(i)=0$ при $i<k)$.

β_k - максимальное количество k -оборудования, которое может быть изготовлено за один период $[i, i+1]$, т.е. $n_k(i) \leq \beta_k$.

γ_k - производительность единицы k -оборудования.

$\varphi(i)$ - объем работ на период с i -го по $(i+1)$ -й моменты.

Рассмотрим в первую очередь задачу о производстве оборудования одного образца. Естественно, в этом случае может производиться лишь оборудование образца 0 -го года, и речь может идти лишь об оптимальном плане производства.

Планом производства оборудования одного образца назовем последовательность $n_0 = \{n_0(0), n_0(1), \ldots, n_0(N)\}$. План n_0 называется допустимым, если он удовлетворяет ограничениям

$$\gamma_0 \sum_{j=i-\rho}^{i} n_0(j) \geq \varphi(i) \quad (i=0,1,\ldots,N), \qquad /3.11/$$

где $n_0(j)=0$ при $j<0$. Это ограничение представляет собой условие выполнимости заданного объема работ.

Множество всех допустимых планов обозначим через D_0. Функционал затрат при плане n_0 имеет вид:

$$S(n_0) = a_0\Big(\sum_{i=0}^{N} n_0(i)\Big)^{\alpha} + b_0 \sum_{i=0}^{N} n_0(i) + c_0 .$$

Оптимальными затратами назовем величину

$$\bar{S}_0 = \min_{n_0 \in D_0} S(n_0).$$

План $\bar{n}_0 \in D_0$, для которого $S(\bar{n}_0) = \bar{S}_0$, назовем оптимальным планом производства.

Пусть $n_0 \in D_0$, ℓ и L - целые числа, $0 \leq \ell \leq L \leq N$. Величину

$$V(n_0, \ell, L) = \sum_{i=\ell}^{L} n_0(i)$$

назовем допустимым объемом производства оборудования при плане n_0 за период $[\ell, L]$ или, короче, - объемом последовательности $n_0(\ell), \ldots, n_0(L)$. Очевидно, оптимальные затраты $\overline{S}_0$ соответствуют минимальному допустимому объему производства оборудования за период $[0, N]$.

Рассмотрим план производства

$$\tilde{n}_0 = \{\tilde{n}_0(1), \ldots, \tilde{n}_0(N)\},$$

построенный следующим образом:

$$\gamma_0 \cdot \tilde{n}_0(i) = \varphi(i) \dot{-} \gamma_0 \cdot \sum_{j=i-\rho}^{i-1} \tilde{n}_0(j), \quad i = 0, 1, \ldots, N,$$

где $\tilde{n}_0(j) = 0$ при $j < 0$. Легко видеть, что план $\tilde{n}_0$ допустимый.

Лемма 2. Если n_0 допустимый план, то

$$\sum_{i=0}^{\ell} (n_0(i) - \tilde{n}_0(i)) \geq 0 \quad (\ell = 0, 1, \ldots, N). \qquad /3.12/$$

Доказательство. При $\ell = 0$ утверждение леммы справедливо, так как $\gamma_0 \cdot n_0(0) \geq \varphi(0) = \gamma_0 \cdot \tilde{n}_0(0)$ и $\gamma_0 > 0$. Пусть неравенство /3.12/ имеет место при всех $\ell < m$, в частности,

$$\sum_{i=0}^{m-\rho-1} (n_0(i) - \tilde{n}_0(i)) \geq 0 .$$

Докажем, что оно выполняется тогда и при $\ell = m$. Очевидно, это будет так, если $\tilde{n}_0(m) = 0$. Пусть $\tilde{n}_0(m) > 0$. В этом случае, в силу определения плана $\tilde{n}_0$, имеем

$$\gamma_0 \sum_{i=m-\rho}^{m} \tilde{n}_0(i) = \varphi(m).$$

С другой стороны,

$$\varphi(m) \leq \gamma_0 \cdot \sum_{i=m-\rho}^{m} n_0(i),$$

так как план n_0 допустимый. Таким образом,

$$\sum_{i=m-\rho}^{m} (n_0(i) - \tilde{n}_0(i)) \geq 0$$

и

$$\sum_{i=0}^{m} (n_0(i) - \tilde{n}_0(i)) = \sum_{i=0}^{m-\rho-1} (n_0(i) - \tilde{n}_0(i)) + \sum_{i=m-\rho}^{m} (n_0(i) - \tilde{n}(i)) \geq 0.$$

Лемма доказана.

Из леммы 2, в частности, следует, что среди всех планов $n_0 \in D_0$ план $\tilde{n}_0$ соответствует минимальному допустимому объему производства оборудования за период $[0, N]$. Тем самым нами доказана

Т е о р е м а 4. План $\bar{\pi}_0$ оптимальный.

Рассмотрим теперь задачу о производстве оборудования одного образца при наличии ограничений на производственные мощности. В этом случае задача состоит в нахождении плана производства π_0, минимизирующего величину

$$V(\pi_0, 0, N) = \sum_{i=0}^{N} \pi_0(i) \qquad /3.13/$$

при ограничениях /3.II/ и

$$0 \leq \pi_0(i) \leq \beta_0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, N). \qquad /3.14/$$

Опишем алгоритм /назовем его "алгоритм П"/, с помощью которого может быть построено оптимальное решение данной задачи /оптимальный план $\bar{\pi}_0 = \{\bar{\pi}_0(0), \bar{\pi}_0(1), \ldots, \bar{\pi}_0(N)\}$ /.

О п и с а н и е а л г о р и т м а П. В начале процесса считаем $\bar{\pi}_0 = 0$, т.е. $\bar{\pi}_0(i) = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$. Пусть уже проделано k шагов, $0 \leq k \leq N$, в результате которых получен план $\bar{\pi}_0$, удовлетворяющий ограничениям /3.II/ и /3.14/ для $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

<u>$(k+1)$ -й шаг.</u> Если $\gamma_0 \cdot V(\bar{\pi}_0, k-\rho, k) \geq \varphi(k)$, то, не изменяя плана $\bar{\pi}_0$, переходим к следующему шагу. Если же $\gamma_0 \cdot V(\bar{\pi}_0, k-\rho, k) < \varphi(k)$, то, не нарушая ограничений $\bar{\pi}_0(i) \leq \beta_0$, увеличиваем значения величин $\bar{\pi}_0(k), \bar{\pi}_0(k-1), \ldots, \bar{\pi}_0(k-\rho)$ так, чтобы их суммарное изменение было равно $\frac{\varphi(k)}{\gamma_0} - V(\bar{\pi}_0, k-\rho, k)$. При этом мы пытаемся достигнуть поставленную цель в первую очередь за счет увеличения значения $\bar{\pi}_0(k)$, затем - за счет $\bar{\pi}_0(k-1)$ и так далее. Другими словами, если ℓ есть наибольшее целое неотрицательное число из отрезка $[k-\rho, k]$, для которого выполняется неравенство

$$\gamma_0 \cdot \sum_{i=\ell}^{k} (\beta_0 - \bar{\pi}_0(i)) \geq \varphi(k) - \gamma_0 \cdot V(\bar{\pi}_0, k-\rho, k),$$

то в качестве новых значений величин $\bar{\pi}_0(i)$ $(\ell+1 \leq i \leq k)$ берем β_0, а значение величины $\bar{\pi}_0(\ell)$ увеличиваем лишь настолько, чтобы суммарное изменение было равно

$$\frac{\varphi(k)}{\gamma_0} - V(\bar{\pi}_0, k-\rho, k).$$

Значения остальных величин $\bar{\pi}_0(i)$ сохраняем без изменений и переходим к очередному, $(k+2)$ -му шагу. Если на отрезке $[k-\rho, k]$ не найдется числа ℓ с вышеуказанными свойствами, то это означает, что при заданном β_0 задача неразрешима.

В результате применения данного алгоритма после $(N+1)$ -го шага будет получен план $\bar{\pi}_0$, удовлетворяющий ограничениям /3.II/и/3.14/.

Т е о р е м а 5. План $\bar{\pi}_0$, построенный с помощью алгоритма П, является оптимальным решением задачи /3.14/, /3.II/, /3.15/.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала установим следующее свойство плана $\bar{n}_0$:

Если $\bar{n}_0(m)>0$, то для некоторого k, $m\le k\le m+\rho$ имеют место равенства $\gamma_0\cdot V(\bar{n}_0,k-\rho,k)=\varphi(k)$ и $\bar{n}_0(i)=\beta_0$ при $i=m+1,\dots,k$. Действительно, неравенство $\bar{n}_0(m)>0$ означает, что в процессе вычислений, производимых согласно алгоритму П, "текущие" значения величин $\bar{n}_0(i)$, $i\le m$ хотя бы на одном шаге изменялись. Пусть k есть номер последнего шага, на котором производилось такое изменение. Тогда из описания алгоритма следует, что $k-\rho\le m\le k$, $\gamma_0\cdot V(\bar{n}_0,k-\rho,k)=\varphi(k)$ и $\bar{n}_0(i)=\beta_0$ при $i=m+1,\dots,k$.

Пусть n_0 - произвольный план, удовлетворяющий ограничениям /3.11/ и /3.14/, и пусть неравенство

$$\sum_{i=0}^{\ell}(n_0(i)-\bar{n}_0(i))\ge 0 \qquad /3.16/$$

имеет место при всех $\ell<m$ $(m\ge 0)$. Покажем, что /3.15/ выполняется и при $\ell=m$. В самом деле, если $\bar{n}_0(m)=0$, то утверждение очевидно. Если же $\bar{n}_0(m)>0$, то, по доказанному выше, найдется номер k , такой, что $k-\rho\le m\le k$, $\gamma_0\cdot V(\bar{n}_0,k-\rho,k)=\varphi(k)$ и $\bar{n}_0(i)=\beta_0$ при $i=m+1,\dots,k$. С другой стороны, $\gamma_0\cdot V(n_0,k-\rho,k)\ge\varphi(k)$ и $n_0(i)\le\beta_0$, т.е. $V(n_0,k-\rho,k)-V(\bar{n}_0,k-\rho,k)\ge 0$ и $V(\bar{n}_0,\ell+1,k)-V(n_0,\ell+1,k)\ge 0$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{m}(n_0(i)-\bar{n}_0(i))=\sum_{i=0}^{k-\rho-1}(n_0(i)-\bar{n}_0(i))+\sum_{i=k-\rho}^{k}(n_0(i)-\bar{n}_0(i))+\sum_{i=m+1}^{k}(\bar{n}_0(i)-n_0(i))\ge 0,$$

поскольку все три суммы в правой части равенства неотрицательны. Таким образом, неравенство /3.16/ имеет место при всех ℓ , что и доказывает оптимальность плана $\bar{n}_0$.

Теперь вкратце остановимся на задаче производства и однократной замены оборудования. Заменой 0 -оборудования на k -оборудование, или заменой $(0\to k)$, назовем случай, когда 0 -оборудование производится в моменты времени $0,1,\dots,k-1$, а в последующие моменты производится k -оборудование, при этом 0 -оборудование используется в течение всего срока его эксплуатации, т.е. до момента $k+\rho-1$. Допустимым планом производства и замены $(0\to k)$ назовем последовательность $n_{0,k}=\{n_0(0),\dots,n_0(k-1),n_k(k),\dots,n_k(N)\}$, удовлетворяющую ограничениям:

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma_0\cdot\sum_{j=i-\rho}^{i}n_0(j)\ge\varphi(i) \quad (0\le i\le k-1),\\
&\gamma_k\cdot\sum_{j=i-\rho}^{i}n_k(j)\ge\varphi(i) \quad (k+\rho\le i\le N),\\
&\gamma_0\cdot\sum_{j=i-\rho}^{k-1}n_0(j)+\gamma_k\cdot\sum_{j=k}^{i}n_k(j)\ge\varphi(i) \quad (k\le i<k+\rho),
\end{aligned}\right\} \qquad /3.17/$$

$$\left.\begin{array}{ll} 0 \le n_0(i) \le \beta_0 & (0 \le i \le k-1), \\ 0 \le n_k(i) \le \beta_k & (k \le i \le N) \; . \end{array}\right\} \qquad /3.18/$$

Множество всех допустимых планов $n_{0,k}$ обозначим $D_{0,k}$. Затраты при плане $n_{0,k}$ задаются функционалом

$$S(n_{0,k}) = a_0\Big(\sum_{i=0}^{k-1} n_0(i)\Big)^{\alpha} + b_0 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} n_0(i) + C_0 + \qquad /3.19/$$

$$+\, a_k\Big(\sum_{i=k}^{N} n_k(i)\Big)^{\alpha} + b_k \sum_{i=k}^{N} n_k(i) + C_k \; .$$

Рассматриваемая задача состоит в нахождении плана $\bar n_{0,k} \in D_{0,k}$, для которого

$$S(\bar n_{0,k}) = \min_{n_{0,k} \in D_{0,k}} S(n_{0,k}) .$$

План $\bar n_{0,k}$ будем называть оптимальным планом производства и замены $(0 \to k)$. Замену $(0 \to k)$ назовем выгодной, если $S(\bar n_{0,k}) < S(\bar n_0)$, где $\bar n_0$ -оптимальное решение задачи /3.11/,/3.12/,/3.15/.

Введем в рассмотрение последовательность /план/ $u = \{u(0), u(1), \dots, u(N)\}$, полагая

$$u(i) = \gamma_0 \cdot n_0(i) \text{ при } 0 \le i \le k-1,$$
$$u(i) = \gamma_k \cdot n_k(i) \text{ при } k \le i \le N .$$

Тогда задача /3.16/ - /3.18/ будет эквивалентна следующей: минимизировать

$$S(u) = a_0'\Big(\sum_{i=0}^{k-1} u(i)\Big)^{\alpha} + b_0' \sum_{i=0}^{k-1} u(i) + C_0 + a_k'\Big(\sum_{i=k}^{N} u(i)\Big)^{\alpha} + b_k' \sum_{i=k}^{N} u(i) + C_k \qquad /3.20/$$

при ограничениях

$$\sum_{j=i-\rho}^{i} u(i) \ge \varphi(i), \quad (0 \le i \le N) \qquad /3.21/$$

$$\left.\begin{array}{ll} 0 \le u(i) \le \beta_0' \, , & (0 \le i \le k-1) \\ 0 \le u(i) \le \beta_k' \, , & (k \le i \le N) \end{array}\right\} \qquad /3.22/$$

где $a_s' = \dfrac{a_s}{\gamma_s^{\alpha}}$, $b_s' = \dfrac{b_s}{\gamma_s}$, $\beta_s' = \gamma_s \beta_s$ $(S = 0, k)$.

План $\bar u$, удовлетворяющий ограничениям /3.21/,/3.22/ и минимизирующий величину

$$V(u, 0, N) = \sum_{i=0}^{N} u(i),$$

может быть построен с помощью алгоритма П после внесения в него очевидных изменений, вызванных спецификой ограничений /3.22/. Тогда для любого допустимого плана u задачи /3.20/ - /3.22/ будут иметь место неравенства:

$$\left.\begin{array}{l} V(u,0,N) \geqslant V(\bar{u},0,N), \\ V(u,0,k-1) \geqslant V(\bar{u},0,k-1). \end{array}\right\} \qquad /3.23/$$

С другой стороны, если $\bar{u}_0$ есть план, построенный с помощью алгоритма Π, при ограничениях /3.21/ и

$$0 \leq u_0(i) \leq \beta_0' \quad (i = 0,1,\ldots,N),$$

то при $\beta_k' \leq \beta_0'$ будет справедливо неравенство

$$V(\bar{u},0,N) \geqslant V(\bar{u}_0,0,N).$$

Л е м м а 3. Пусть $\alpha = 1$, $A_0 = a_0' + b_0'$ и $A_k = a_k' + b_k'$. Тогда

1/ если $A_0 \leq A_k$ и $\beta_k' \leq \beta_0'$, то замена $(0 \to k)$ не выгодна;

2/ если $A_0 \geqslant A_k$ то оптимальным планом производства и замены $(0 \to k)$ является план $\bar{u}$. /При этом замена $(0 \to k)$ может оказаться и невыгодной/.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ Пусть $A_0 \leq A_k$ и $\beta_k' \leq \beta_0$. Тогда для любого плана u, удовлетворяющего ограничениям /3.21/, /3.22/, выполняются соотношения:

$$S(u) = A_0 \cdot V(u,0,k-1) + A_k \cdot V(u,k,N) + C_0 + C_k >$$
$$> A_0 \cdot V(u,0,N) + C_0 \geqslant A_0 \cdot V(\bar{u}_0,0,N) + C_0 = S(\bar{u}_0).$$

2/ Пусть $A_0 \geqslant A_k$. Тогда, в силу /3.23/, будем иметь

$$S(u) = A_0 \cdot V(u,0,k-1) + A_k \cdot V(u,k,N) + C_0 + C_k =$$
$$= A_0 \cdot V(\bar{u},0,k-1) + A_k \cdot V(\bar{u},k,N) + C_0 + C_k +$$
$$+ A_0 \cdot (V(u,0,k-1) - V(\bar{u},0,k-1)) + A_k \cdot (V(u,k,N) - V(\bar{u},k,N)) \geqslant$$
$$\geqslant S(\bar{u}) + A_k \cdot (V(u,0,N) - V(\bar{u},0,N)) \geqslant S(\bar{u}).$$

Лемма доказана.

Вернемся к задаче /3.9/, /3.2/, /3.3/,/3.10/,приняв

$$\beta_1 = \max\left\{\max_{0<t<\theta} \frac{\varphi(t)}{t}, \max_{\theta \leq t \leq T} \frac{\varphi(t)}{\theta}\right\}, \text{ а } \beta_2 = \max_{0 \leq t \leq T} n(t), \text{ где } n(t) -$$

- решение задачи /3.1/ - /3.3/. Очевидно, суммарное производство комплексов $\int_0^T n(t)\,dt$ в рассматриваемой задаче не возрастает от β. Следовательно, перебирая различные β из некоторой ε -сети заданной на $[\beta_1, \beta_2]$, можно найти искомое $\beta_{опт}$.

§ 4. О решении общей динамической задачи

Вернемся теперь к общей динамической задаче, сформулированной в § 2. Заметим, что изложенные в § 3 методы позволяют эффективно вычислять минимальные суммарные затраты для каждого типа комплексов на фиксированном интервале времени при заданной потребности.

Обозначим через $S(t_{i-1}, t_i; x_{k-1,i}, x_{k,i})$ минимальные затраты на k -й тип комплексов в интервале времени $(t_{i-1}, t_i]$ при условии, что была проведена последовательная минимизация затрат для всех типов изделий на предшествующих интервалах времени. Тогда суммарные затраты за весь рассматриваемый период $[0,T]$ запишутся в следующем виде

$$S(0,T)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{N_i}\bar{s}(t_{i-1},t_i;x_{k-1,i},x_{k,i}).$$

Теперь уже минимизацию $S(0,T)$ можно производить по переменным $x_{k,i}, t_i, N_i$ и M при условиях /2.2/ и /2.3/. Решение такой задачи легко провести методом динамического программирования [7].

Таким образом, при предположениях, сформулированных в § 2, и при условии, что в каждый из моментов времени t_i происходит полная замена старой системы на новую, рассматриваемая нами задача может быть решена, т.е. могут быть найдены оптимальные моменты $t_i\,(i=1,\dots,M)$ пересмотра системы, оптимальное число типов комплексов N_i в каждый из периодов $(t_{i-1},t_i]$ и их оптимальные характеристики $x_{k,i}\,(k=1,\dots,N)$. Кроме того, для каждого из периодов $(t_{i-1},t_i]$ определяется оптимальный план производства комплексов k -го типа $n_{k,i}(t)(k=1,\dots,N_i)$ и необходимые производственные мощности $\beta_{k,i}$.

Однако на практике встречаются случаи, когда в момент пересмотра t_i не происходит полной замены старой системы на новую, т.е. когда один или несколько типов комплексов старой системы производятся и на новом интервале времени $(t_i,t_{i+1}]$. При решении общей задачи в такой постановке потребуется рассматривать различные варианты сохранения старых комплексов в новой системе. Если через $\tilde{N}$ обозначить среднее число типов комплексов, определяемое в различных интервалах $(t_{i-1},t_i]$, то сложность решения общей задачи в этом случае увеличится примерно в $2^{\tilde{N}}$ раз. Этот факт может существенно повлиять на возможность численного прогноза динамики той или иной системы. Поэтому возникает необходимость в дальнейшем анализе различных моделей развития однородных технических систем.

Отметим случай, когда в интервале времени $[0,T]$ предусматривается лишь модернизация выбранных в момент $t_0=0$ комплексов без последующего изменения характеристик $x_k\,(k=1,\dots,N)$. Решение этой задачи сводится к минимизации величины

$$S(0,T)=\sum_{k=1}^{N}\bar{s}(x_{k-1},x_k)$$

при условии

$$0=x_0\le x_1\le x_2\le\dots\le x_N=X,$$

где $\bar{s}(x_{k-1},x_k)$ – минимальные суммарные затраты для комплексов k -го типа на всем интервале $[0,T]$. Для определения $\bar{s}(x_{k-1},x_k)$ и моментов модернизации $t_{k,i}$ можно использовать метод, изложенный в § 3.

В заключение назовем некоторые из факторов, которые могут быть учтены при дальнейшем исследовании предложенной модели развития системы.

Во-первых, отметим, что в любой экономико-математической модели динамики системы, предполагающей последовательное осуществление затрат, должен учитываться коэффициент приведения затрат к начальному моменту $\frac{1}{(1+E)^t}$ $(E\approx 0,1)$. Этот коэффициент отражает "удешевление" затрат со временем. Введение его в функционал /2.1/ не изменяет существенно рассмотренного в § 3 метода.

Далее, известно /см., например, [8] /,что стоимость эксплуатации изделия зависит от срока его службы θ и может быть представ- в виде:

$$a(\theta)=a_1\cdot\theta+a_2\theta^{\delta},$$

где $a_1\theta$ - пропорциональные затраты /хранение, топливо, рабочая сила/;

$a_2\theta^{\delta}, \delta>1$ - прогрессирующие затраты, которые связаны с усложнением технологического содержания, технического обслуживания, сокращением сроков службы сменяемых конструктивных элементов и так далее. Введение данной зависимости в функционал суммарных затрат позволяет ставить задачу об определении оптимальных сроков эксплуатации комплексов.

Затем следует отметить, что ввод дополнительных производственных мощностей, а также эксплуатация изделий после их изготовления происходят с некоторым запаздыванием. Эти запаздывающие аргументы также можно ввести в модель без существенных изменений ее структуры.

И, наконец, в предлагаемой модели можно снять условие о полной эксплуатации комплексов старой системы в переходный период. Это позволит выяснить целесообразность более интенсивного ввода в строй комплексов новой системы.

Поступила в редакцию 8.2.1971 г.

Литература

1.В.Т.Дементьев. Об одной задаче оптимального размещения точек на отрезке.-"Дискретный анализ", Новосибирск, 1965, вып. 4.

2.Н.И.Глебов. О выпуклых последовательностях.-"Дискретный анализ", Новосибирск, 1965, вып. 4.

3.Э.Х.Гимадутдинов. О свойствах решений одной задачи оптимального размещения точек на отрезке.-"Управляемые системы", Новосибирск, 1969, вып. 2.

4.Э.Х.Гимадутдинов. Об одном классе задач нелинейного программирования.-"Управляемые системы", Новосибирск, 1969, вып. 3.

5.В.Т.Дементьев. Задача выбора типажа оборудования.-"Методы управления большими системами", Иркутск, 1970, том.П.

6. Э.Х.Гимади /Гимадутдинов/. Выбор оптимальных шкал в одном классе задач типа размещения, унификации и стандартизации.-"Управляемые системы", Новосибирск, 1970, вып.6.

7. Р.Беллман, С.Дрейфус. Прикладные задачи динамического программирования. "Наука", М. 1965.

8. А.И.Селиванов. Основы теории старения машин, "Машиностроение", М., 1964.