Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 8.
УДК.512.25/26+519.3:330.115.

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ АЛГОРИТМА ФОРДА-ФАЛКЕРСОНА ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПОТОКА

В.А.Евстигнеев

1. Как известно, сетевая транспортная задача сводится к построению оптимального потока в сети, а сетевая транспортная задача по критерию времени требует к тому же знания так называемого "цепного разложения" потока, т.е. представления его в виде совокупности параллельных ветвей с независимыми потоками [1] . Для получения цепного разложения достаточно, очевидно, построить оптимальный поток, а затем уже построить его цепное разложение. Однако существует ряд задач, где эта процедура невыгодна, если не сказать невозможна. Пусть, например, нам требуется вычислить для каждой дуги u сети G значение функции $\sigma(u)$, определяемой формулой

$$\sigma(u)=\sum_{P=1}^{P=P_0} \Delta T(P,u)P,$$

где $\Delta T(P,u)$ - увеличение времени перевозки груза P из входа сети G в выход после удаления из сети дуги u .

При решении этой и аналогичных задач удобно получать цепное разложение потока одновременно с его построением. Подходящим с этой точки зрения является алгоритм Форда-Фалкерсона [2] /см. также [1] /. Однако его изложение страдает отсутствием наглядности и связи со структурой графа и его частей, например с путями, циклами и так далее. В 1966 г. появилась статья Т.Ху [3], где была описана модификация алгоритма/принадлежащая Бузакеру и Гоуэну[4],см. также [5]/, представлявшая собой сочетание процедуры построения кратчайшего пути и редукции сети, на основе которой можно разработать требуемый алгоритм.

В настоящей заметке предлагается модификация алгоритма построения оптимального потока, основанная на идеях Бузакера и Ху, которая дает возможность получать одновременно с построением потока его цепное разложение. Кроме того, дается вариант алгоритма, при котором получающееся цепное разложение состоит из ветвей, упорядоченных по возрастанию длин ветвей /или весов/.

2. Введем вначале следующие обозначения:

$c(u)$ - пропускная способность дуги u ;

$t(u)$ - время пробега /длина/ по дуге u ;

$c^k(u)$ и $t^k(u)$ - пропускная способность и время пробега по дуге перед k -й итерацией, $c^1(u)=c(u)$, $t^1(u)=t(u)$.

G^k - сеть G с пропускными способностями $c^k(u)$ и временами пробега $t^k(u)$, $G^1=G$.

Используя введеные обозначения, рассмотрим алгоритм.

А л г о р и т м

Шаг I. В сети G^K ищется /любым методом/ кратчайший путь ρ_K из x_0 в Z. При этом в качестве длин дуг берутся величины $t^K(u)$.

Шаг 2. Если такого пути не существует, то алгоритм заканчивается. Если такой путь существует, т.е.его длина конечна, то вычисляем максимальный поток φ_K по этому пути ρ_K :

$$\varphi_K = \min_{u \in \rho_K} C^K(u)$$

Проверяем, содержатся ли в пути ρ_K дуги из множества $\{\bar{u}^{(j)}\}$, $j \le k$, $\{\bar{u}^{(0)}\} = \phi$, если содержатся, то переходим к шагу 5, если нет, то - к шагу 3.

Шаг 3. Пропускные способности $C^K(u)$ и длины $t^K(u)$ заменяются на $C^{K+1}(u)$ и $t^{K+1}(u)$ по следующим правилам:

$$C^{K+1}(u) = \begin{cases} C^K(u) - \varphi_K & , \text{ если } u \in \rho_K \quad ; \\ C^K(u) & , \text{ если } u \notin \rho_K \quad ; \end{cases}$$

$$t^{K+1}(u) = \begin{cases} t^K(u) & , \text{ если } C^{K+1}(u) > 0 \quad ; \\ \infty & , \text{ если } C^{K+1}(u) = 0 \quad . \end{cases}$$

Шаг 4. К сети G^K добавляются дуги $\{\bar{u}^{(K+1)} = (x_j, x_i)\}$, соответствующие прямым дугам $u = (x_i, x_j)$ пути ρ_K. Для дуг $\bar{u}^{(K+1)}$ полагаем

$$C^{K+1}(\bar{u}^{(K+1)}) = \varphi_K , \quad t^{K+1}(\bar{u}^{(K+1)}) = -t(u) .$$

Переходим к шагу I, взяв в качестве исходной сеть G^{K+1}.

Шаг 5. Пусть ρ_K содержит дугу $\bar{u} = (x_j, x_i) \in \{\bar{u}^{(j_0)}\}$ для наименьшего $j_0 \le k$. Тогда пути ρ_K и ρ_{j_0} /содержащий дугу $u = (x_i, x_j)$/ заменяются путями $\tilde{\rho}_{j_0}$, $\tilde{\rho}_K$, по следующему правилу:

Пусть

$$\rho_{j_0} = [\rho_{j_0}(x_0, x_i), (x_i, x_j), \rho_{j_0}(x_j, z)],$$

$$\rho_K = [\rho_K(x_0, x_j), (x_j, x_i), \rho_K(x_i, z)]$$

i / Если $\varphi_{j_0} = \varphi_K$, то ρ_{j_0} заменяется на путь $\tilde{\rho}_{j_0}$,

$$\tilde{\rho}_{j_0} = [\rho_{j_0}(x_0, x_j), \rho_K(x_i, z)].$$

а ρ_K заменяется на путь $\tilde{\rho}_K$,

$$\tilde{\rho}_K = [\rho_K(x_0, x_j), \rho_{j_0}(x_j, z)] .$$

ii / Если $\varphi_{j_0} > \varphi_K$, то ρ_{j_0} заменяется на пути $\tilde{\rho}_{j_0} = \rho_{j_0}$ с потоком $\varphi_{j_0} - \varphi_K$ и $\tilde{\rho}_{j_0+1} = [\rho_{j_0}(x_0, x_i); \rho_K(x_i, z)]$ с потоком φ_K; а путь ρ_K заменяется на путь $\tilde{\rho}_K$,

$$\tilde{\rho}_K = [\rho_K(x_0, x_j); \rho_{j_0}(x_j, z)] .$$

При этом номера путей $\rho_{j_0+1}, \ldots, \rho_{K-1}$ увеличиваются на I.

iii / Если $\varphi_K > \varphi_{j_0}$, то замена производится так же как и в случае i / и шаг 5 повторяется уже для пути $\tilde{\rho}_K$. Переход к шагу I.

3. В дальнейшем мы будем рассматривать совокупность путей $R =$

$=\{\rho_1,\dots,\rho_n\}$, выделенных в процессе работы алгоритма Бузакера-Ху, вместе с потоком по ним. Легко видеть,что все потоки по путям ρ_i удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{j=1}^{k(u)} \varphi(\rho_{i_j}) = \varphi(u) \leq c(u),$$

где $\rho_{i_1},\dots,\rho_{i_{k(u)}}$ - пути, содержащие дугу u, т.е. цепное разложение потока $\varphi(u)$.

Для простоты будем называть такие пути ветвями.

Итак, пусть $R=\{\rho_1,\dots,\rho_n\}$ - совокупность ветвей, выделенных в процессе работы описанного алгоритма, и пусть $M=\{\mu_1,\dots,\mu_m\}$ - - совокупность ветвей, упорядоченных по возрастанйю их длин из разложения оптимального потока, полученная способом, описанным, например,в [6].

П р е д л о ж е н и е. Если хотя бы одна ветвь ρ_i подвергается перестройке в соответствии с шагом 5, то в общем случае $M \neq R$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Упорядочим ветви ρ_i по возрастанию длин $\tilde{t}_i = \sum_{u\in\rho_i} t(u)$ и будем считать, что они занумерованы именно в этом порядке. Напомним,что аналогично занумерованы и ветви во множестве M. Рассмотрим ветви μ_1 и ρ_1. Если $\mu_1 \equiv \rho_1$, т.е. $t(\mu_1) = \tilde{t}_1$ и $\varphi(\mu_1) = \varphi(\rho_1)$, то переходим к следующим ветвям. Допустим для определенности, что $\mu_1 \equiv \rho_1$ и $t(\mu_1) < \tilde{t}_1$. Пусть, далее, сеть имеет вид, показанный на рис. I. Нетрудно видеть, что после построения ветви ρ_3 происходит перестройка ветвей: ρ_1 с длиной $t_1 = 3$ заменяется на ветвь $\tilde{\rho}_1 = [\rho_1(x_0,x_i),\rho_3(x_i,z)]$ с длиной $\tilde{t}_1 = 6$; ρ_3 заменяется на ветвь $\tilde{\rho}_3 = [\rho_3(x_0,x_j),\rho_1(x_j,z)]$ с длиной $\tilde{t}_3 = 4$. После перенумерации ветвей имеем $R=\{\rho_1,\rho_2,\rho_3\}$, где $\rho_1 = \tilde{\rho}_3$, $\rho_2 = \rho_2$, $\rho_3 = \tilde{\rho}_1$.

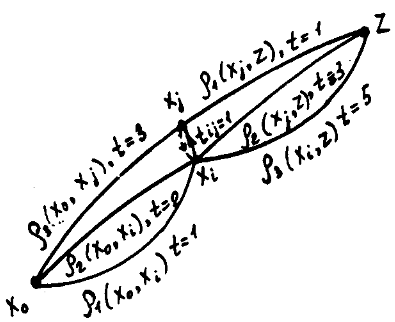

Рис. I.

В то же время множество M состоит из ветвей

$$\mu_1 = [\rho_1(x_0,x_i),\rho_2(x_i,z)] : t(\mu_1) = 4;$$

$$\mu_2 = \tilde{\rho}_3 = [\rho_3(x_0,x_j);\rho_1(x_j,z)]\ \ t(\mu_2) = 4;$$

$$\mu_3 = [\rho_2(x_0,x_i),\rho_3(x_i,z)] : t(\mu_3) = 7,$$

что и доказывает наше утверждение.

П р е д л о ж е н и е. Множества M и R равны /т.е. $\mu_i = \rho_i$ для всех $i=1,\dots,m$ / в том и только в том случае, если все пути $\rho_k(x_i,z)$, связывающие вершину x_i с z, и все пути $\rho_l(x_j,z)$, связывающие x_j с z, имеют одно и то же время пробега для каждой такой группы путей.

4. Исходя из приведенных выше рассуждений, можн так изменить шаг 5 алгоритма, что после окончания его работы будет сразу же получено множество M .

Шаг 5'. Пусть ρ_k содержит дугу $\bar{u} = (x_j, x_i) \in \{\bar{u}^{(j_0)}\}$ для наименьшего $j_0 \le k$. Тогда ветви $\{\rho_s\}$ заменяются ветвями $\{\tilde{\rho}_s\}$ по следующим правилам:

i/ Если
$$\rho_{j_0} = [\rho_{j_0}(x_0, x_i), (x_i, x_j), \rho_{j_0}(x_j, z)],$$
$$\rho_k = [\rho_k(x_0, x_j), (x_j, x_i), \rho_k(x_i, z)],$$
$$\varphi_{j_0} = \varphi_k$$
и через вершину x_i проходят ветви
$$\rho_{j_1}, \rho_{j_2}, \dots, \rho_{j r_0}, \quad j_0 < j_r < k, \quad 1 \le r \le r_0,$$
а через вершину x_j проходят ветви
$$\rho_{k_1}, \rho_{k_2}, \dots, \rho_{k_{s_0}}, \quad j_0 < k_s < k, \quad 1 \le s \le s_0,$$
то

ρ_{j_0} заменяется на $\tilde{\rho}_{j_0} = [\rho_{j_0}(x_0, x_i), \rho_{j_1}(x_i, z)]$;

ρ_{j_1} заменяется на $\tilde{\rho}_{j_1} = [\rho_{j_1}(x_0, x_i), \rho_{j_2}(x_i, z)]$;

....

$\rho_{j r_0}$ заменяется на $\tilde{\rho}_{j r_0} = [\rho_{j r_0}(x_0, x_i), \rho_k(x_i, z)]$;

ρ_{k_1} заменяется на $\tilde{\rho}_{k_1} = [\rho_{k_1}(x_0, x_j), \rho_{j_0}(x_j, z)]$;

ρ_{k_2} заменяется на $\tilde{\rho}_{k_2} = [\rho_{k_2}(x_0, x_j), \rho_{k_1}(x_j, z)]$;

....

ρ_k заменяется на $\tilde{\rho}_k = [\rho_k(x_0, x_j), \rho_{k_{s_0}}(x_j, z)]$.

Упорядочиваем получившееся множество ветвей и отбрасываем знак $\sim$.

ii / Если $\varphi_{j_0} > \varphi_k$, то замена ветвей происходит аналогично i / с той лишь разницей, что ветвь ρ_{j_0} заменяется на ветви: $\tilde{\rho}_{j_0}$, $t(\tilde{\rho}_{j_0}) = t(\rho_{j_0})$, $\tilde{\varphi}_{j_0} = \varphi_{j_0} - \varphi_k$ и т.д., смотря по соотношениям между потоком φ_k и потоками по ветвям ρ_{j_1} , ρ_{j_2} , ...

iii / Если $\varphi_{j_0} < \varphi_k$, то замена ветвей происходит аналогично ii / с той разницей, что вся процедура повторяется для ветви $\tilde{\rho}_k$.

Поступила в редакцию 16.10.1970 г.

Литература

1. Л.Р.Форд, Д,Р.Фалкерсон. Потоки на сетях, "Мир", М.,1966.
2. L.R.Ford,D.R.Fulkerson. Constructing maximal dynamic flows from static flows. "Oper.Res.", vol.6,N3,1958.
3. T.C.Hu. Minimum-cost flows in convexcost networks "Naval Res.Log.Guart.",1966,vol.13,N1,1-10.
4. R.G.Rüsacker,P.J.Gowen. A Procedure for Determining a Family of Minimal-Cost Network Flow Patterns," Operations Research Office", Technical Paper (1961),15.

5. R.G.Busacher, Th.L.Saaty. Finite graphs and networks: An introduction with applications. New York,a.a.,McGraw-Hill,1965.

6. В.А.Евстигнеев. Транспортная задача по времени.I.- Дискретный анализ, Новосибирск, 1968, вып.13, стр.3-20.

7. К.Берж. "Теория графов и ее применения", ИЛ, М., 1962.

Примечание к статье "ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ АЛГОРИТМА ФОРДА-ФАЛКЕРСОНА ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПОТОКА"

В.А.Евстигнеев.

В связи с имевшим место обсуждением работы [6] целесообразно отметить, что описанная в настоящей заметке перестройка потока является весьма существенной. В частности, из нее и из теоремы [4] работы [2] /см. следствие 3.3 теоремы 3.I в [I]/ сразу же вытекает, что теорема об эквивалентности сетей /[6], теорема 4/ справедлива в том виде, как она изложена там, только для сетей, у которых последний построенный кратчайший путь ρ_m не содержит дуг из $\bigcup\limits_{i\leq m}\{\bar{u}^{(i)}\}$, т.е. является путем, а не цепью в сети G / об определениях пути и цепи см. [7], напомним кстати, что в книге [I] понятия пути и цепи имеют прямо противоположный смысл относительно аналогичных понятий из [7]/ В общем случае теорема 4 должна выглядеть следующим образом /учитывая, что ρ_m есть максимальная цепь в G /:

Т е о р е м а. Для каждой произвольной двухполюсной сети существует либо эквивалентная ей параллельная сеть, если максимальная цепь в сети G есть путь, либо T -эквивалентная сеть в противном случае, где T есть длина максимальной цепи.

Изменения в доказательстве теоремы тривиальны.

Как следствие получаем, что в формуле для вычисления постоянной $B(G)$ /формула /7'/ в [6]/ под длиной t_m максимального пути следует понимать длину максимальной цепи, т.е. величину T

Поступила в редакцию 22.3.1971 г.