Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 8.
УДК.519.1.

О БАЗИСЕ ВЕКТОР-КАРКАСОВ ОБЫКНОВЕННОГО СВЯЗНОГО ГРАФА

М.В.Клибанов, В.А.Аксенов

Задача нахождения базиса вектор-каркасов возникла при применении теории графов к задачам химической кинетики [1] , где число независимых вектор-каркасов необходимо для верхней оценки числа параметров, входящих в описание линейных многостадийных механизмов сложных химических реакций в стационарных условиях [2] .

Задачей данной работы является введение понятий вектор-каркасов, базиса вектор-каркасов и выявление связи между числом элементов в этом базисе и строением графа.

Пусть G - обыкновенный связный граф /авторы пользуются терминологией, введенной в [3] /. Каждому каркасу в G поставим в соответствие вектор из R^m , где m - число ребер в G , следующим образом: все ребра перенумеровываются числами от 1 до m . Если K - каркас в G , то в векторе, соответствующем K на i -м месте ставим 1, если ребро с номером i принадлежит K , и 0 - в противном случае.

О п р е д е л е н и е. Вектор, соответствующий каркасу K , будем называть вектор-каркасом и обозначать $\overline{K}$. Пусть $m(G)$ - число ребер, а $n(G)$ - число вершин в графе G .

О п р е д е л е н и е. Максимальную линейно независимую систему вектор-каркасов будем называть базисом вектор-каркасов. Число элементов в базисе будем называть рангом вектор-каркасов графа G и обозначать $R(G)$.

Очевидно, что

$$R(G) \leq m(G). \qquad /1/$$

Если $\overline{K}=(a_1,\ldots,a_m)$, то

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = n(G)-1 \qquad /2/$$

по свойству каркасов [3] .

Л е м м а 1. Если $\overline{K_0}, \overline{K_1},\ldots,\overline{K_s}$ - вектор-каркасы G и существуют числа α_i $(i=1,\ldots,s)$ такие, что

$$\overline{K_0}=\alpha_1\overline{K_1}+\ldots+\alpha_s\overline{K_s}, \quad \text{то} \quad \sum_{i=1}^{s}\alpha_i = 1 .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$\overline{K_0}=(a_{01},\ldots,a_{0m}),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\overline{K_i}=(a_{i1},\ldots,a_{im}),$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$K_s = (a_{s1}, \ldots, a_{sm}),$$

тогда
$$a_{0s} = \alpha_1 a_{11} + \ldots + \alpha_s a_{s1},$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$a_{0m} = \alpha_1 a_{1m} + \ldots + \alpha_s a_{sm}.$$

Суммируя правые и левые части последних равенств, получаем:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{0i} = \alpha_1 \sum_{i=1}^{m} a_{1i} + \ldots + \alpha_s \sum_{i=1}^{m} a_{si};$$

воспользовавшись /2/, получим $n(G)-1 = \alpha_1[n(G)-1] + \ldots + \alpha_s[n(G)-1]$, или

$$1 = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i .$$

Лемма доказана.

Т е о р е м а I. Пусть в G существует разделяющая вершина, т.е. $G = G_1 \cup G_2$, причем G_1 и G_2 имеют только одну общую вершину; тогда

$$R(G) = R(G_1) + R(G_2) - 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $R(G_1) = R_1$, $R(G_2) = R_2$ и $R(G) = R$. Очевидно, что если K_1 -каркас в G_1, K_2 - в G_2, то $K = K_1 \cup K_2$ - каркас в G и наоборот, любой каркас в G можно представить в виде объединения каркасов графов G_1 и G_2. Введем обозначение: если $\overline{X} \in R^p$, а $\overline{Y} \in R^q$, то под записью $(\overline{X}, \overline{Y})$ будем понимать вектор $\overline{Z} = (X_1, \ldots, X_p, Y_1, \ldots, Y_q)$, где X_i -компоненты вектора $\overline{X}$, а Y_i - компоненты $\overline{Y}$. Пусть в G_1 базис вектор-каркасов $\overline{K}_1, \ldots, \overline{K}_{R_1}$, а в G_2 - $\overline{\Gamma}_1, \ldots, \overline{\Gamma}_{R_2}$. Рассмотрим систему векторов:

$$\begin{array}{ll} (\overline{K}_1, \overline{\Gamma}_1) & (\overline{K}_2, \overline{\Gamma}_1), \\ (\overline{K}_1, \overline{\Gamma}_2) & (\overline{K}_3, \overline{\Gamma}_1), \\ . \quad . \quad . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \\ (\overline{K}_1, \overline{\Gamma}_{R_2}) & (\overline{K}_{R_1}, \overline{\Gamma}_1). \end{array} \qquad /3/$$

Все эти векторы являются вектор-каркасами в G. Докажем, что система вектор-каркасов /3/ линейно независима. Пусть это не так, т.е. существуют α_i $(i = 1, \ldots, R_1 + R_2 - 1)$, не все равные 0, такие, что

$$\alpha_1(\overline{K}_1, \overline{\Gamma}_1) + \alpha_2(\overline{K}_1, \overline{\Gamma}_2) + \ldots + \alpha_{R_2}(\overline{K}_1, \overline{\Gamma}_{R_2}) + \alpha_{R_2+1}(\overline{K}_2, \overline{\Gamma}_1) + \ldots + \alpha_{R_2+R_1-1}(\overline{K}_{R_1}, \overline{\Gamma}_1) = 0$$

Расписывая это равенство по компонентам, получаем:

$$\Big(\sum_{i=1}^{R_2} \alpha_i\Big)\overline{K}_1 + \alpha_{R_2+1}\overline{K}_2 + \ldots + \alpha_{R_2+R_1-1} K_{R_1} = 0,$$

так как $\overline{K}_1, \ldots, \overline{K}_{R_1}$ линейно независимы, то

$$\sum_{i=1}^{R_2} \alpha_i = \alpha_{R_2+1} = \ldots = \alpha_{R_2+R_1-1} = 0. \qquad /4/$$

Применяя те же рассуждения к $\overline{\Gamma}_1, \ldots, \overline{\Gamma}_{R_2}$, получаем:

$$\alpha_1+\sum_{i=k_2+1}^{k_2+k_1-1}\alpha_i=\alpha_2=\ldots=\alpha_{k_1}=0\,.$$

Сравнивая /4/ и /5/, получаем $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_{k_1+k_2-1}=0$. Но мы предполагали, что $\exists\alpha_i\neq 0$. Т.е. система /3/ линейно независима. Покажем теперь, что все другие векторы каркасы G линейно выражаются через векторы из /3/. Во-первых

$$(\bar{K}_i,\bar{\Gamma}_j)=(\bar{K}_i,\bar{\Gamma}_1)+(\bar{K}_1,\bar{\Gamma}_j)-(\bar{K}_1,\bar{\Gamma}_1). \qquad /6/$$

Во-вторых: пусть $(\bar{K},\bar{\Gamma})$ - произвольный вектор-каркас в G, где $\bar{K}$ и $\bar{\Gamma}$ -вектор-каркасы в G_1 и G_2 соответственно, поэтому

$$\bar{K}=\sum_{i=1}^{k_1}\alpha_i\bar{K}_i\,,\quad \bar{\Gamma}=\sum_{j=1}^{k_2}\beta_j\bar{\Gamma}_j\,.$$

По лемме I имеем для любого $j=1,\ldots,k_2$

$$\sum_{i=1}^{k_1}\alpha_i(\bar{K}_i,\bar{\Gamma}_j)=(\sum_{i=1}^{k_1}\alpha_i\bar{K}_i,(\sum_{i=1}^{k_1}\alpha_i)\bar{\Gamma}_j)=(\bar{K},\bar{\Gamma}_j),$$

и далее

$$\sum_{j=1}^{k_2}\beta_j(\bar{K},\bar{\Gamma}_j)=((\sum_{j=1}^{k_2}\beta_j)\bar{K},\sum_{j=1}^{k_2}\beta_j\bar{\Gamma}_j)=(\bar{K},\bar{\Gamma})\,;$$

равенства /6/, /7/ и /8/ доказывают теорему I.

С л е д с т в и е. Если $B_1,\ldots,B_t$ - все блоки графа G, то

$$R(G)=\sum_{i=1}^{t}R(B_i)-t+1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По свойству блоков [3] мы в любом графе можем выделить такой блок B_i, что граф $G'=G\setminus B_i$ связен и имеет только одну общую вершину с B_i, тогда по теореме I

$$R(G)=R(B_i)+R(G')-1.$$

Далее, применяя принцип математической индукции, получаем требуемый результат. Заметим, что ранг ребра равен I. В [3] доказывается, что всякий блок есть либо ребро, либо максимальный 2-связный подграф. Исследуем теперь ранг вектор-каркасов 2-связных графов.

Л е м м а 2. Если G - 2-связный граф, не являющийся простым циклом, то существует такая цепь C, что при ее удалении /под удалением цепи C понимается удаление вершин C, кроме начальной и конечной, и всех ребер, смежных с ними; в случае, когда C -единственное ребро, удаляется ребро/ из G получается 2-связный граф.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем в G простой цикл минимальной длины H. Так как G не простой цикл, то существуют $x_1\in G$ и $x_1\notin H$ и смежная с некоторой $y_0\in H$. Так как G 2-связен, то [3] существует цепь C_1 между вершинами x_1 и y_0, не совпадающая с ребром (x_0,y_1) /рис. I/. Выберем первую вершину пересечения C_1 с

$H-y_1$. Ребро (y_0, x_1) и часть цепи C_1 между x_1 и y_1 обозначим C_1^*. Если $G \subset (H \cup C_1^*)$, то искомая C_1^*, если $(H \cup C_1^*) \subset G$, то рассматриваем вершину x_2, смежную с некоторой вершиной z_0 из $H \cup C_1^*$ и повторяем предыдущий процесс. Находим цепь C_2^* /рис. 2/. Опять, если $G \subset (H \cup C_1^* \cup C_2^*)$, то C_2^* искомая. В противном случае процесс повторяется. Так как G конечен, то найдется такая цепь C_k^*, что ее удаление не нарушает 2-связности. Этот процесс еще нельзя считать законченным, так как в $H \cup C_1^* \cup C_2^* \cup \ldots \cup C_k^*$ могли не войти все ребра G, но тогда любое из них удовлетворяет лемме.

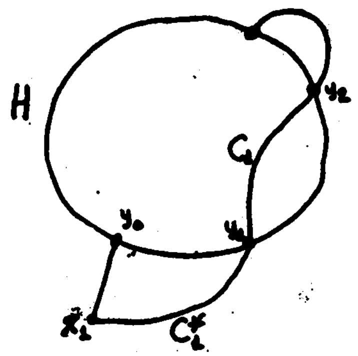

Рис. I.

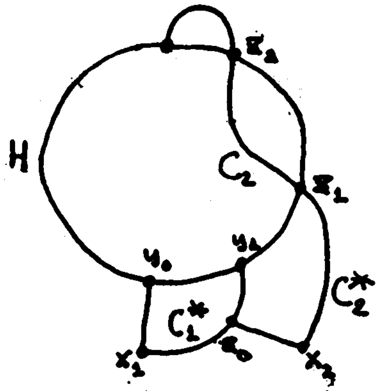

Рис. 2.

Если таких ребер нет, то нас удовлетворит и C_k^*.

Теорема 2. Если G - 2-связный граф, то $R(G)=m(G)$.

Доказательство. Рассмотрим 2 случая, воспользовавшись леммой 2:

1/ В G существует ребро, удаление которого не нарушает 2-связности.

2/ Удаление из G любого ребра нарушает 2-связность, но тогда по лемме 2 существует цепь C_0, удаление которой из G не нарушает 2 связности. Заметим, что в этом случае по свойству последней навешиваемой цепи C_k^* в лемме 2 степени всех вершин этой цепи, кроме концевых, будут равны двум в G.

Доказательство будем вести индукцией по числу простых циклов в G. Если G -простой цикл, то базис вектор-каркасов будет такой:

$$\bar{K}_1 = (0, 1, \ldots, 1),$$
$$\bar{K}_2 = (1, 0, \ldots, 1),$$
$$\cdots\cdots$$
$$\bar{K}_{m(G)} = (1, 1, \ldots, 0).$$

Пусть наше утверждение верно для графов, у которых число простых циклов не превосходит ℓ. Докажем для случая графов с $\ell+1$ простым циклом. По лемме 2 существует цепь C_0, удаление которой не нарушает

2-связности, при этом число простых циклов в графе $G' = G \setminus C_0$ будет меньше $l + 1$, и для него верно индукционное предположение, т.е. $R(G') = m(G')$.

Рассмотрим I случай, когда C_0 -ребро. Так как $R(G) \leq m(G)$, то $R(G) \leq m(G) = m(G') + 1 = R(G') + 1$.

Но, с другой стороны, если $\bar{K}_1, \ldots, \bar{K}_{m(G')}$ базис вектор-каркасов G', то они являются каркасами и для G. Рассмотрев теперь произвольный каркас K_0 в G, содержащий C_0, получим систему линейно независимых вектор-каркасов $\bar{K}_0, \bar{K}_1, \ldots, \bar{K}_{m(G')}$, т.е. $R(G) \geq R(G') + 1$, значит, $R(G) = R(G') + 1 = m(G') + 1 = m(G)$.

Случай 2. Пусть в C_0 есть t ребер $(t > 1)$, $G' = G \setminus C_0$. По индукционному предположению

$$R(G') = m(G'),\ m' = m(G') = m(G) - t = m - t,$$

и в G вектор-каркасы $\bar{K}_1, \ldots, \bar{K}_m$ линейно независимы. Пронумеруем в C_0 ребра числами от $m'+1$ до m и рассмотрим в R^t следующие векторы:

$$\bar{C}_1 = (0, 1, \ldots, 1),$$
$$\bar{C}_2 = (1, 0, \ldots, 1),$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\bar{C}_t = (1, 1, \ldots, 0),$$
$$\bar{C}^* = (1, 1, \ldots, 1).$$

Очевидно, $\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_t$ линейно независимы и

$$\bar{C}^* = \frac{1}{t-1}\bar{C}_1 + \ldots + \frac{1}{t-1}\bar{C}_t\ . \qquad /9/$$

Очевидно, что векторам из R^m $(\bar{K}_i, \bar{C}_j)\ (i = 1, \ldots, m',\ j = 1, \ldots, t)$ соответствуют каркасы в G, т.е. это вектор-каркасы G. Аналогично теореме I доказывается линейная независимость вектор-каркасов

$$(\bar{K}_1, \bar{C}_1),$$
$$(\bar{K}_1, \bar{C}_2),$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$(\bar{K}_1, \bar{C}_t),$$
$$(\bar{K}_2, \bar{C}_1),$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$(\bar{K}_m, \bar{C}_1),$$

всего их $m - 1$.

Рассмотрим каркас K_1 в G'. Так как K_1 связен, то существует цепь C_1 в G', состоящая только из ребер K_1 между конечными вершинами x и y цепи C_0 /рис.3/. Удалив из K ребро d, инцидентное y и принадлежащее цепи C_1, и присоединив цепь C_0 к оставшейся части /обозначим ее K_1^*/, получим каркас в G. Соответствующий вектор-каркас будет $(\bar{K}_1^*, \bar{C}^*)$. Покажем, что вектор-каркас $(\bar{K}_1^*, \bar{C}^*)$ не выражается линейно через систему /10/. Пусть это не так. Тогда существуют α_i $(i = 1, \ldots, m-1)$, не все равные нулю, такие, что:

$$(\bar{K}_1^*, \bar{C}^*) = \alpha_1(\bar{K}_1, \bar{C}_1) + \ldots + \alpha_t(\bar{K}_1, \bar{C}_t) + \alpha_{t+1}(\bar{K}_2, \bar{C}_1) + \ldots + \alpha_{m-1}(\bar{K}_m, \bar{C}_1) \qquad /11/$$

или по компонентам:

$$\Big(\sum_{i=t+1}^{m-1} \alpha_i + \alpha_1\Big)\bar{C}_1 + \alpha_2 \bar{C}_2 + \ldots + \alpha_t \bar{C}_t = C^*;$$

по равенству /9/ имеем

$$\Big(\sum_{i=t+1}^{m-1} \alpha_i + \alpha_1\Big) = \alpha_2 = \ldots = \alpha_t = \frac{1}{t-1}, \qquad /12/$$

и еще

$$\Big(\sum_{i=1}^{t} \alpha_i\Big)\bar{K}_1 + \alpha_{t+1}\bar{K}_2 + \ldots + \alpha_{m-1}\bar{K}_{m'} = K_1^*. \qquad /13/$$

Пусть

$$\bar{K}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{im}) \quad (i = 1, \ldots, m'),$$
$$K_1^* = (b_1, \ldots, b_{m'}), \qquad /14/$$

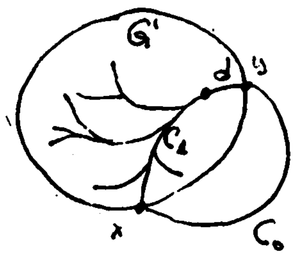

Рис. 3.

притом

$$\sum_{j=1}^{m} G_{ij} = n(G') - 1$$

и по свойству $\bar{K}_1^*$

$$\sum_{j=1}^{m'} b_j = n(G') - 2. \qquad /15/$$

Из /13/ и /14/ получаем:

$$b_1 = \Big(\sum_{i=1}^{t} \alpha_i\Big) a_{11} + \ldots + \alpha_{m-1} a_{m'1}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad /16/$$
$$b_{m'} = \Big(\sum_{i=1}^{t} \alpha_i\Big) a_{1m'} + \ldots + \alpha_{m-1} a_{m'm'}$$

Складывая левые и правые части в /16/ и учитывая /15/, получаем

$$n(G')-2=\left[n(G')-1\right]\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i ,$$

или, учитывая /12/,

$$n(G')-2=\left[n(G')-1\right]\frac{t}{t-1} .$$

Получено противоречие, так как $\frac{t}{t-1}>1$, значит, вектор-каркасы:

$$\begin{array}{c}(\bar K_1,\bar C_1),\\ \dots\\ (\bar K_1,\bar C_t),\\ (\bar K_2,\bar C_2),\\ \dots\\ (\bar K_{m'},\bar C_1),\\ (\bar K_1^*,\bar C^*)\end{array}$$

линейно независимы. Следовательно, $R(G)\geqslant R(G')+t$, но $R(G')=m(G')$ и $m(G')=m(G)-t$. Отсюда $R(G)\geqslant m(G)$, но $R(G)\leqslant m(G)$, поэтому $R(G)=m(G)$.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Если в G k -максимальных 2-связных подграфов и S разделяющих ребер, то

$$R(G)=m(G)-k-S+1.$$

Доказательство. Пусть $B_1,\dots,B_\ell$ - все блоки G. Пусть $B_1,\dots,B_k$ - блоки, которые являются максимальными 2-связными подграфами, а $B_{k+1},\dots,B_\ell$ - блоки, которые являются ребрами. Т.е. $k+S=\ell$.

Тогда по следствию из теоремы I имеем:

$$R(G)=\sum_{i=1}^{\ell}R(G_i)-\ell+1=\sum_{i=1}^{k}R(B_i)+\sum_{j=k+1}^{\ell}R(B_j)-\ell+1,$$

но

$$R(B_j)=1=m(B_j)\quad (j=k+1,\dots,\ell),$$

по теореме 2 $R(B_i)=m(B_i)\quad (i=1,\dots,k)$

и

$$m(G)=\sum_{i=1}^{k}m(B_i)+\sum_{j=k+1}^{\ell}m(B_j),$$

тогда

$$R(G)=\sum_{i=1}^{k}m(B_i)+\sum_{j=k+1}^{\ell}m(B_j)-\ell+1=m(G)-k-S+1.$$

Теорема доказана.

Заметим, что в доказательствах теорем 1 и 2 фактически изложен алгоритм нахождения базиса вектор-каркасов. Причем он, вообще гово-

ря, не совпадает с выписыванием всех вектор-каркасов и обычным поиском их базиса. Но мы здесь не останавливаемся на описании алгоритма.

Авторы благодарны Л.С.Мельникову, С.И.Спиваку и В.И.Тимошенко за активное участие в постановке задачи и обсуждении результатов.

Поступила в редакцию 12.4.1971 г.

Литература

1. М.В.Клибанов, М.Г.Слинько, С.И.Спивак, В.И.Тимошенко. Применение теории графов к построению механизма и кинематических уравнений сложной химической реакции. "Управляемые системы" 1970, № 7, стр. 64-69.

2. М.И.Темкин. Теория стационарных реакций, сб. "Научные основы подбора и производства катализаторов", Новосибирск, РИО СО АН СССР, 1964. стр. 46.

3. А.А.Зыков. Теория конечных графов, т.I, "Наука", Сибирское отделение, Новосибирск, 1969.