Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 9.
УДК.519.3.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

М.С.Никольский /Москва/

1. В n -мерном евклидовом пространстве R^n рассматривается нелинейная дифференциальная игра

$$\dot{z} = f(z, u, v), \qquad /1/$$

где $z \in R^n$, $f(z, u, v)$-n-мерная вектор-функция, $u \in R^p$, $v \in R^q$. Векторы u, v являются управлениями, принадлежащими соответственно игрокам U, V, на них наложены геометрические ограничения: $u \in P$, $v \in Q$, где P, Q - компакты из R^p, R^q.

В R^n задано терминальное множество M, которое предполагается замкнутым. Игра начинается из положения $z(0)=z_0 \bar{\in} M$ и считается законченной в тот момент t_1, когда впервые $z(t_1) \in M$. Цель игрока U - по возможности быстрее вывести точку $z(t)$ на M. Цель игрока V - по возможности оттянуть выход точки $z(t)$ на M. Мы будем рассматривать игру /1/ отдельно с точки зрения игрока U и с точки зрения игрока V. При первом подходе предполагается, что игрок U в каждый момент t знает $z(s)$ при $0 \le s \le t$ и $v(t)$, а игрок V - $z(s)$, $u(s)$ при $s < t$ /игрок V дискриминируется/. При втором подходе предполагается, что игрок V в каждый момент t знает $z(s)$ при $0 \le s \le t$ и $u(t)$, а игрок U - $z(s), v(s)$ при $s < t$ /игрок U дискриминируется/.

Функция $f(z, u, v)$ предполагается непрерывной по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемой по всем координатам z_i на $R^n \times P \times Q$ и удовлетворяющей следующему неравенству:

$$|f(z, u, v)| \le k_1(|z|+1), \qquad /2/$$

где k_1 - константа. Условимся и впредь буквой k с индексом обозначать константы. Из этого предположения следует, что при произвольных измеримых управлениях $u(t)$, $v(t)$ существует единственное решение уравнения /1/ с начальным условием $z(0)=z_0$ в классе абсолютно непрерывных функций на отрезке любой протяженности.

Говорят, что игра /1/ может быть закончена за конечное время из положения z_0, если при любом измеримом управлении $v(t)$ игрок U, дискриминируя игрока V, может построить такое измеримое управление $u(t)$ /используя свою информацию/, что игра /1/ закончится не позже некоторого конечного момента $t(z_0)$.

Важнейшей задачей в теории дифференциальных игр является выделение тех точек z_0, из которых возможно окончание игры за конечное время. В этом направлении получены важные результаты /см. [1] - [8] и др./. Цель настоящей статьи - исследование одного класса нелинейных дифференциальных игр, в котором часть или даже все такие точки z_0 могут быть найдены при изучении некоторого управляемого процесса.

2. Пусть z - произвольный вектор из R^n. Рассмотрим множество $F(z) = \bigcap_{v \in Q} f(z, P, v)$.

В дальнейшем считается выполнимым

Предположение А. Множество $F(z)$ непусто и выпукло при всех z.

Это предположение является весьма ограничительным. Оно не выполняется, например, в контрольном примере задачи преследования Л.С.Понтрягина /см. [I] /. Приведем несколько примеров выполнения предположения А.

Пример I.

$$\dot{z} = Az + u - v,$$

где A - постоянная матрица размерности $n \times n$, $u \in P$, $v \in Q$, P, Q - компакты из R^n, причем P - выпуклое множество, и множество $\bigcap_{v \in Q} (P - v)$ непусто. Для исследования таких игр применимы методы работ [I] - [6], [8], [9].

Пример 2.

$$\dot{z} = A(z) + B(z)(u - v),$$

где $A(z)$ - n -мерная вектор-функция, $B(z)$ - матрица размерности $n \times m$, $u \in P$, $v \in Q$, P - выпуклый компакт из R^m, Q - компакт из R^m. Предполагается, что множество Q может быть перенесено трансляцией в множество P. Такие игры подробно изучены в работе [8].

Пример 3.

$$\dot{z} = A(z) + B(z)u + C(z)u,$$

где $A(z)$ - n -мерная вектор-функция, $B(z)$ - матрица размерности $p \times n$, $u \in P$, P - выпуклый компакт из R^p, $C(z)$ - матрица размерности $n \times q$, $v \in Q$, Q - компакт из R^q. Матрицы $B(z), C(z)$ и множества P, Q предполагаются такими, что $\bigcap_{v \in Q} (B(z)P + C(z)v)$ является непустым множеством при всех z.

Сопоставим игре /I/ управляемый процесс

$$\dot{z} = w, \quad z(0) = z_0, \qquad /3/$$

где $w \in F(z)$.

Лемма I. Множество $F(z)$ зависит от z полунепрерывно сверху относительно включения.

Доказательство леммы проводится от противного с использованием непрерывности функции $f(z, u, v)$ по совокупности переменных.

Уравнение /3/ можно рассматривать как уравнение в контингенциях:

$$\dot{z} \in F(z), \quad z(0) = z_0. \qquad /4/$$

Из доказанной леммы и оценки /2/ следует /см. [10] /, что на $[0,\infty)$ определено хотя бы одно решение уравнения в контингенциях /4/ / в классе абсолютно непрерывных функций/, т.е. существует такая абсолютно непрерывная функция $\hat{z}(t)$, $0\le t<+\infty$, что почти всюду $\dot{\hat{z}}(t)\in F(\hat{z}(t))$. Рассмотрим все решения уравнения /4/. В силу оценки /2/ они продолжимы /см. [10] / на полуось $[0,+\infty)$. Допустим, что хотя бы одно решение $\bar{z}(t)$ за конечное время попадает на множество M, т.е. $\bar{z}(t_1)\in M$ при некотором $t_1\geqslant 0$. Тогда, согласно теореме Филиппова /см. [11] /, для управляемого процесса /3/ с терминальным множеством M существует оптимальное по быстродействию измеримое управление $w^*(t)$ и соответствующая ему траектория $z^*(t)$ уравнения /3/ $(w^*(t)\in F(z^*(t)))$. Обозначим время оптимального быстродействия $\tau(z_0)$.

Т е о р е м а I. Из начального состояния z_0 игра /I/ может быть завершена за время $\le\tau(z_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(t)$ - произвольное допустимое управление, применяемое игроком V. Очевидно

$$w^*(t)\in f(z^*(t),\ P,\ v(t)).$$

Отсюда следует, что для любого фиксированного $t\geqslant 0$ для векторов $w^*(t)$, $v(t)$ существует хотя бы один вектор u такой, что $w^*(t)=f(z^*(t),u,v(t))$. Если таких векторов несколько, то условимся среди них выбирать с наименьшей первой координатой, если и там не будет единственности, то условимся среди полученных векторов выбирать с наименьшей второй координатой и т.д. Мы получим в результате этого процесса однозначно определенный вектор $\tilde{u}(t)$. Функция $\tilde{u}(t)$ является измеримой функцией. Этот факт можно доказать аналогично лемме работы [11]. Подставим измеримые функции $v(t)$, $\tilde{u}(t)$ в уравнение /I/. Из равенства почти всюду $\dot{z}^*(t)=f(z^*(t),\tilde{u}(t),v(t))$ и единственности решения уравнения /I/ в классе абсолютно непрерывных функций следует, что управлениям $\tilde{u}(t)$, $v(t)$ и условию $z(0)=z_0$ отвечает единственная траектория уравнения /I/ $z(t)=z^*(t)$, попадающая на M за время $\tau(z_0)$. Теорема доказана.

3. В этом пункте мы будем рассматривать игры /I/ следующего вида

$$\dot{z}=g(z,u)-h(z,v), \qquad /5/$$

для которых помимо вышеприведенных требований предполагается выполненным

П р е д п о л о ж е н и е Б. Для любого вектора $z\in R^n$ имеет место равенство

$$F(z)+h(z,Q)=g(z,P), \qquad /6/$$

причем множество $h(z,Q)$ выпукло.

Заметим, что из выпуклости множеств $F(z)$, $h(z,Q)$ следует выпуклость $g(z,P)$. Из равенства /6/ следует, что для любого вектора $g(z,u)$, где $z\in R^n$, $u\in P$, существуют такие векторы $y\in F(z)$,

$h \in h(z,Q)$, что

$$y + h = g(z,u). \qquad /7/$$

Очевидно, что для некоторых векторов $g(z,u)$ векторы y, h могут определяться неоднозначно. Рассмотрим совокупность всех векторов y, h $(y \in F(z), h \in h(z,Q))$, удовлетворяющих равенству /7/, такие векторы h образуют непустое множество $H(z,u)$, которое, очевидно, выпукло.

Л е м м а 2. Множество $H(z,u)$ зависит от z, u на $R^n \times P$ полунепрерывно сверху относительно включения.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы проводится от противного с использованием непрерывности функций $g(z,u)$, $h(z,v)$.

Рассмотрим уравнение в контингенциях

$$\dot z(t) \in g(z,u(t)) - H(z,u(t)), \qquad /8/$$
$$z(0) = z_0,$$

где $u(t)$ – произвольное допустимое управление, определенное при всех $t \geq 0$. Отметим ряд свойств множества $g(z,u(t)) - H(z,u(t))$:

1/ оно определено для каждого $z \in R^n$ и $t \geq 0$ и является непустым компактом в R^n при каждых z, t;

2/ при каждом $t \geq 0$ множество $g(z,u(t)) - H(z,u(t))$ полунепрерывно сверху относительно включения по z;

3/ для векторов $l \in g(z,u(t)) - H(z,u(t))$ справедлива оценка $|l| \leq k_1(|z|+1)$;

4/ при любых $z \in R^n$, $t \geq 0$ множество $g(z,u(t)) - H(z,u(t))$ выпукло;

5/ при всех $z \in R^n$, $t \geq 0$ $g(z,u(t)) - H(z,u(t)) \in F(z)$.

Л е м м а 3. Существует такая измеримая однозначная вектор-функция $m(z,t)$, определенная для всех $z \in R^n$, $t \geq 0$ что $m(z,t) \in g(z,u(t)) - H(z,u(t))$ при всех $z \in R^n$, $t \geq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим функцию $m(z,t)$ следующим образом. При данных z, $t \geq 0$ рассмотрим векторы $x \in g(z,u(t)) - H(z,u(t))$ и имеющие наименьшую первую координату, среди них выберем векторы, у которых наименьшая вторая координата и т. д. В результате этого процесса получаем однозначно определенный вектор, его мы обозначим $m(z,t)$. Обозначим через S_i $(i = 1,2,\ldots)$ n-мерный шар радиуса i с центром в начале координат. Положим $R_i = S_i \times [0,i]$ Для того чтобы доказать измеримость функции $m(z,t)$ на $R^n \times [0,+\infty]$ достаточно доказать измеримость функции $m(z,t)$ на R_i $(i=1,2,\ldots)$.

Рассмотрим функцию $m(z,t)$ на R_i. Используя C-свойство измеримых функций можно утверждать, что для любого малого $\varepsilon > 0$ найдется такое замкнутое множество $E \subset [0,i]$ меры $> i - \varepsilon$, что на множестве E скалярные функции $u_1(t), \ldots, u_p(t)$ непрерывны на E.

Для любого числа a множество N_a^j $(j=1,\ldots,n)$ тех точек $(z,t) \in S_i \times E$ для которых j-я координата вектора $m(z,t)$ удовлетворяет неравенству $m_j(z,t)\le a$,является замкнутым.Доказательство проводится от противного с использованием идей доказательства леммы Филиппова /см. [II] /.

Итак, функция $m(z,t)$ измерима на $S_i\times E$, а так как мера $E > i-\varepsilon$, где ε - сколь угодно малое число, то $m(z,t)$ измерима на R_i . Лемма доказана.

Используя свойства I/ - 4/, лемму 3 и теорему I из работы [I2] можно утверждать, что уравнение в контингенциях /8/ при начальном условии $z(0)=z_0$ имеет хотя бы одно решение $\hat{z}(t)$, определенное при всех $t\geq 0$, и что любое решение с этим начальным условием продолжимо на всю полуось $t\geq 0$.

З а м е ч а н и е. Из свойства 5/ следует, что любое решение уравнения в контингенциях /8/ является решением уравнения в контингенциях /3/.

Опишем теперь дискретную схему формирования управления игроком V , которая в некотором смысле аппроксимирует обобщенное управление $H(z,u(t))$. Впервые идея о возможности построения такой аппроксимации в несколько ином случае была развита Н.Н.Красовским и А.И.Субботиным /см., например, [9] /.

Рассмотрим отрезок $[0,T]$, где $T>0$. Рассмотрим его разбиение $\omega_i\ (i=1,\dots,\dots)$ с шагом $\Delta=\frac{T}{i}$, $i=1,\dots$.

Разбиению ω_i сопоставим абсолютно непрерывную функцию $z^i(t)$, определяемую следующим образом:

$$z^i(0)=z_0\ ,\ \dot z^i=g(z^i,u(t))-m(z_0,u(t)),\ 0\le t\le\Delta;$$

$$\dot z^i=g(z^i,u(t))-m(z(\Delta),u(t)),\ \Delta\le t\le 2\Delta;$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\dot z^i=g(z^i,u(t))-m(z[(i-1)\Delta],u(t)),\ (i-1)\Delta\le t\le i\Delta$$

Отметим, что функция $m(z(k\Delta),u(t))$ является измеримой на отрезке $k\Delta\le t\le(k+1)\Delta$, это можно доказать с помощью леммы Филиппова /см. [II] /.

Л е м м а 4. Для любого малого $\alpha>0$ равномерно по допустимым управлениям $u(\cdot)\ (0\le t\le T)$ можно подобрать столь большое целое число $i_0>0$, что при $i>i_0$ для $z^i(t),\ 0\le t\le T$, найдется такое решение $z(\cdot)(z(0)=z_0)$ уравнения /3/, что $|z^i(t)-z(t)|<\alpha$ при $0\le t\le T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Тогда найдется такое $\alpha_0>0$, такая последовательность допустимых управлений $u^{i_m}(t)$ и соответствующих им кривых $z^{i_m}(t)$ с шагом $\Delta=\frac{T}{i_m}$, где $i_m\to\infty$, что

$$\max_{0\le t\le T}|z^{i_m}(t)-z(t)|\geq\alpha_0>0, \qquad /9/$$

где $z(t)$ - любая траектория уравнения /3/.

Используя оценку /2/, можно показать, что существуют такие константы k_2, k_3, не зависящие от $u(\cdot)$ и номера i, что

$$|z^i(t)| \le k_2, \quad |z^i(t_1)-z^i(t_2)| \le k_3|t_1-t_2|, \quad i=1,\dots,$$

где t_1, t_2 - произвольные числа из $[0,T]$.

По теореме Арцела, переходя, если надо к подпоследовательности, можно утверждать, что последовательность функций $z^{i_m}(\cdot)$ сходится к некоторой непрерывной функции $\tilde{z}(\cdot)$ в смысле метрики банахова пространства $C[0,T]$. Нетрудно видеть, что $\tilde{z}(t)$ удовлетворяет условию Липшица с константой k_3 и поэтому является абсолютно непрерывной функцией. Отметим, что по построению

$$g(z^i(k\Delta),u^i(t)) - m(z^i(k\Delta),u^i(t)) \in F(z^i(k\Delta)),$$

где $k=0,\dots,i-1$, $i=1,\dots$. Нетрудно показать, что при достаточно малом $\Delta=\frac{T}{i}$ $g(z^i(t),u^i(t)) - m(z^i(k\Delta),u^i(t)) \in F(z^i(k\Delta))+S_\varepsilon$, где $k\Delta \le t \le (k+1)\Delta$, S_ε - n - мерный шар радиуса ε, величина ε не зависит от $u^i(\cdot)$, k и $\Delta=\frac{T}{i}$.

Используя идеи доказательства теоремы I из [II], можно показать, что $\dot{\tilde{z}}(t) \in F(\tilde{z}(t))$ при почти всех $t\in[0,T]$. Пришли к противоречию с /9/, лемма доказана.

Как уже отмечалось, функция $m(z(k\Delta),u(t))$ измерима на отрезке $k\Delta \le t \le (k+1)\Delta$. Покажем, что существует управление $V_\Delta(z(\cdot),u(t))$ /$z(\cdot)$ - функция $z(s)$ при $0\le s\le t$ /, которое является измеримым как функция t на $[0,T]$ и удовлетворяет условию $m(z(k\Delta)$, $m(z(k\Delta),u(t)) = h[z(k,\Delta),V_\Delta(z(\cdot),u(t))]$. Такое управление можно построить так. Рассмотрим совокупность векторов , удовлетворяющих равенству $m(z(k\Delta),u(t))=h(z(k,\Delta),v)$. Среди них выберем те, у которых первая координата наименьшая, среди них же, те у которых вторая координата наименьшая и т.д. В результате этого процесса получаем однозначно определенный вектор. Измеримость по t так построенного управления $V_\Delta(z(\cdot),u(t))$ следует из леммы Филиппова /см.[II] /.

Управление $V_\Delta(z(\cdot),u(t))$ можно использовать следующим образом.

Рассмотрим игру /5/ и соответствующий ей управляемый процесс /3/. Рассмотрим данное начальное состояние $z_0 \bar{\in} M$. Возможны два случая.

<u>I случай.</u> При всех $t \ge 0$ любая траектория уравнения /3/ с начальным условием $z(0)=z_0$ не имеет общих точек с M.

<u>2 случай.</u> Существует хотя бы одна траектория $\tilde{z}(t)$ уравнения /3/ с начальным условием $\tilde{z}(0)=z_0$ такая, что $\tilde{z}(t_1)\in M$, где $t_1 \ge 0$.

В первом случае при любом $T>0$ можно утверждать, что при любом допустимом поведении $u(t)$ игрока U игрок V может построить такое допустимое управление $v(z(\cdot),u(t))$ / $z(\cdot)$ - функция $z(s)$ при $0\le s\le t$ /, что при $0\le t\le T$ траектории уравнения /5/ с начальным условием $z(0)=z_0$ не попадут на M.

Во втором случае, как было показано выше, существует допустимая траектория уравнения /3/, осуществляющая оптимальное быстродействие $\tau(z_\bullet)$. При любом $0 \le T \le \tau(z_0)$ можно утверждать, что при любом допустимом поведении $u(t)$ игрока U игрок V может построить такое допустимое управление $v(z(\cdot), u(t))$ что при $0 \le t \le T$ траектории уравнения /5/ с начальным условием $z(0) = z_0$ не попадут на M.

Доказательство обоих утверждений проводится с использованием леммы 4, управления $v_\Delta(z(\cdot), u(t))$ при малых Δ и того факта, что /см. [10] / множество достижимости для объекта /3/ из начального состояния z_0 является полунепрерывным сверху относительно включения.

4. В этом пункте мы продолжим изучение игр вида /5/. Все предшествующие предположения относительно правой части уравнения /5/ считаются выполнимыми. Сделаем еще добавочное

Предположение В. Существует однозначная, непрерывная функция $v(z, u)$, определенная на $R^n \times P$ и удовлетворяющая там включению $v(z,u) \in H(z,u)$.

Пусть $T > 0$. Возьмем некоторое положительное $\delta < T$. Рассмотрим следующий способ построения управления $v(t)$ игроком V:

$$v(t) = \begin{cases} q & \text{при } 0 \le t \le \delta, \\ v(z(t), u(t-\delta)) & \text{при } \delta \le t \le T, \end{cases}$$

где q – произвольный фиксированный вектор из Q.

Из непрерывности функции $v(z, u)$ и оценки /2/ следует существование /единственности может и не быть/ решения уравнения /5/ с начальным условием $z(0) = z_0$ при любом допустимом управлении $u(t)$ на отрезке $[0, T]$. Из уравнения /5/ следует, что

$$z(t) = z_0 + \int_0^t g(z(s), u(s))ds - \int_0^t h(z(s), v(s))ds.$$

Из оценки /2/ следует, что существует такая константа k_4, что для любой траектории уравнения /5/, начинающейся из точки z_0, на отрезке $[0, T]$ имеет место неравенство

$$|z(t)| \le k_4, \quad 0 \le t \le T. \qquad /10/$$

Из непрерывности функций $g(z,u)$, $h(z,v)$ на $R^n \times P, R^n \times Q$ соответственно и оценки /10/ следует, что $|g(z(t), u(t), v(t)| \le k_5, 0 \le t \le T$. Из этого неравенства при $\delta \le t \le T$ легко следует, что

$$|z(t) - z(t-\delta)| \le k_5 \delta. \qquad /11/$$

Используя неравенство /11/, можно показать, что при $\delta \le t \le T$

$$\int_0^t h(z(s), v(s))ds = \int_0^t h[z(s), v(z(s), u(s))]ds + F_1(z(\cdot)), \qquad /12/$$

где для остаточного члена $F_1(z(\cdot))$ справедлива оценка $|F_1(z(\cdot))| \le k_6 \delta$.

Используя соотношение /12/ и лемму Гронуолла-Веллмана/см.[13] /, нетрудно показать, что среди решений уравнения

$$\dot{z} = g(z, u(t)) - h(z, v(z, u(t))),$$
$$z(0) = z_0$$

найдется такое решение $z^*(t)$, что равномерно по всевозможным допустимым управлениям $u(t)$ $(0 \le t \le T)$ будет выполняться неравенство $|z(t) - z^*(t)| \le k_7 \delta$. Заметим, что

$$g(z^*(t), u(t)) - h[z^*(t), v(z^*(t), u(t))] \in F(z^*(t))$$

при почти всех t из $[0, T]$, поэтому $z^*(t)$ является одной из траекторий уравнения /3/. Из сказанного следует, что в I случае /см. пункт 3/ дискриминируемый игрок V, используя знание $z(t)$ и $u(t-\delta)$, где δ -достаточно мало, с помощью управления $v(z(t), u(t-\delta))$ добивается того, что ни одна траектория уравнения /5/ с начальным условием $z(0) = z_0$ не попадает на M при $0 \le t \le T$, где T - любое число / δ может зависеть от T /. Во 2-м случае /см. пункт 3/, дискриминируемый игрок V, используя знание $z(\cdot)$ и $u(t-\delta)$, где δ - достаточно мало, с помощью управления $v(z(t), u(t-\delta))$ добивается того, что ни одна траектория уравнения /5/ с начальным условием $z(0) = z_0$ не попадает на M при $0 \le t \le T$, где $T < \tau(z_0)$ / δ может зависеть от T /.

Заметим, что из сказанного следует, что при выполнении предположений этого пункта время $\tau(z_0)$ является оптимальным временем /см. [14] /, а для тех точек z_0, для которых $\tau(z_0) = +\infty$, игрок U, даже дискриминируя игрока V, не может гарантировать в игре /5/ окончания игры за конечное время.

Сформулируем достаточные условия для выполнимости предположения В.

Заметим, что из равенства /6/ следует, что при каждом z несущая плоскость множества $h(z, Q)$ имеет размерность не большую, чем размерность несущей плоскости множества $g(z, P)$, и параллельна последней.

Л е м м а 5. Пусть выполнены все предыдущие предположения об игре /5/ и следующие условия:

1/ множества $g(z, P), h(z, Q)$ имеют размерность, независящую от z, и их несущие плоскости остаются параллельными некоторому фиксированному подпространству Π;

2/ множества $\pi g(z, P), \pi h(z, Q)$ являются строго выпуклыми при всех $z \in R^n$ с точки зрения подпространства Π, и через каждую граничную точку множества $\pi g(z, P)$ можно провести лишь одну опорную к нему гиперплоскость / с точки зрения Π /, здесь π - оператор ортогонального проектирования из R^n на Π;

3/ уравнение $h(z, v) = \ell$ имеет единственное решение $v = v(z, \ell) \in Q$, где $\ell \in h(z, Q)$. Тогда выполнено предположение В.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрения ведутся в подпространстве Π. Строгая выпуклость множества означает, что любая опорная гиперплоскость к этому множеству имеет с ним только одну общую точку. Возьмем некоторый ненулевой n -мерный вектор $a \in \Pi$ и проведем через точку $\pi g(z,u)$ прямую, коллинеарную вектору a. Эта прямая имеет две точки пересечения с границей множества $\pi g(z,P)$ /они могут слиться в одну/ и определяют два вектора $\pi g_1(z,u)$, $\pi g_2(z,u)$, принадлежащих границе множества $\pi g(z,P)$. Очевидно, что $\pi g(z,u)=\lambda_1(z,u)\pi g_1(z,u)+\lambda_2(z,u)\pi g_2(z,u)$, где $\lambda_i \geqslant 0$ и $\lambda_1+\lambda_2=1$. В случае, когда $\pi g_1(z,u)=\pi g_2(z,u)$, будем считать $\lambda_1=\frac{1}{2}$, $\lambda_2=\frac{1}{2}$. Обозначим через $\varphi_1(z,u)$, $\varphi_2(z,u)$ единичные векторы нормалей к опорным гиперплоскостям, построенным в точках $\pi g_1(z,u), \pi g_2(z,u)$, причем будем считать их направленными в полупространства, не содержащие $\pi g(z,P)$. В силу наложенных условий существует одна и только одна точка $l_i(z,u)(i=1,2)$, осуществляющая $\max\limits_{l\in\pi h(z,Q)}(l,\psi_i(z,u))$. Положим

$$l(z,u)=\lambda_1(z,u)\,l_1(z,u)+\lambda_2(z,u)\,l_2(z,u).$$

Очевидно, что $l(z,u)\in\pi h(z,Q)$. Функция $v(z,u)$, являющаяся решением уравнения $\pi h(z,v)=l(z,u)$ удовлетворяет условиям предположения В.

Поступила в редакцию 30.3.1971 г.

Л и т е р а т у р а

1. Л.С.Понтрягин, К теории дифференциальных игр, УМН, 1966, т. 21, вып. 4.

2. Е.Ф.Мищенко,Л.С.Понтрягин, Линейные дифференциальные игры. ДАН СССР,1967, т. 174, № 1.

3. Л.С.Понтрягин, О линейных дифференциальных играх I, ДАН СССР, 1967, т. 174, № 6.

4. Л.С.Понтрягин, О линейных дифференциальных играх II, ДАН СССР, 1967, т. 175, № 4.

5. Н.Н.Красовский, Игровые задачи о встрече движений, "Наука", М., 1970.

6. Б.Н.Пшеничный, Линейные дифференциальные игры, Авт. и телемех., 1968, № 1.

7. В.Н.Лагунов, Об условиях существования преследующего управления, "Дискретный анализ", Новосибирск, 1967, вып. 11.

8. М.С.Никольский, Об одном классе дифференциальных игр, сборник Теория оптимальных решений, Киев, 1968, вып. 2.

9. Н.Н.Красовский, А.И.Субботин, Дифференциальная игра наведе-

ния, ДУ, Минск 1970, №4.

10. Е.А.Барбашин, Ю.И.Алимов, К теории релейных дифференциальных уравнений, Известия высш.учеб.заведений, математика, 1962, № 1.

11. А.Ф.Филиппов, О некоторых вопросах теории оптимального регулирования, Вестник МГУ, сер. матем., мех.,физ.,астрон.,хим., 1959, № 2.

12. А.Ф.Филиппов, Дифференциальные уравнения с многозначной разрывной правой частью, ДАН СССР, 1963, т. 151, № 1.

13. В.П.Демидович, Лекции по математической теории устойчивости, "Наука", 1967.

14. П.Б.Гусятников, М.С.Никольский, Об оптимальности времени преследования, ДАН СССР, 1969, т. 184, № 3.