Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 9.

ИГРА ПРОСТОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ НА ПЛОСКОСТИ С ПРЕПЯТСТВИЕМ

О.А.Малафеев, Л.А.Петросян

В области $X = E^2 \setminus V(0,R)$, где E^2 - евклидова плоскость, $V(0,R)$ - открытый круг радиуса R с центром в точке O, рассматривается следующая дифференциальная игра на быстродействие. Динамика игроков P и E, участвующих в игре, задается следующими уравнениями: для P

$$\dot{x}_1 = a_1 ;$$
$$\dot{x}_2 = a_2 , \quad |a| = \lambda ;$$

для E

$$\dot{y}_1 = b_1 ,$$
$$\dot{y}_2 = b_2 , \quad |b| = 1, \ (\lambda > 1) .$$

Здесь t означает время, $x(t) = (x_1(t), x_2(t)), y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ суть фазовые состояния игроков P и соответсвенно E в момент $t \in [0,\infty)$ /на E^2 предполагается фиксированной прямоугольная система координат с центром в точке O, ось абсцисс которой мы будем обозначать индексом I, а ось ординат - индексом 2 /. Каждому игроку в момент времени $t \in [0,\infty)$ игры известна позиция $z(t) = (x(t), y(t))$ игры, динамика обоих игроков и терминальное множество

$$M_\ell = \{(x,y) \in X \times X \mid \rho(x,y) \leq \ell \}.$$

Здесь ℓ - фиксированное положительное число, называемое радиусом поимки, ρ - функция расстояния в X /см. 5 /, определяемая для всяких точек $x, y \in X$ следующим образом:

$$\rho(x,y) = \min_{\gamma \in S} \mathcal{L}(\gamma)$$

Здесь S - множество всех кусочно-гладких путей γ в X с неподвижными концами x, y.

Стратегией игрока $P(E)$ в игре является пара $u(\sigma_u, K_{\sigma_u})$ ($v = (\sigma_v, K_{\sigma_v})$), где σ_u (σ_v) - произвольное разбиение интервала $[0,\infty)$, не имеющее предельных точек, K_{σ_u} (K_{σ_v}) - отображение, ставящее в соответствие состоянию информации игрока $P(E)$ в момент $t_i \in \sigma_u$ ($t_j \in \sigma_v$) траекторию игрока $P(E)$ на интервале $[t_i, t_{i+1}]$ ($[t_j, t_{j+1}]$), исходящую из точки $x(t_i)$ ($y(t_j)$).

Функция выигрыша H_ℓ в каждой ситуации (u,v) определяется следующим образом.

$$H_\ell(u,v,z_0) = \min_t \{ t \mid \chi(u,v,z_0)(t_0) \in M_\ell \} .$$

Здесь $\chi(u,v,z_0)$ - траектория игры в ситуации (u,v) при начальной позиции $z_0 = (x_0, y_0)$. Игрок P, выбирая стратегию u, стремится минимизировать выигрыш, цель игрока E при выборе стратегии V противоположна. Определенную таким образом игру обозначим через $\Gamma(x_0, y_0)$.

Для решения игры $\Gamma(x_0, y_0)$ удобно разбить ее на несколько подыгр, в зависимости от расположения начальных позиций x_0, y_0 относительно круга $V(0,R)$. Опишем эти подыгры. Пусть r - точка пересечения прямой, проходящей через начальные позиции игроков с окружностью Аполлония /см. [4] //построенной для точек x_0, y_0 со значениями скоростей, равных соответсвенно $\lambda, 1$ /, такая что $\rho(x_0,r) > \rho(y_0, r)$. Подыгру игры $\Gamma(x_0, y_0)$ с такими начальными позициями игроков, что отрезок x_0, r имеет с кругом $\overline{V(0,R)}$ не более одной общей точки, обозначим через $\Gamma_1(x_0, y_0)$. Здесь $\overline{V(0,R)}$ - замыкание круга $V(0,R)$.

Если x_0, y_0 таковы, что отрезок $x_0 y_0$ не пересекает круг $V(0,R)$, а отрезок $x_0 r$ его пересекает, то подыгру из таких начальных позиций обозначим через $\Gamma_2(x_0, y_0)$.

Пусть теперь отрезок $x_0 y_0$ пересекает круг $\overline{V(0,R)}$ /то есть имеет с ним более одной общей точки/. Обозначим через τ_E касательную прямую к кругу $V(0,R)$, совпадающую на прямолинейном участке с путем γ_0, на котором достигается $\rho(x_0, y_0)$, и проходящую через точку y_0. Пусть начальные позиции игроков таковы, что при движении P вдоль пути γ_0 от x_0 к y_0 и далее вдоль τ_E и при движении E вдоль τ_E в том же направлении из точки y_0 с постоянными скоростями λ и соответственно I E не пересекает вращающуюся прямую $\mathcal{H}(t)$ / проходящую через точки $x(t)$ и 0 /. Игру из таких начальных позиций обозначим через $\Gamma_3(x_0, y_0)$.

Допустим теперь, что $y_0 \in \mathcal{H}(0)$ и существует такое $\varepsilon > 0$, что при указанных движениях игроков в некоторый достаточно близкий к $t = 0$ момент времени $t' > 0$ $y(t')$ совпадает с точкой $w(t') + \varepsilon \cdot e_{\tau_E}$. Здесь $w(t')$ - точка пересечения прямых $\mathcal{H}(t')$ и τ_E, e_{τ_E} - вектор единичной длины, направленный вдоль τ_E от y_0 с началом в точке $w(t')$. Игру из таких начальных позиций обозначим через $\Gamma_4(x_0, y_0)$.

Пусть теперь $y_0 \overline{\in} \mathcal{H}(0)$ и при указанных движениях игроков $y(t)$ в некоторый момент времени $t > 0$ совпадает с точкой $w(t) + \varepsilon e_{\tau_E}$ при некотором $\varepsilon > 0$. Игру из таких начальных позиций обозначим через $\Gamma_5(x_0, y_0)$.

Если начальные позиции игроков - точки x_0, y_0 таковы, что для них реализуется подыгра $\Gamma_i(x_0, y_0)$, то будем обозначать это следующим образом $z_0 = (x_0, y_0) \in Z(\Gamma_i(z))$

Замечание I. Пусть B - наиболее удаленная от x_0 и A - ближайшая к x_0 точки пересечения прямой $\mathcal{H}(0)$ с окружностью $\partial V(0,R)$ /в смысле метрики ρ, конечно/, $\mathcal{Z}_{x_0}$, $\mathcal{Z}'_{x_0}$ -

основания касательных τ_ρ, τ'_ρ к $V(0,R)$, проведенных через точку x_0. Тогда множество $P(x_0,0,t)$ достижимости игрока P из точки x_0 за время t выглядит следующим образом.

1. Если $\rho(x_0, A) \geqslant \lambda t$, то $P(x_0, 0, t)$ есть круг радиуса λt с центром в точке x_0.

2. Если $\rho(x_0, A) \leqslant \lambda t \leqslant \rho(x_0, \mathcal{L}_{x_0})$, то $P(x_0, 0, t)$ есть замкнутая область, ограниченная дугой QCQ' окружности радиуса λt с центром в точке x_0 и дугой окружности $\partial V(0,R)$ QAQ' /см. рис. I/.

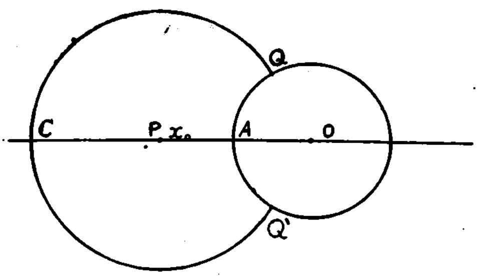

Рис. I.

3. Если $\rho(x_0, \mathcal{L}_{x_0}) < \lambda t < \rho(x_0, B)$, то $P(x_0, 0, t)$ есть замкнутая область, ограниченная дугой NCN' окружности радиуса λt с центром в точке x_0, двумя дугами $N'Q', NQ$ эвольвенты круга $V(0,R)$ зачерчиваемой нитью длины λt, закрепленной в точке x_0, и дугой QAQ' окружности $\partial V(0,R)$. Здесь N, N' - точки пересечения касательных τ_ρ, τ'_ρ соответсвенно с $\partial P(x_0, 0, t)$ /см. рис. 2/.

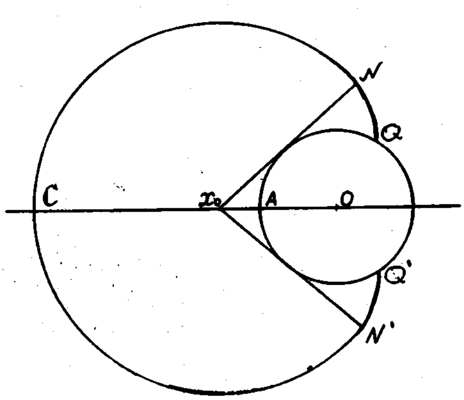

Рис. 2.

4. Если $\rho(x_0, B) \leqslant \lambda t$, то $P(x_0, 0, t)$ есть замкнутая область, ограниченная дугой NCN' окружности радиуса λt с центром в точке x_0 и двумя дугами NQ, NQ' эвольвенты круга

$V(O,R)$, зачерчиваемой нитью длины λt, закрепленной в точке x_0, и окружностью $\partial V(O,R)$ /см. рис. 3/.

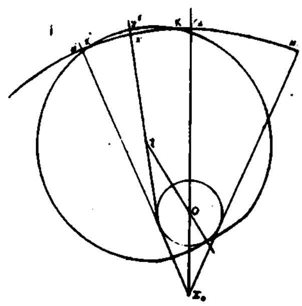

Рис. 3.

При условии, что

$$z(t)=(x(t),y(t))\in\bigcup_{i=1}^{3} Z(\Gamma_i(z))$$

к данной игре применима теория инвариантного центра преследования /см.[2]/. Рассмотрим, например, случай, когда $(x_0,y_0)\in Z(\Gamma_3(z))$. Пусть

$$T^* = \min_t \{t \mid E(y_0,0,t)\subset P(x_0,0,t)\}.$$

Допустим для определенности, что множества $P(x_0,0,T^*)$, $E(y_0,0,T^*)$ такие, как в пункте 4 замечания I /утверждение, аналогичное замечанию I, очевидно, справедливо также и для множества $E(y_0,0,t)$ /. Можно показать, что множество $M(T^*)$ точек $E(y_0,0,T^*)\subset P(x_0,0,T^*)$ состоит из одной точки - точки касания граничной окружности множества $E(y_0,0,T^*)$ и граничной эвольвенты множества $P(x_0,0,T^*)$. Тогда по непрерывности множеств $P(x_0,0,t)$, $E(y_0,0,t)$ по t в метрике Хаусдорфа и в силу выбора числа T^* найдется такое число $\delta>0$, что часть множества $E(y_0,0,T^*-\delta)$, не лежащая внутри множества $P(x_0,0,T^*-\delta)$, есть двуугольник KK', сторонами которого являются дуга граничной окружности множества $E(y_0,0,T^*-\delta)$ и дуга ветви граничной эвольвенты множества $P(x_0,0,T^*-\delta)$. Здесь под двуугольником понимается связная невыпуклая плоская фигура, ограниченная двумя гладкими выпуклыми кривыми, пересекающимися в двух точках /см. рис. 3/.

Найдем теперь точки, на которых достигается

$$\max_{y\in E(y_0,0,T^*-\delta)}\ \min_{x\in P(x_0,0,T^*-\delta)} \rho(x,y). \qquad /1/$$

Из рассмотрения семейства эвольвент круга $V(O,R)$ с закрепленной точкой x_0 и длиной "нити" - параметром эвольвенты следует, что величина /1/ достигается на точках x^δ и y^δ пересечения касательной прямой к кругу $V(O,R)$, проведенной через точку y_0, со сторонами двуугольника KK'. Причем точка x^δ такова, что $\rho(x^\delta, y_0) < \rho(y^\delta, y_0)$. Применяя элементарно - геометрические рассуждения, можно показать, что при перемещениях /одновременных/ игрока E вдоль отрезка $y_0 y^\delta$ и P вдоль кратчайшего пути от x_0 до x^δ

$$\max_{y\in E(y(t),t,T^*-\delta)} \; \min_{x\in P(x(t),t,T^*-\delta)} \rho(x,y) = \rho(x^\delta, y^\delta), \qquad /2/$$

а точки x^δ, y^δ, на которых достигается величина /2/, остаются инвариантными /см. рис. 3/.

Определим теперь игру с предписанной продолжительность $\Gamma(x_0,y_0,T)$, вспомогательную к игре $\Gamma(x_0,y_0)$. Эта игра отличается от игры $\Gamma(x_0,y_0)$ лишь функцией выигрыша, H_T, которая в каждой ситуации (u,v) определяется следующим образом:

$$H_T(u,v,z_0) = \rho(\chi(u,v,z_0)(T)).$$

Можно показать /см.,например, [1] /, что в игре $\Gamma_3(x_0,y_0,T^*-\delta)$ для всякого $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ существует ситуация ε -равновесия. Из приведенных выше рассуждений и из результатов статьи [2] следует, что в игре $\Gamma_3(x_0,y_0,T^*-\delta)$ при всяком $\delta > 0$ существует инвариантный центр преследования - точка y^δ, ε - оптимальная стратегия $\bar{u}_\varepsilon$ игрока P предписывает ему в моменты времени $t_i \in \sigma_{u_\varepsilon}$ выбирать отрезки кратчайшего пути, соединяющего точку $x(t_i)$ с точкой $y^\delta(t_i)$ длины $\lambda(t_{i+1}-t_i)$, а ε -оптимальная стратегия $\bar{v}_\varepsilon$ игрока E предписывает ему в моменты времени $t_j \in \sigma_{v_\varepsilon}$ выбирать отрезки кратчайшего пути, соединяющего точку $y(t_j)$ с точкой $y^\delta(t_j)$ длины $t_{j+1}-t_j$. Вернемся теперь к игре $\Gamma_3(x_0,y_0)$. Зададимся числом $\varepsilon > 0$, и пусть $\bar{u}_{\varepsilon/2}$ - $\varepsilon/2$ -оптимальная стратегия P в игре $\Gamma(x_0,y_0,T^*-\varepsilon/2)$. Определим стратегию u_ε в игре $\Gamma(x_0,y_0)$ следующим образом.

$$u_\varepsilon = \begin{cases} \bar{u}_{\varepsilon/2} & \text{при } t\in[0,T^*-\varepsilon/2), \\ u_c & \text{при } t\in[T^*-\varepsilon/2, T^*]. \end{cases}$$

Здесь u_c - стратегия, предписывающая игроку P находиться в момент T^* в точке $x(T^*-\varepsilon/2)$. Нетрудно видеть, что для всякой стратегии V игрока E выполняется неравенство

$$\rho(\chi(u_\varepsilon, v)(T^*)) < \varepsilon.$$

Следовательно, стратегия u_ε гарантирует игроку P ε - поимку за время T^*. Пусть стратегия v_ε предписывает игроку E двигаться вдоль отрезка $y_0 M(T^*)$ со скоростью 1 независимо от действий игрока P . Из предшествующих рассмотрений следует, что V_ε гарантирует игроку E в любой момент времени $t<T^*-\varepsilon$ отсутствие δ -поимки для всякого $\delta<\varepsilon/(\lambda-1)$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а I. Для всякого $\varepsilon>0$ пара $(U_\varepsilon, V_\varepsilon)$ образует ситуацию ε -равновесия в игре $\Gamma_3(x_0,y_0)$. При этом

$$Val(\Gamma_3(x_0,y_0))=\rho(x_0,y_0)/(\lambda-1),\ \rho(y_0,M(T^*))=\rho(x_0,y_0)/(\lambda-1). \qquad /3/$$

З а м е ч а н и е 2. Подыгры $\Gamma_1(x_0,y_0)$ и $\Gamma_2(x_0,y_0)$ рассматриваются аналогично подыгре $\Gamma_3(x_0,y_0)$. В игре $\Gamma_1(x_0,y_0)$ точка $M(T^*)$ лежит на прямой, соединяющей начальные позиции игроков - точки x_0 и y_0 . При этом

$$Val(\Gamma_1(x_0,y_0))=\rho(y_0,\ M(T^*))=\rho(x_0,y_0)/(\lambda-1).$$

Пусть теперь в подыгре $\Gamma_2(x_0,y_0)$ $\mathcal{L}x_0$ и $\mathcal{L}y_0$ суть основания касательных прямых к кругу $V(0,R)$, проведенных через точки x_0 и соответсвенно y_0 /при этом предполагается, что рассматриваются такие касательные, что $\rho(\mathcal{L}x_0,\mathcal{L}y_0)$ минимально/. Тогда точка $M(T^*)$ есть либо точка пересечения постоенной выше окружности Аполлония с $\partial V(0,R)$ - границей круга $V(0,R)$, наиболее удаленная от x_0, либо лежит на дуге $\mathcal{L}y_0\mathcal{L}x_0$ окружности $\partial V(0,R)$, либо лежит на луче касательной к кругу $V(0,R)$, проведенной через точку x_0 в сторону от основания /точки $\mathcal{L}x_0$ /, противоположную от точки x_0 . В последнем случае

$$Val(\Gamma_2(x_0,y_0))=\frac{1}{u}\left[(1+\frac{v}{u})\rho(x_0,\mathcal{L}x_0)-\rho(y_0,\mathcal{L}x_0)\right],$$

$$\rho(\mathcal{L}x_0,M(T^*))=\frac{v}{u}\rho(x_0,\mathcal{L}x_0)-\rho(y_0,\mathcal{L}x_0).$$

Перейдем теперь к рассмотрению подыгр $\Gamma_4(x_0,y_0)$, $\Gamma_5(x_0,y_0)$.

З а м е ч а н и е 3. Из /3/ следует, что функция $Val(\Gamma_3(x_0,y_0))$ является строго монотонной функцией от $\rho(x_0,y_0)$. Следовательно, игры $\Gamma_4(x_0,y_0)$ и $\Gamma_5(x_0,y_0)$ можно рассматривать как игры на выживание с функцией выигрыша $Val(\Gamma_3(x_0,y_0))$, определенной на множестве $Z(\Gamma_3(z))$, так что в играх $\Gamma_4(x_0,y_0)$ и $\Gamma_5(x_0,y_0)$ игрок P стремится к моменту времени $\tilde{t}(u,v)=\min_t\{t/\chi(u,v)(t)\in Z(\Gamma_3(z))\}$ минимизировать величину $\rho(x(\tilde{t}),y(\tilde{t}))$, а игрок E стремится ее максимизировать.

Допустим, не умаляя общности, что точка x_0 лежит на положительной полуоси первой координатной прямой, а точка y_0 - в замыкании внутренности угла $0x_0\mathcal{L}x_0$ /все время предполагается, конечно, что точки x_0,y_0 лежат в области X /. В зависимости от выбора точки y_0 и t могут представиться следующие два случая.

I. Точка K пересечения касательной τ_ε к кругу $V(0,R)$, проведенной через точку y_0 , и к кривой $\partial E(y_0,0,t)$, наиболее удаленная от точки x_0 /лежит в той же полуплоскости относительно прямой $\mathcal{H}(0)$, что и точка y_0 /. Напомним еще раз, что здесь всюду, кроме особо оговариваемых случаев, расстояния понимаются в смысле метрики ρ /

2. Точка K и точка y_0 лежит в разных полуплоскостях относительно прямой $\mathcal{H}(0)$.

Из рассмотрения семейств эвольвент круга $V(0,R)$ с закрепленными точками X_0 и соответственно y_0 вытекают утверждения приводимых ниже лемм I и соответсвенно 2.

Л е м м а I. В случае I

$$\max_{y\in E(y_0,0,t)} \rho(x_0,y)=\rho(x_0,K),$$

в случае 2.

$$\max_{y\in E(y_0,0,t)} \rho(x_0,y)=\rho(x_0,K_1).$$

Здесь K_1 - точка пересечения прямой $\mathcal{H}(0)$ и $\partial E(y_0,0,t)$ наиболее удаленная от точки x_0.

Л е м м а 2.

$$\min_{x\in P(x_0,0,t)} \rho(y_0,x)=\rho(y_0,Q)$$

Здесь Q -точка пересечения прямой $x_0\mathcal{X}x_0$ и $\partial P(x_0,0,t)$, ближайшая к y_0.

Т е о р е м а 2 а. Пусть $z_0=(x_0,y_0)\in Z(\Gamma_4(z))\cup Z(\Gamma_5(z))$. Тогда существует ε -оптимальная стратегия ω_ε игрока P в игре $\Gamma_4(z_0)(\Gamma_5(z_0))$, которая на интервале $[0,\tilde{t}(u_\varepsilon,V)]$ при всякой стратегии V игрока E предписывает игроку P в моменты времени $t_i\in\sigma_{u_\varepsilon}$ выбирать отрезки пути γ_i, на котором реализуется $\rho(x(t_i), y(t_i))$, исходящие из точек $x(t_i)$ длины $\lambda\cdot(t_{i+1}-t_i)$.

б. Пусть $z_0\in Z(\Gamma_4(z))$. Тогда для всякого $\varepsilon>0$ существует ε -оптимальная стратегия V_ε игрока E, которая предписывает игроку E на интервале $[0,\tilde{t}(u,V_\varepsilon)]$ в моменты времени $t_j\in\sigma_{V_\varepsilon}$ выбирать отрезки прямой, соединяющей точку $y(t_j)$ с точкой $K_1(t_j)$ пересечения прямой $\mathcal{H}(t_j)$ и $\partial E(y(t_j),t_j,t_{j+1})$ наиболее удаленной от $x(t_j)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первая часть утверждения теоремы вытекает из замечания 3 и леммы 2, вторая часть леммы следует из замечания 3 и леммы I.

Функция значения игры $\Gamma_4(x_0,y_0)$ находится путем выполнения ряда нетрудных вычислений.

$$Val(\Gamma_4(x_0,y_0))=\lim_{\varepsilon\to 0}\{\tilde{t}(u_\varepsilon,v_\varepsilon)+[x_1(0)+\lambda\tilde{t}^2(\cdot)+\sqrt{K(\tilde{t}^2(\cdot))-R^2}+$$
$$+R(\pi-\mathrm{arctg}[(x_1(0)-\lambda\tilde{t}^2(\cdot))/R]-\arccos[R/K(\tilde{t}^2(\cdot)]]\,/(\lambda-1)\}..$$

Здесь

$$K(t)=\sqrt{y_1^2(0)+y_2^2(0)}+\int_0^t\sqrt{1-g^2(\tau)}\,d\tau,$$

где g является решением интегрального уравнения

$$g(\hat{t}(\cdot)-\omega(\hat{t}(\cdot)))\int_0^{\hat{t}(\cdot)}\sqrt{1-g^2(\tau)}\,d\tau=\sqrt{y_1^2(0)+y_2^2(0)}\cdot\omega(\hat{t}(\cdot)).$$

Здесь $\omega(t)$ - угловая скорость вращения прямой $\mathcal{H}(t)$ вокруг точки O при движении игрока P вдоль пути, на котором реализуется $\rho(x_0, y_0)$ от точки x_0 до точки $\mathcal{L}x_0$.

Л е м м а 3. При фиксированном x_0 функция $Val(\Gamma_4(x_0, y_0))$ монотонно зависит от $\rho(x_0, y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\bar{\rho}(x, y)$ евклидово расстояние между точками x, y плоскости E^2. Допустим, что точка x_0 лежит на положительной полупрямой оси абсцисс, и обозначим через N точку пересечения положительной полупрямой оси ординат и окружности $\partial V(0, R)$. Так как точка x_0 фиксирована, то положим $\rho(x_0, N)=C$ и введем для краткости следующее обозначение: $\bar{\rho}(0, y)=\bar{y}$. При условии, что точка y лежит на прямой $\mathcal{H}(0)$, справедливо следующее соотношение

$$\rho(x_0, y_0)=C+\arcsin\frac{R}{y}+\sqrt{\bar{y}^2-R^2}.$$

Не умаляя общности, положим $R=1$. Тогда получаем, что

$$d\rho(x_0, y)/d\bar{y}=(\bar{y}^2-1)/\sqrt{\bar{y}^2-1}>0. \qquad /4/$$

Следовательно, при возрастании $\bar{\rho}(0, y)$ $\rho(x_0, y)$ тоже возрастает. Справедливо также и обратное утверждение. Рассмотрим на прямой $\mathcal{H}(0)$ две такие начальные позиции игрока E y', y'' в игре $\Gamma_4(x_0, y_0)$, что $\rho(0, y')>\rho(0, y'')$. Из /4/ следует, что $\rho(x_0, y')>\rho(x_0, y'')$. Покажем, что в этом случае $Val(\Gamma_4(x_0, y'))>Val(\Gamma_4(x_0, y''))$.

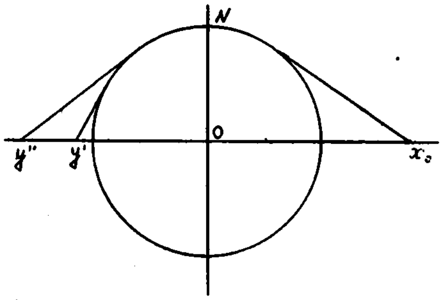

Рис. 4.

Пользуясь известной формулой зависимости между угловой и линейной скоростями, находим, что $\omega(t)=\lambda R/[R^2+(\rho(x_0,\mathcal{X}_0)-\lambda t)^2]$. Так как $d\omega(t)/dt>0$ при $0<t<\rho(x_0,\mathcal{X}_{x_0})/\lambda$, то на этом интервале $\omega(t)$ монотонно возрастает. Условимся обозначать траекторию игрока E в игре $\Gamma_4(x_0,y'')$ в ситуации $(u_\varepsilon,v_\varepsilon)[\varepsilon\to 0]$ через $y''(t)$, а траекторию E в игре $\Gamma_4(x_0,y')$ в ситуации $(u_\varepsilon,v_\varepsilon)$ $[\varepsilon\to 0]$ через $y'(t)$. Положим по определению

$$\hat t(y')=\min_t\{t\,/(x(t),y'(t))\in Z(\Gamma_3(z))\}. \qquad /6/$$

Тогда при всяком $t>0$, таком что $t\le\hat t(y'),\ t\le\hat t(y'')$, , $\bar\rho(0,y'(t))>\bar\rho(0,y''(t))$.

Действительно, допустим, напротив, что при некотором $t=t_*$ $y'(t_*)=y''(t_*)$

Тогда при всяком $t<t_*$ $b_\tau(y''(t))=b_\tau(y'(t))$,

$$b_n(y''(t))=b_n(y'(t))$$

и, следовательно,

$$\int_0^{t_*}b_n(y''(t))dt=\int_0^{t_*}b_n(y'(t))dt,$$

откуда получаем, что $y''=y'$. А это противоречит сделанному допущению о том, что $\bar\rho(0,y'')<\bar\rho(0,y')$. Из /5/, /6/ следует, что в момент времени $\hat t(y')$

$$(x(\hat t(y')),\ y''(\hat t(y'))\bar\in Z(\Gamma_3(z)). \qquad /7/$$

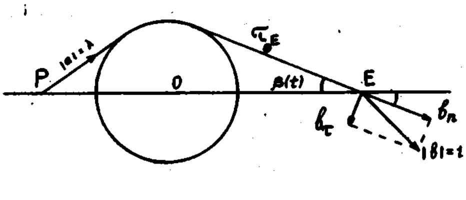

Рис. 5.

В то же время по определению $\hat t(y')$

$$(x(\hat t(y')),\ y'(\hat t(y')))\in Z(\Gamma_3(z)). \qquad /8/$$

Иначе говоря, время достижения игроком E множества $Z(\Gamma_3(z))$ вдоль траектории $y''(t)$ меньше времени достижения игроком E этого множества вдоль траектории $y''(t)$. Вспомним выражение для функции значения игры $\Gamma_4(x_0,y_0)$.

$$Val(\Gamma_4(x_0,y_0))=\lim_{\varepsilon\to 0}\{\tilde t(u_\varepsilon,v_\varepsilon)+\rho(x(\tilde t),y(\tilde t))/(\lambda-1)\}. \qquad /9/$$

Из /7/, /8/ и из монотонной зависимости функции $\rho(x_0, y)$ от функции $\bar{\rho}(x_0, y)$ по y при фиксированном x_0 следует, что

$$\rho(x(\hat{t}(y')), y'(\hat{t}(y'))) > \rho(x(\hat{t}(y')), y''(\hat{t}(y'))). \qquad /10/$$

В силу монотонности функции $\omega(t)$ из /9/ и /10/ вытекает неравенство

$$Val(\Gamma_4(x_0, y'')) < Val(\Gamma_4(x_0, y')).$$

Пусть $z_0 \in Z(\Gamma_5(z))$ и $\tau_\alpha(y_0)$ - прямая, проходящая через точку y_0 и составляющая угол $\alpha > 0$ с касательной τ_E к кругу $V(0, R)$. /Угол $\alpha \in [0, \pi]$ отсчитывается от прямой τ_E в направлении против часовой стрелки/. Пусть далее $\tau_{\alpha_*}(y_0)$ - такая прямая, что для всех $\alpha > \alpha_*$ при движении игрока P вдоль касательной к кругу $V(0, R)$, указанной в определении подыгры $\Gamma_5(x_0, y_0)$, игрок E, двигаясь вдоль прямой $\tau_\alpha(y_0)$, не догоняет вращающуюся прямую $\mathcal{H}(t)$, а при движении вдоль $\tau_{\alpha_*}(y_0)$, догоняет ее. /Это означает, что найдется такое $t > 0$, что $y(t) \in \mathcal{H}(t)$ при указанных движениях игроков/.

Т е о р е м а 3. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует ε-оптимальная стратегия v_ε игрока E в игре $\Gamma_5(x_0, y_0)$, которая на интервале $[0, \bar{t}(u, v_\varepsilon)]$ в моменты времени $t_j \in \sigma_{v_\varepsilon}$ предписывает игроку E выбирать отрезки прямых $\tau_{\alpha_*}(y(t_j))$ длины $t_{j+1} - t_j$. Здесь

$$\bar{t}(u, v_\varepsilon) = \min_t \{t \mid \chi(u, v_\varepsilon)(t) \bar{\in} Z(\Gamma_5(z))\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы следует из леммы 3.

З а м е ч а н и е 4. Рассмотрим функцию $f(\alpha, t) = f_\alpha(t)$, значение которой в точке (α, t) равно расстоянию между точкой $y(t)$ /при фиксированном движении игрока E вдоль прямой $\tau_\alpha(y_0)$/ и точкой $W_\alpha(t)$ пересечения прямой $\mathcal{H}(t)$ с прямой $\tau_\alpha(y_0)$, если $\rho(y_0, y(t)) \leq \rho(y_0, W_\alpha(t))$, и величине, равной этому расстоянию с противоположным знаком, если $\rho(y_0, y(t)) > \rho(y_0, W_\alpha(t))$. Предполагается, что игрок P движется вдоль кратчайшего пути, соединяющего x_0 и y_0. Можно убедиться в том, что эта функция непрерывна по α и по t и при фиксированном α имеет единственный минимум по t. Введем в рассмотрение функцию

$$f_1(\alpha) = \min_t f(\alpha, t).$$

Функция f_1 непрерывна, и существует единственная точка α_0, в которой

$$\min_t f(\alpha_0, t) = 0.$$

Понятно, что α_0 совпадает с точкой α_*.

Зафиксируем теперь прямую $\tau_\alpha(y_0)$ и определим функцию $g(\varphi, t)$, положив

$$g(q,t)=\begin{cases}\rho(y(t),w_\alpha(t)), & \text{если } \rho(y_0,y(t))\leq\rho(y_0,w_\alpha(t))\\ -\rho(y(t),w_\alpha(t)), & \text{если } \rho(y_0,y(t))>\rho(y_0,w_\alpha(t)).\end{cases}$$

Здесь q - начальная позиция игрока E на этой прямой. Используя рассуждения, подобные приведенным выше при рассмотрении функции $f(\alpha,t)$, нетрудно проверить, что существует единственная точка q^*, в которой справедливо равенство

$$\min_t g(q^*,t)=0$$

Заметим, что условие $z_0\in Z(\Gamma_5(z))$ означает, что игрок E догонает движущуюся вдоль τ_E точку пересечения вращающейся прямой $\mathcal{H}(t)$ и касательной τ_E при указанных в определении подыгры $\Gamma_5(x_0,y_0)$ движениях игроков в такой момент времени $t^*>0$, что выполняется следующее неравенство:

$$\sin\beta(t^*)>\omega(t^*)\sqrt{y_1^2(0)+y_2^2(0)}\ .$$

Здесь $\beta(t)$ - острый угол между прямой $\mathcal{H}(t)$ и касательной к кругу $V(0,R)$, проведенной через точку $y(t)$.

Таким образом из приведенных в этом замечании рассуждений следует, что при фиксированных y_0 и α на прямой $\tau_\alpha(y_0)$ существует единственная точка q, при движении из которой по прямой $\tau_\alpha(y_0)$ игрок E попадает на прямую $\mathcal{H}(t)$ в такой момент времени t_0, что

$$\sin\beta(t^0)=\omega(t^0)\sqrt{y_1^2(t^0)+y_2^2(t^0)}\ . \qquad /II/$$

Нетрудно видеть также, что двигаться далее по касательной к кругу $V(0,R)$, не пересекая прямую $\mathcal{H}(t)$, игрок E может лишь в том случае, если он и ранее перемещался по этой самой касательной.

Действительно, зафиксируем прямую $\tau_\alpha(y_0)$. Для того чтобы, двигаясь по ней, игрок E смог бы попасть на вращающуюся прямую $\mathcal{H}(t)$, α должно быть выбрано таким, чтобы в момент времени t' попадания точки $y(t)$ на прямую $\mathcal{H}(t)$ выполнялось неравенство

$$|b|\geqslant h(t').$$

Здесь $h(t)$ - скорость перемещения точки пересечения прямой $\mathcal{H}(t)$ и $\tau_\alpha(y_0)$ вдоль прямой $\tau_\alpha(y_0)$. В том случае, если касательная прямая к кругу $V(0,R)$, проведенная через точку $y(t')$, не совпадает с прямой $\tau_\alpha(y_0)$, игрок E, не меняя направления своего движения, обязательно обгонит прямую $\mathcal{H}(t)$.

З а м е ч а н и е. В работе [3] были приведены без доказательства оптимальные стратегии игроков в данной игре, однако случай, соответсвующий подыгре $\Gamma_5(x_0,y_0)$, когда равенство /II/ не выполняется, был упущен из рассмотрения.

Поступила в редакцию I7.6.I97I г.

Л и т е р а т у р а

I. О.А.Малафеев, Л.А.Петросян. О дискретной аппроксимации динамических игр преследования, "Управляемые системы",Новосибирск, "Наука", I970, вып. 6.

2. Л.А.Петросян. Об одном инварианте в дифференциальных играх преследования, "Вестник ЛГУ", I968, № I, вып. 6.

3. J.Isbell. Pursuit around a hole, Naval Res.Logist.Quart., 1967,14,N 4.

4. Р.Айзекс. Дифференциальные игры. М., "Мир", I967.

5. Р.Д.Бишоп, Д.Криттенден. Геометрия многообразий М., "Мир", I967.