Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 9.
УДК.519.95.

МЕТОД ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ И НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Ю.М.Волин, Г.М.Островский

Общеизвестно применение метода штрафных функций для построения алгоритмов численного решения экстремальных задач. В данной работе показывается, что этот метод позволяет сформулировать новый подход к получению необходимых условий оптимальности без использования теорем отделимости для выпуклых множеств.

1. Задача нелинейного программирования

Требуется найти

$$\varphi_0(X) = max \qquad /1.1/$$

при ограничениях:

$$\varphi_\ell(x) = 0, \ \ell = 1,\dots,p, \qquad /1.2/$$

$$g_k(x) \geq 0, \ k = 1,\dots,q, \qquad /1.3/$$

$X^T = (x_1,\dots,x_n)$. Функции φ_ℓ, g_k непрерывно дифференцируемы, ограничены сверху. Соотношения /1.2/, /1.3/ определяют замкнутое множество G допустимых значений X. Пусть X^* – решение задачи /1.1/ – /1.3/. Очевидно, что X^* есть также решение задачи /1.2/ – /1.4/:

$$\varphi_0'(x) = \varphi_0(x) - \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^*)^2 = max. \qquad /1.4/$$

Пусть далее

$$\varphi_0^* = \max_{(1.2),(1.3)} \varphi_0(x), \quad \varphi_0'^* = \max_{(1.2),(1.3)} \varphi_0'(x), \qquad /1.5/$$

где $\max\limits_{(1.2),(1.3)} \varphi_0(x)$ означает, что максимум $\varphi_0(x)$ определяется при условии выполнения /1.2/, /1.3/. Аналогичный смысл имеют остальные обозначения этого типа. Составим функционал штрафов:

$$F_\alpha' = \varphi_0' - \frac{\alpha}{2}\Big(\sum_{\ell=1}^{p} \varphi_\ell^2 + \sum_{k=1}^{q} \tilde{g}_k^2\Big), \alpha \geq 0, \qquad /1.6/$$

$$\tilde{g}_k = \begin{cases} g_k, & g_k < 0, \\ 0, & g_k \geq 0. \end{cases} \qquad /1.7/$$

$$F_\alpha'^* = max\, F_\alpha(x). \qquad /1.8/$$

Пусть X_α^* доставляет максимум F_α' (X_α^* существует при всех

$\alpha \geqslant 0$ в силу ограниченности φ_o сверху, и, легко видеть, $x_\alpha^* \in M$, где M - ограниченное множество.

Л е м м а I.

$$F_\alpha'^* \to \varphi_o'^* = \varphi_o^* \quad (\alpha \to \infty). \qquad /I.9/$$

В самом деле, $F_{\alpha_1}'^* \geqslant F_{\alpha_2}'^*$, $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$. Очевидно также: $F_\alpha'^* \geqslant \varphi_o'^*$. Следовательно, $F_\alpha'^* \to A \geqslant \varphi_o'^*$, $\alpha \to \infty$. В силу ограниченности M, существует $\alpha_r \to \infty$ такая, что $x_{\alpha_r}^* \to \widetilde{x}$. $\widetilde{x} \in G$, так как в противном случае, как легко видеть, $F_{\alpha_r}'^* \to -\infty$, что невозможно, так как $F_\alpha'(x^*) = \varphi_o^*$ для всех α. Имеем $F_{\alpha_r}'^* \to A$ и $F_{\alpha_r}'^* \leqslant \varphi_o'(x_{\alpha_r}^*)$. Следовательно, $A \leqslant \varphi_o'(\widetilde{x}) \leqslant \varphi_o'^*$. Итак, $A = \varphi_o'^*$. Равенство $\varphi_o'^* = \varphi_o^*$ очевидно.

З а м е ч а н и е.I. Совершенно аналогично, как легко видеть, может быть доказано

$$F_\alpha^* \to \varphi_o^* \quad (\alpha \to \infty), \qquad /I.10/$$

где

$$F_\alpha = \varphi_o - \frac{\alpha}{2}\Big(\sum_{\ell=1}^{p} \varphi_\ell^2 + \sum_{k=1}^{q} \widetilde{g}_k^2\Big) \qquad /I.11/$$

Л е м м а 2.

$$x_\alpha^* \to x^* \quad (\alpha \to \infty). \qquad /I.12/$$

Пусть /I.12/ не выполняется. Тогда существуют ε и $\alpha_r \to \infty$: $\|x^* - x_{\alpha_r}^*\|^2 \geqslant \varepsilon$ для всех r. При этом $F_{\alpha_r}'^* \leqslant F_{\alpha_r}^* - \varepsilon$, в силу чего одновременное выполнение /I.9/, /I.10/ невозможно, что доказывает справедливость леммы.

Из оптимальности x_α^* с учетом /I.7/ следует:

$$\frac{\partial F_\alpha'}{\partial x_i}(x_\alpha^*) = \Big(\frac{\partial \varphi_o}{\partial x_i} - \sum_{\ell=1}^{p} \alpha \varphi_\ell \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{q} \alpha \widetilde{g}_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i}\Big)\Big/_{x_\alpha^*} = 0, \qquad /I.13/$$
$$i = 1, \dots, r$$

Обозначим

$$\lambda_o^\alpha = 1/R_\alpha,\ \lambda_\ell^\alpha = -\alpha \varphi_\ell(x_\alpha^*)/R_\alpha,\ \mu_k^\alpha = -\alpha \widetilde{g}_k(x_\alpha^*)/R_\alpha, \qquad /I.14/$$
$$\ell = 1, \dots, p;\ k = 1, \dots, q.$$

$$R_\alpha = \sqrt{1 + \alpha^2\Big(\sum_{\ell=1}^{p} \varphi_\ell^2(x_\alpha^*) + \sum_{k=1}^{q} \widetilde{g}_k^2(x_\alpha^*)\Big)} \geqslant 1. \qquad /I.15/$$

Имеем

$$\Big(\lambda_o^\alpha \frac{\partial \varphi_o'}{\partial x_i} + \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_\ell^\alpha \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{q} \mu_k^\alpha \frac{\partial g_k}{\partial x_i}\Big)\Big/_{x_\alpha^*} = 0, \qquad /I.16/$$
$$i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{\ell=0}^{p} |\lambda_\ell^\alpha|^2 + \sum_{k=1}^{q} (\mu_k^\alpha)^2 = 1, \qquad /I.17/$$

$$\lambda_0^\alpha \geqslant 0, \ \mu_k^\alpha \geqslant 0, \ k=1,\dots,q. \qquad /I.18/$$

$(\lambda_0^\alpha,\dots,\lambda_p^\alpha,\mu_1^\alpha,\dots,\mu_q^\alpha)$ можно рассматривать так точку в пространстве E^{p+q+1}, принадлежащую единичной сфере. В силу компактности единичной сферы в E^{p+q+1} из известной теоремы анализа следует существование сходящейся последовательности $(\lambda_\ell^{\alpha_r}, \mu_k^{\alpha_r})$: $\lambda_\ell^{\alpha_r} \to \lambda_\ell$, $\mu_k^{\alpha_r} \to \mu_k$. С учетом /I.12/, /I.16/ - /I.18/:

$$\left(\sum_{\ell=0}^{p} \lambda_\ell \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{q} \mu_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i}\right)\Big/_{X^*} = 0, \ i=1,\dots,n, \qquad /I.19/$$

$$\sum_{\ell=0}^{p} \lambda_\ell^2 + \sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 = 1, \qquad /I.20/$$

$$\lambda_0 \geqslant 0, \ \mu_k \geqslant 0. \qquad /I.21/$$

Кроме того,

$$\mu_k^{\alpha_r} g_k(x_{\alpha_r}^*) = \alpha_r \tilde{g}_k(x_{\alpha_r}^*) g_k(x_{\alpha_r}^*)/R_{\alpha_r}.$$

Учитывая /I.7/, /I.12/, /I.15/, имеем

$$\mu_k g_k(x^*) = 0, \quad k=1,\dots,q. \qquad /I.22/$$

Условия /I.19/ - /I.22/ являются известной теоремой Куна-Таккера[I].

2. Задача оптимального управления

Требуется найти

$$I(u) = \varphi_0(x_T) = max \text{ где } (x_T = x(T)) \qquad /2.I/$$

при условиях

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u), \ 0 \leqslant t \leqslant T; \qquad /2.2/$$

/2.2/

$$x(0) = x_0, \qquad /2.3/$$

$u(t) \in U$, U ограничено и замкнуто; /2.4/

$$\varphi_\ell(x_T) = 0, \ \ell=1,\dots,p; \qquad /2.5/$$

$x^T = (x_1,\dots,x_n)$, $u^T = (u_1,\dots,u_m)$. Функции f_i, φ_ℓ непрерывно дифференцируемы, управления $u(t)$ измеримы. Кроме того, потребуем для f выполнения условий Липшица

$$\| f(x',u) - f(x'',u) \| \leqslant C \| x' - x'' \|. \qquad /2.6/$$

При выполнении /2.3/, /2.4/, /2.6/

$$x(t)\in X \quad , \quad X \text{ ограничено} \qquad /2.7/$$

Решение задачи /2.I/ - /2.5/ будем искать в классе так называемых обобщенных решений. $\{u^{(k)}\}$, $\{x^{(k)}\}$ обобщенно удовлетворяют системе условий /2.2/ - /2.5/, если для всех k $u^{(k)}$, $x^{(k)}$ удовлетворяют /2.2/ - /2.4/ и

$$\varphi_\ell(x_T^{(k)})\to 0 \quad (k\to\infty),\ \ell=1,\dots,p.$$

Для обобщенных решений по определению

$$I(\{u^{(k)}\})=\lim I(u^{(k)}),\quad k\to\infty.$$

Обозначим

$$I^*=\sup_{(2.2)-(2.5)} I(\{u^{(k)}\}), \qquad /2.8/$$

$\{u^{*(k)}\}$, $\{x^{*(k)}\}$ есть обобщенное решение задачи /2.I/ - /2.5/, если при этом обобщенно выполняются /2.2/ - /2.5/ и $I(\{u^{*(k)}\})=I^*$.

В отличие от обобщенных решений обычные решения будем называть классическими, или просто решениями. Для последних вводится величина

$$I^{**}=\sup_{(2.2)-(2.5)} I(u). \qquad /2.9/$$

Величина $I^*(I^{**})$ существует и конечна в силу /2.3/, /2.4/,/2.6/, если система условий /2.2/ - /2.5/ допускает хотя бы одно обобщенное /классическое/ решение.

Отметим определенную обоснованность обобщенной оптимальной задачи с физической точки зрения. При оптимизации какого-либо конкретного процесса функции φ_ℓ всегда известны с некоторой конечной ошибкой. Поэтому представляется естественным переход от требования точного выполнения условий /2.5/ к требованию их выполнения лишь с любой наперед заданной точностью. Более точный смысл обобщенной оптимальной задачи заключается в следующем. Пусть $I^{**}_{\tilde\varphi}$ есть I^{**}, если в ограничениях /2.5/ участвуют функции $\tilde\varphi_\ell$. Тогда, как легко видеть,

$$I^*=I^*_\varphi=\inf_{\varepsilon>0}\ \sup_{\|\tilde\varphi-\varphi\|\le\varepsilon} I^{**}_{\tilde\varphi}=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\ \sup_{\|\tilde\varphi-\varphi\|\le\varepsilon} I^{**}_{\tilde\varphi}, \qquad /2.10/$$

где $\|\tilde\varphi-\varphi\|\le\varepsilon$ означает, что для всех x $\|\tilde\varphi(x)-\varphi(x)\|\le\varepsilon$. Таким образом обобщенный супремум I^* есть предел наибольших значений классических супремумов I^{**} при величине возможной ошибки в определении φ , не превосходящей ε , когда $\varepsilon\to 0$.

Л е м м а 3. Обобщенное решение задачи /2.I/ - /2.5/ существует, если система условий /2.2/ - / 2.5/ допускает хотя бы одно

обобщенное решение.

Пусть $\varepsilon_r \to 0$ $(r \to \infty)$, $\varepsilon_r > 0$. Для всякого r, очевидно, существуют $\{u^{(k)}, r\}$, $\{x^{(k)}, r\}$, обобщенно выполняющие /2.2/ - /2.5/ и такие, что

$$I^* - \frac{\varepsilon_r}{2} \leq I(\{u^{(k)}, r\}) \leq I^*. \qquad /2.11/$$

В силу /2.11/ для всякого r найдется k_r :

$$I^* - \varepsilon_r \leq I(u^{(k_r)}, r) \leq I^* + \varepsilon_r, \qquad /2.12/$$

$$|\varphi_\ell(x_T^{(k_r)}, r)| \leq \varepsilon_r, \ \ell = 1, \ldots, p. \qquad /2.13/$$

Очевидно, что для последовательности $\{u^{(k_r)}, r\}$ обобщенно выполняются /2.2/ - /2.5/ и $I(\{u^{(k_r)}, r\}) = I^*$.

Выделим среди обобщенных решений класс стационарных обобщенных решений $\{u^{(k)} = u\}$, $\{x^{(k)} = x\}$. Условимся стационарные обобщенные решения обозначать через u, x, где u, x есть общий член стационарных обобщенных последовательностей. Очевидно, что при этом $I(u)$ не зависит от того, как понимать u - как классическое или как обобщенное решение. Здесь мы ограничимся получением с помощью метода штрафных функций необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума[2] для обобщенных стационарных решений. Иными словами, будут получены необходимые условия оптимальности для решения задачи /2.1/ - /2.5/, являющегося также решением и в обобщенном смысле.

Пусть u^*, x^* - обобщенное /естественно, одновременно и классическое/ решение задачи /2.1/ - /2.5/. Очевидно, что u^*, x^* есть также обобщенное решение задачи /2.2/ - /2.5/, /2.14/:

$$I_\beta(u) = I(u) - \beta \int_0^T \sum_{i=1}^{m} (u_i - u_i^*(t))^2 dt. \qquad /2.14/$$

Как следует из результатов работы[3], $v^*(t)$, $y^*(t)$:

$$v = (u^0, \ldots, u^{n+1}, \alpha^0, \ldots, \alpha^{n+1}); \qquad /2.15/$$

$$y^T = (y_0, \ldots, y_n) = (y_0, x^T); \qquad /2.16/$$

$$v^*(t) = (u^*(t), \ldots, u^*(t), \frac{1}{n+2}, \ldots, \frac{1}{n+2}) \qquad /2.17/$$

$$y^{*T}(t) = (0, x^{*T}(t))$$

есть при этом решение так называемой расщепленной задачи

$$\mathcal{J}_\beta(v) = \Phi_0(y_T) - \beta y_0(T) = max; \qquad /2.18/$$

$$f_0(u, t) = \|u - u^*(t)\|^2; \qquad /2.19/$$

$$\Phi_\ell(y) = \varphi_\ell(y_1, \dots, y_n), \quad \ell = 0, \dots, p; \tag{2.20}$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{s=0}^{n+1} \alpha^s f_i(y, u^s) = F_i(y, v), \quad 0 \le t \le T, \quad i = 0, \dots, n+1; \tag{2.21}$$

$$y^T(0) = (0, x_0^T); \tag{2.22}$$

$v(t) \in V$, V ограничено и замкнуто; /2.23/

$$V = \left\{ u^s, \alpha^s, s = 0, \dots, n+1 : u^s \in U, 0 \le \alpha^s \le 1, \sum_{s=0}^{n+1} \alpha^s = 1 \right\}, \tag{2.24}$$

$$\Phi_\ell(y_T) = 0, \quad \ell = 1, \dots, p. \tag{2.25}$$

Составим функционал штрафов:

$$\mathcal{J}_{\beta\alpha}(v) = \mathcal{J}_\beta(v) - \frac{\alpha}{2} \sum_{\ell=1}^{p} \Phi_\ell^2(y_T), \quad \alpha \ge 0. \tag{2.26}$$

Задача /2.21/ - /2.26/ имеет классическое решение при всех $\beta \ge 0, \alpha \ge 0$ в силу результатов работы [3] с учетом /2.6/, /2.22/, /2.23/ и легко проверяемого утверждения о том, что в расщепленной задаче расширенное множество достижимости $Q(t,y) = \{z : \exists v \in V, z = F(y, v, t)\}$ выпукло при всех $t, y, F^T = (F_0, \dots, F_n)$. Обозначим через $v_{\beta\alpha}^*$, $y_{\beta\alpha}^*$ решение задачи /2.21/ - /2.26/. В силу /2.26/, /2.22/, /2.23/

$y \in Y$, Y ограничено /2.27/

Из /2.23/, /2.27/ следует, что множество M всех функций $y_{\beta\alpha}^*$ $(\beta \ge 0, \alpha \ge 0)$ является равностепенно непрерывным и ограниченным. Обозначим

$$\mathcal{J}_{\beta\alpha}^{**} = \sup_{(2.21)-(2.23)} \mathcal{J}_{\beta\alpha}(v), \tag{2.28}$$

$$\mathcal{J}_\beta^* = \sup_{(2.21)-(2.25)} \mathcal{J}_\beta(v). \tag{2.29}$$

Л е м м а 4.

$$\mathcal{J}_{\beta\alpha}^{**} \to \mathcal{J}_\beta^{**} = \mathcal{J}^{**} = I^* \tag{2.30}$$

Доказательство леммы 4 аналогично доказательству леммы I. Надо только при этом учесть, что в данном случае ограниченность и равностепенная непрерывность M влечет существование $\{y_{\beta\alpha_r}^*\}$, равномерно сходящейся к предельной функции $\tilde{y}$, причем, в силу результатов работы [3], существует $\tilde{v}$ и $\tilde{v}, \tilde{y}$ удовлетворяют /2.21/ - /2.23/.

Пусть

$$M_{\beta\alpha\varepsilon} = \left\{ t \in [0,T] : \sum_{s=0}^{n+1} \alpha_{\beta\alpha}^{*s}(t) \| u_{\beta\alpha}^{*s}(t) - u^*(t) \|^2 \ge \varepsilon \right\}, \tag{2.31}$$

а $\mu_{\beta\alpha\varepsilon}$ - мера $M_{\beta\alpha\varepsilon}$.

Л е м м а 5. Для всех $\beta > 0$

$$\mu_{\beta\alpha\varepsilon} \to 0, \ \alpha \to \infty \quad \text{для всех } \varepsilon > 0. \qquad /2.32/$$

Пусть /2.32/ не выполняется. Тогда существуют $\varepsilon > 0, \delta > 0$ и $\alpha_r \to \infty$:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{n+1} \alpha^{*s}_{\beta\alpha_r}(t) \| u^{*s}_{\beta\alpha_r}(t) - u^*(t) \|^2 \geqslant \varepsilon \\ &\mu_{\beta\alpha_r\varepsilon} \geqslant \delta \qquad \text{для всех } r \end{aligned}\right\} \qquad /2.33/$$

При этом, очевидно, $J^{**}_{\beta\alpha_r} \leqslant J^{**}_{0\alpha_r} - \beta\varepsilon\delta$, в силу чего одновременное выполнение /2.30/ при $\beta = 0$ и $\beta > 0$ невозможно.

Для $v^*_{\beta\alpha}$, $y^*_{\beta\alpha}$ справедлив принцип максимума, который для задачи со свободным правым концом доказывается весьма просто /см., например, [4] /:

$$\tilde{H}(y^*_{\beta\alpha}(t), \tilde{\varphi}^*_{\beta\alpha}(t), v^*_{\beta\alpha}(t), t) \doteq \max_{v \in V} \tilde{H}(y^*_{\beta\alpha}(t), \tilde{\varphi}^*_{\beta\alpha}(t), v, t), \qquad /2.34/$$

где $\doteq$ означает, что равенство выполняется для почти всех $t \in [0, T]$,

$$\tilde{H}(y, \varphi, v, t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i F_i(y, v) + \varphi_0 \sum_{s=0}^{n+1} \alpha^s \| u^s - u^*(t) \|^2, \qquad /2.35/$$

$$\tilde{\varphi}^*_{0\beta\alpha}(t) \equiv -\beta ; \qquad /2.36/$$

$$\frac{d\tilde{\varphi}^*_{i\beta\alpha}}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} \tilde{\varphi}^*_{j\beta\alpha} \frac{\partial F_j}{\partial y_i}(y^*_{\beta\alpha}, v^*_{\beta\alpha}) \qquad /2.37/$$

$$\tilde{\varphi}^*_{i\beta\alpha}(T) = \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial y_i} - \alpha \sum_{\ell=1}^{p} \Phi_\ell \frac{\partial \Phi_\ell}{\partial y_i} \right) \Big|_{y^*_{\beta\alpha}(T)}, \ i = 1, \dots, n. \qquad /2.38/$$

Обозначим

$$\lambda_{0\beta\alpha} = 1 / R_{\beta\alpha}, \ \lambda_{\ell\beta\alpha} = -\Phi_\ell(y^*_{\beta\alpha}(T)) / R_{\beta\alpha}, \ \ell = 1, \dots, p, \qquad /2.39/$$

$$R_{\beta\alpha} = \sqrt{1 + \alpha^2 \sum_{\ell=1}^{p} \Phi_\ell^2 (y^*_{\beta\alpha}(T))} \geqslant 1 \qquad /2.40/$$

и перейдем к нормированным сопряженным функциям

$$\varphi^*_{\beta\alpha} = \tilde{\varphi}^*_{\beta\alpha} / R_{\beta\alpha}, \qquad /2.41/$$

$\varphi^*_{\beta\alpha}(t)$, очевидно, удовлетворяют уравнениям /2.37/ и краевым условиям

$$\varphi^*_{i\beta\alpha}(T) = \sum_{\ell=0}^{p} \lambda_{\ell\beta\alpha} \frac{\partial \Phi_\ell}{\partial y_i}(y^*_{\beta\alpha}(T)), \ i = 1, \dots, n, \qquad /2.42/$$

причем

$$\sum_{\ell=0}^{p} \lambda_{\ell\beta\alpha}^{2} = 1. \qquad /2.43/$$

Условие максимума /2.34/ при этом будет иметь место для

$$H_{\beta\alpha}(y,\varphi,v,t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i F_i(y,v) - \frac{\beta}{R_{\beta s}} \sum_{s=0}^{n+1} \alpha^s \| u^s - u^*(t) \|^2 . \qquad /2.44/$$

Учитывая /2.32/, /2.43/ выберем $\varepsilon_r \to 0 (\varepsilon_r > 0), \alpha_r \to \infty, \beta_r \to 0 (\beta_r > 0)$ такие, что

$$\lambda_{\ell\beta_r\alpha_r} \to \lambda_\ell, \quad \ell = 0,\dots,p, \qquad /2.45/$$

$$\mu_{\beta_r\alpha_r\varepsilon_r} \to 0, \qquad /2.46/$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon_r < \infty . \qquad /2.47/$$

Из /2.46/, /2.47/ вытекает, что $F_i(y, v^*_{\beta_r\alpha_r}(t), t)$ и $F_{iy}(y, v^*_{\beta_r\alpha_r}(t), t)$ сходятся почти всюду соответсвенно к

$F_i(y, v^*(t), t) = f_i(x, u^*(t))$ и $F_{iy}(y, v^*(t), t) = f_{ix}(x, u^*(t))$,

откуда легко следует:

$$y^*_{\beta_r\alpha_r} \rightrightarrows y^*, \qquad /2.48/$$

$$\varphi^*_{\beta_r\alpha_r} \rightrightarrows \varphi^*, \qquad /2.49/$$

причем для φ^*, как легко видеть, выполнено

$$\frac{d\varphi_i^*}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} \varphi_j^* \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x^*, u^*), \quad i = 1,\dots,n , \qquad /2.50/$$

$$\varphi_i^*(T) = \sum_{\ell=0}^{p} \lambda_\ell \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial x_i}(x^*(T)), \qquad /2.51/$$

$$\sum_{\ell=0}^{p} \lambda_\ell^2 = 1 , \qquad /2.52/$$

$$H(x^*(t), \varphi^*(t), u^*(t)) \doteq \max_{u \in U} H(x^*(t), \varphi^*(t), u), \qquad /2.53/$$

$$H(x,\varphi,u) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i f_i(x,u). \qquad /2.54/$$

Формулы /2.50/ - /2.53/ выражают принцип максимума для задачи оптимального управления /2.2/ - /2.5/, доказанный для решений $u^*(t)$, $x^*(t)$, являющихся оптимальными в обобщенном смысле.

Поступила в редакцию 28.4.1971 г.

Л и т е р а т у р а

I. H.W.Kuhn, A.W.Tucker. Proc.Second Berkeley Symp.on Math. Statistics and Probability, Berkeley and Los Angeles, University of California Press,1951,481-492.

2. Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1969.

3. И.Б.Вапнярский. Журнал вычислит.математ. и матем.физики, 1969, 7, № 2, 259.

4. А.А.Фельдбаум. Основы теории оптимальных автоматических систем, Изд-во "Наука", 1966.