Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 9.
УДК.519.3:62-50.

О ТОЧКАХ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ БИЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Н.П.Дементьев

§ 1. Основная экономическая модель

Рассмотрим многоотраслевую модель экономики с непрерывным временем

$$x_i(t)=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j(t)+\sum_{k=1}^{n}b_{ik}y_k(t)+\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\dot{x}_j(t)+\sum_{k=1}^{n}q_{ik}\dot{y}_k(t) \quad (1\leq i\leq S),$$

$$x_i(t)=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j(t)+\sum_{k=1}^{n}b_{ik}y_k(t). \qquad (S+1\leq i\leq n), \tag{1.1}$$

$$x(0)=x^0=(x_1^0,\dots,x_m^0)>0,$$

$$y(0)=y^0=(y_1^0,\dots,y_n^0)>0.$$

Рассматривается m отраслей I-го подразделения, производящих средства производства, и n отраслей П-го подразделения, продукция которых идет в потребление. Среди m отраслей I-го подразделения S $(S\leq m)$ отраслей являются фондообразующими, их продукция идет не только на простое воспроизводство, но и на расширение интенсивностей отраслей экономики.

Здесь $x_j(t)$ - интенсивность производства продукта j I-го подразделения;

$y_k(t)$ - интенсивность производства продукта k П-го подразделения;

a_{ij} - коэффициенты прямых затрат;

b_{ik} - коэффициенты прямых затрат продукции отрасли i на производство единицы продукции отрасли k ;

p_{ij}, q_{ik} - коэффициенты фондоемкостей.

Предполагается, что $a_{ij}, b_{ik}, p_{ij}, q_{ik}>0$ и матрица $A=\{a_{ij}\}_1^m$, продуктивна, т.е. найдется положительный вектор C , такой что $C>AC$.

Пусть также заданы некоторые состояния отраслей П-го подразделения $y_1^*,\dots,y_n^*$, причем $y_k^*>y_k$ $(k=1,\dots,n)$. Заметим, что число неизвестных функций в /1.1/ на n превышает число уравнений. Поэтому можно ввести, согласно экономическому смыслу, n уравнений, зависящих от n функций /управлений/. Предположим, что эти уравнения уже введены. Тогда нужно найти такие управления /кусоч-

но-непрерывные функции от времени/, при которых отрасли П-го подразделения достигали бы за минимальное время состояния $(y_1^*, \dots, y_n^*)$.

Рассматриваемая модель предложена И.А.Ицковичем и рассмотрена им в случае $m = s = n = 1$ в [2]. В этой заметке исследуется случай $s = 1$, m, n произвольны.

§ 2. Одна задача оптимального быстродействия

Рассмотрим в §§ 2,3 одну задачу оптимального быстродействия, к которой сводится случай $s = 1$, $m \geq 1$, $n \geq 1$. Имеем $n+1$ экономическую отрасль. Интенсивности производства в этих отраслях характеризуются переменными $(y_0, y_1, \dots, y_n) = y$. Развитие экономики задается системой уравнений

$$\dot{y}_i(t) = u_i(t) \cdot \left(-\sum_{j=0}^{n} b_j y_j(t)\right) \quad (i = 0, 1, \dots, n). \qquad /2.1/$$

Здесь $u(t) = (u_0(t), u_1(t), \dots, u_n(t))$ - кусочно-непрерывная вектор-функция, принимающая значения в

$$U = \left\{(u_0, u_1, \dots, u_n) \in R^{n+1} \mid u_i \geq 0, (i = 0, 1, \dots, n);\ \sum_{i=0}^{n} u_i = 1\right\}.$$

Будем предполагать, что $b_0 < b_1 < \dots < b_n$. Пусть $y(0) = y^0 = (y_0^0, \dots, y_n^0)$ и пусть заданы некоторые интенсивности производства $(y_1^*, \dots, y_n^*)$, причем

а/ $-\sum_{j=0}^{n} b_j y_j^0 = \Phi_0 > 0$,

б/ $y_i^* > y_i^0$, $(i = 1, 2, \dots, n)$

Тогда нужно подобрать такое управление $u(t)$, которое бы переводило экономику из состояния y^0 на прямую

$$M = \left\{(y_0, y_1^*, \dots, y_n^*) \in R^{n+1} \mid y_0 \in R^1\right\}.$$

Предположим, что эта задача оптимального быстродействия с подвижным равным концом оптимальное решение имеет.

Т е о р е м а I. Если $u(t)$ - оптимальное управление, то существуют числа $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \sigma_{n+1}$, такие что

α) $0 = \sigma_0 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_n < \sigma_{n+1}$, где σ_{n+1} - время оптимального процесса;

β) $$u_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [\sigma_i, \sigma_{i+1}); \\ 0, & \text{если } t \notin [\sigma_i, \sigma_{i+1}). \end{cases}$$

При доказательстве этой теоремы будет использоваться принцип максимума Понтрягина. Построим доказательство в виде цепочки лемм.

Л е м м а I. Для произвольных $u(t)$, $y(t)$, удовлетворяющих ограничениям задачи, функция

$$\Phi_u(t) = -\sum_{j=0}^{n} b_j y_j(t)$$

положительна на $[0, a)$, $a \le \infty$.

Действительно, умножая i -е уравнение /2.1/ на b_i и складывая левые и правые части, получаем

$$\dot{\Phi}_u(t) = -\sum_{j=0}^{n} u_j(t) b_j \Phi_u(t),$$

откуда

$$\Phi_u(t) \geqslant \Phi_0 e^{\lambda t} > 0 \ ; \quad \text{где } \lambda = \min_{u \in U} \left(-\sum_{j=0}^{n} u_j b_j\right) > -\infty .$$

Лемма 2. Гамильтониан

$$H(\psi, y, u) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i(t) u_i(t) \cdot \Phi_u(t) \equiv C > 0$$

при $t \in [0, \sigma_{n+1}]$. Здесь $u(t), y(t)$ соответствуют оптимальному процессу, а C - некоторая константа.

Доказательство. Предположим, что $H \equiv 0$ на $[0, \sigma_{n+1}]$. Условие принципа максимума в этом случае имеет вид

$$H = \sum_{i=0}^{n} \psi_i(t) u_i(t) \cdot \Phi_u(t) = \max_{v \in U} \left(\sum_{i=0}^{n} \psi_i(t) v_i\right) \cdot \Phi_u(t) . \qquad /Д/$$

Система уравнений для ψ может быть записана таким образом

$$\dot{\psi}_i(t) = \frac{b_i H}{\Phi_u(t)} \equiv 0 .$$

Стало быть, ψ - постоянен на $[0, \sigma_{n+1}]$. Заметим, что $\psi_0 = 0$ по условию трансверсальности. Выясним знак ψ_i $(i = 1, 2, \dots, n)$. Пусть для некоторого i $\psi_i < 0$. Из /Д/ следует, что $u_i(t) \equiv 0$, это противоречит условию $y_i^* > y_i^0$. С другой стороны,

$$0 = H = \max_i \psi_i \cdot \Phi_u(t) , \qquad /Д'/$$

откуда $\psi_i = 0$ $(i = 0, 1, \dots, n)$.

Между тем ψ не может тождественно обращаться в 0 на $[0, \sigma_{n+1}]$. Итак, $H > 0$.

Заметим, что $u(t)$ принимает значения на вершинах U . Действительно, в силу условия о строгой монотонности последовательности $\{b_i\}_{i=0}^{i=n}$ функция $\psi_\ell(t) - \psi_k(t) (\ell \ne k)$ является также строго монотонной, и, следовательно, на отрезке $[0, \sigma_{n+1}]$, исключая конечное число точек, достигается строгий максимум по i функции $\psi_i(t)$. Обозначим $L_i = \{ t \mid u_i(t) = 1 \}$.

Лемма 3. Пусть $\ell > k$, $t_\ell \in L_\ell$, $t_k \in L_k$. Тогда $t_\ell > t_k$

В самом деле, допустим, что $t_k > t_\ell$ Тогда $\psi_\ell(t_\ell) \geqslant \psi_k(t_\ell)$, $\psi_\ell(t_k) \le \psi_k(t_k)$, но так как $t_k > t_\ell$, то

$$\psi_k(t_k) - \psi_\ell(t_k) = \psi_k(t_\ell) - \psi_\ell(t_\ell) + \int_{t_\ell}^{t_k} (b_k - b_\ell) \frac{H}{\Phi_u(\tau)} d\tau < 0 .$$

Лемма доказана.

Из леммы непосредственно следует, что L_j связно $(j = 0, 1, \dots, n)$. Положим $\sigma_i = \inf_{t \in L_i} t$.

Теорема доказана.

Пусть $\bar{y} = (\bar{y}_0, y_1^*, \dots, y_n^*) \in M$ и $\bar{y}_0 \geq y_0^\circ$. Построим вспомогательное управление следующим образом. Сначала полагаем $u_0(t) = 1$ до тех пор, пока $y_0(t)$ не достигнет уровня $\bar{y}_0$. Если y_0 не может за конечное время достигнуть этого уровня, полагаем $u_0(t) = 1$, $t \geq 0$, т.е. управление в этом случае построено. Если же в σ_1 $y_0(\sigma_1) = \bar{y}_0$, то полагаем $u_1(t) = 1$ при $\sigma_1 < t \leq \sigma_2$, где σ_2 -такой момент времени, что $y_1(\sigma_2) = y_1^*$. Если такой точки σ_2 не найдется, полагаем $u_1(t) = 1$, $t > \sigma_2$.

При существовании σ_2 переходим к u_2 и т.д. Может произойти два случая, либо найдется $\sigma_{n+1} < \infty$, такое что $y_n(\sigma_{n+1}) = y_n^*$ и полученное управление за конечное время переводит экономику в $\bar{y}$, либо полученному управлению соответствует бесконечный процесс. В первом случае, очевидно,

$$Q_\kappa(\sigma_{n+1}) = \int_0^{\sigma_{n+1}} \Phi_u(\tau) d\tau = \sum_{i=0}^{n} \Delta_i = \Delta,$$

а во втором случае $Q_u(\sigma)$ строго возрастает и $\lim_{\sigma \to \infty} Q_u(\sigma) = \alpha \leq \Delta$.

Здесь $\Delta_0 = \bar{y}_0 - y_0^\circ$, $\Delta_i = y_i^* - y_i^\circ$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Назовем так сконструированное управление σ -управлением, соответсвующим точке $\bar{y}$.

§ 3. Один специальный случай задачи.

Предположим, что в рассмотренной в § 2 задаче $b_0 < 0$, $y^\circ > 0$, $b_i > 0$, $(i = 1, \dots, n)$. Обозначив $-b_0 = a > 0$, перепишем /2.I/ в виде

$$\dot{y}_i(t) = u_i(t)\Big(a y_0(t) - \sum_{j=1}^{n} b_j y_j(t)\Big), \qquad /3.I/$$
$$u(t) \in U, \quad y(0) = y^\circ > 0.$$

Пусть M^* - подмножество прямой M, каждой точки которого можно достигнуть за конечное время при соответствующем σ - управлении.

Л е м м а 4. Для того чтобы $\bar{y} \in M^*$, необходимо и достаточно, чтобы

а/ $a\bar{y}_0 - \sum_{j=1}^{n} b_j y_j^* > 0$

б/ $\bar{y}_0 \geq y_0^\circ$.

Здесь условие б/ очевидно, ввиду неубывания $y_0(t)$. Проверим а/, предполагая, что $\bar{y}_0 \geq y_0^\circ$. Необходимость следует из леммы I.

Достаточность. Пусть

$$a\bar{y}_0 - \sum_{j=1}^{n} b_j y_j^* > 0,$$

но соответствующее $\bar{y}$ σ - управление $u(t)$ не переводит за конечное время экономику в состояние $\bar{y}$. Это означает, что $Q_u(t) \to \alpha \leq \Delta$, $t \to \infty$, так как $Q_u'(t) > 0$, то $\inf_{t \in [0,\infty)} Q_u'(t) = \inf_{t \in [0,\infty)} f(a y_0(t)-$

$$-\sum_{j=1}^{n} b_j y_j(t)) = 0 .$$

Однако пока $u_0(t) = 1$ $Q'_u(t)$ увеличивается. Отсюда следует, что $\sigma_1 < \infty$ и $\inf\limits_{t\in[0,\sigma_1]} Q'_u(t) = \Phi_0 > 0$. При $t > \sigma_1$, очевидно,

$$\inf_{t\in[0,\infty)} Q'_u(t) > 0 ,$$

так как $y_j^* \geqslant y_j(t)$. Отсюда

$$\inf_{t\in[0,\infty)} Q'_u(t) > 0$$

Достаточность доказана.

Из положительности $\Phi_u(t)$ следует, что в качестве параметра, характеризующего σ -управление, соответствующее точке $\bar{y}$, можно брать не $\bar{y}_0$ а время σ_1. Положим

$$z = max(y_0^\circ, \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{n} b_j y_j^*) ,$$

и пусть σ_1^* - время, необходимое для перевода y_0 из y_0° в состояние z при управлении $u_0(t) = 1$. Тогда σ_1 задает σ - управление, переводящее экономику за конечное время на M, если

$$\text{а/}\quad \sigma_1 > \sigma_1^* \qquad \text{при} \quad z = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{n} b_j y_j^* ; \qquad \text{/3.2/}$$

$$\text{б/}\quad \sigma_1 \geqslant \sigma_1^* \qquad \text{при} \quad z \neq \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{n} b_j y_j^* .$$

Вычислим время процесса, соответствующего σ - управлению при заданном σ_1, удовлетворяющем /3.2/. Введем в систему уравнений /3.1/ $\Phi_u(t)$ вместо $y_0(t)$. В качестве первого уравнения преобразованной системы получим

$$\dot{\Phi}_u(t) = (a u_0(t) - \sum_{j=1}^{n} b_j u_j(t))\Phi_u(t)$$

Очевидно, что

$$\Phi_u(\sigma_1) = \Phi_0 e^{a\sigma_1} ; \quad \Phi_u(\sigma_i) = \Phi_u(\sigma_1) - \sum_{j=1}^{i-1} b_j \Delta_j ;$$
$$\Phi_u(\sigma_{i+1}) = \Phi_u(\sigma_i)\cdot e^{-b_i(\sigma_{i+1}-\sigma_i)}$$

Из этих соотношений найдем функцию $\sigma_{n+1}(\sigma_1)$ и ее производную

$$\sigma'_{n+1}(\sigma_1) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{-a\Delta_i \Phi_0 e^{a\sigma_1}}{(\Phi_0 e^{a\sigma_1} - \sum_{j=1}^{i-1} b_j\Delta_j)(\Phi_0 e^{a\sigma_1} - \sum_{j=1}^{i} b_j \Delta_j)} \qquad \text{/3.3/}$$

Можно непосредственно доказать, что $\sigma''_{n+1}(\sigma_1) > 0$, если $\sigma_1 > \sigma_1^*$. Отсюда следует тот факт, что если для некоторого $\sigma_1^\circ > \sigma_1^*$, $\sigma'_{n+1}(\sigma_1^\circ) > 0$, то для $\sigma_1 > \sigma_1^\circ$ $\sigma_{n+1}(\sigma_1) > \sigma_{n+1}(\sigma_1^\circ)$, и если $\sigma'_{n+1}(\sigma_1^\circ) < 0$, то найдется σ_1^1, такое что

1/ $\sigma'_{n+1}(\sigma_1^1) = 0$,

2/ $\sigma_{n+1}(\sigma_1) > \sigma_{n+1}(\sigma_1^1)$, $\sigma_1^1 \neq \sigma_1 > \sigma_1^*$.

Существование σ_1^1 следует из того, что $\lim\limits_{\sigma_1\to\infty} \sigma'_{n+1}(\sigma) = 1$. Из последних замечаний и из /3.2/ нетрудно найти σ_1, задающее оптимальное управление. Может представиться три случая

I. $Z = y_0^0 > \frac{1}{a}\sum\limits_{j=1}^{n} b_j y_j^*$ и $\sigma'_{n+1}(0) \geqslant 0$.

Тогда, очевидно, $\sigma_1 = 0$.

II. $Z = y_0^0 > \frac{1}{a}\sum\limits_{j=1}^{n} b_j y_j^*$ и $\sigma'_{n+1}(0) < 0$

В этом случае в качестве σ_1 следует положить корень уравнения $\sigma'_{n+1}(\sigma_1) = 0, \sigma_1 > 0$.

III. $Z = \frac{1}{a}\sum\limits_{j=1}^{n} b_j y_j^*$

Тогда в качестве σ_1 нужно выбрать корень уравнения $\sigma'_{n+1}(\sigma_1) = 0$, $\sigma_1 > \sigma_1^*$, так как $\sigma'_{n+1}(\sigma_1^* + 0) = -\infty$.

Рассмотрим уравнение $\sigma'_{n+1}(\sigma_1) = 0$. Произведя замену $\Phi_0 e^{a\sigma_1} = x$, получим уравнение вида $F(x) = 0$. Можно проверить, что $F(x)$ – вогнутая функция, и ее корень может быть без труда найден.

Замечание I. До этого момента всегда предполагалось, что рассматриваемая задача имеет оптимальное решение. Легко показать, что задача /3.I/ всегда имеет допустимое решение. Положим $t = T\tau$; где T – положительный параметр, а $\tau \in [0, 1]$. Тогда получим следующую задачу оптимизации:

$$\dot z_i(\tau) = T(\tau) v_i(\tau)(a z_0(\tau) - \sum_{j=1}^{n} b_j z_j(\tau)) \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$
$$\dot T(\tau) = 0, \; z(0) = y^0, \; z_i(1) = y_i^* \quad (i = 1, \dots, n),$$
$$v(\tau) \in U$$

найти $\min T(1)$. Здесь $z(\tau) = y(T\tau)$, $v(\tau) = u(T\tau)$.

Для такого рода задач /при наличии хотя бы одного допустимого решения/ теорема существования доказана, например в [3]. Стало быть, рассматриваемая в § 3 задача всегда имеет оптимальное решение.

Замечание 2. Можно показать, что в теореме I условие $b_0 < b_1 < \dots < b_n$ можно заменить более общим условием $b_0 \leqslant b_1 \leqslant \dots \leqslant b_n$.

§ 4. Частный случай общей экономической модели, когда $m = s = 1$, $n \geqslant 1$.

Система /I.I/ в этом случае принимает вид:

$$x_1(t) = a_{11} x_1(t) + \sum_{k=1}^{n} b_{1k} y_k(t) + p_{11}\dot x(t) + \sum_{k=1}^{n} q_{1k} \dot y_k(t) \qquad /4.I/$$
$$x_1(0) = x_1^0 > 0, \quad y(0) = y^0 > 0.$$

Здесь наиболее логично с экономической точки зрения ввести следующие добавочные уравнения:

$$q_{1i} \dot y_i(t) = u_i(t)(x_1(t) - a_{11} x_1(t) - \sum_{k=1}^{n} b_{1k} y_k(t)) \qquad /4.2/$$
$$u_i(t) \geqslant 0, \; (i = 1, \dots, n), \; \sum_{i=1}^{n} u_i(t) \leqslant 1.$$

Не ограничивая общности, предположим, что

$$q_{1k}\, b_{1k+1} \geqslant q_{1k+1}\, b_{1k} \quad (k=1,\dots,n-1).$$

Потребуем, чтобы для исходных данных выполнялось условие

$$x_1^0 - a x_1^0 - \sum_{k=1}^{n} b_{1k}\, y_k^0 > 0. \qquad /4.3/$$

Пусть заданы величины $(y_1^*,\dots,y_n^*)$, $y_i^* > y_i^0$ $(i=1,2,\dots,n)$. Требуется найти допустимое управление $(u_1(t),\dots,u_n(t))$, переводящее экономику за минимальное время в такое состояние, где $y_i = y_i^*$, $(i=1,2,\dots,n)$. Полагая $\widehat{y}_0(t) = p_{11} x_1(t)$, $\widehat{y}_k(t) = q_{1k} y_k(t)$, $u_0(t) = 1 - \sum_{i=1}^{n} u_i(t)$ и разрешая /4.1/, /4.2/ относительно производных, мы с точностью до обозначений получим рассмотренную в § 3 задачу. Рассмотрим систему /1.1/, когда $S=1$; m, n произвольны. Предположим, что

$$x_1^0 - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j^0 - \sum_{k=1}^{n} b_{1k}\, y_k^0 > 0 \qquad /*/$$

Тогда этот случай сводится к случаю $m = S = 1$, $n \geqslant 1$ исключением конечных связей. Действительно, $\bar{A} = \{a_{ij}\}_2^m$ продуктивна как подматрица продуктивной матрицы, и, следовательно, $(E - \bar{A})^{-1}$ имеет лишь неотрицательные компоненты.

Тогда

$$\bar{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} y_k(t)(E-\bar{A})^{-1}\bar{b}_k + x_1(E-\bar{A})^{-1}\bar{a}_1,$$

где

$$\bar{x}(t) = (x_2(t),\dots,x_m(t)),\ \bar{b}_k = (b_{2k},\dots,b_{mk}),\ \bar{a}_1 = (a_{21},\dots,a_{m1})$$

Подставляя выражение для $\bar{x}(t)$ в систему /1.1/ и /*/, получим выражения типа /4.1/, /4.3/.

Поступила в редакцию 30.4.1971 г.

Литература

1. В.Г.Болтянский. Математические методы оптимального управления, "Наука", М., 1969.

2. И.А.Ицкович. К моделированию распределения накопления между первым и вторым подразделениями народного хозяйства, "Проблемы народнохозяйственного оптимума", "Наука", Новосибирск, 1966.

3. Ю.П.Кривенков. Математические и вычислительные вопросы линейного динамического программирования, ВЦ АН СССР, М., 1969.