Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 9.
УДК.519.95.

О НЕПРЕРЫВНЫХ АНАЛОГАХ МЕТОДА ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК

И.И.Дикин

В работе исследуется метод дифференциального спуска, который является непрерывным вариантом алгоритмов, опубликованных автором в [1]. Дифференциальные уравнения метода внутренних точек предлагаются также для решения некоторых минимаксных задач.

§ 1. Решение задач оптимального программирования

Рассмотрим задачу квадратичного программирования: минимизировать

$$\varphi(x), \qquad /1/$$

если

$$x_j \geq 0, \ j \in \mathcal{J}_1; \qquad /2/$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^0) = 0, \ i = 1,2,\ldots, m, \qquad /3/$$

где $\varphi(x)$ – выпуклая квадратичная функция; $\|a_{ij}\|$ – $m \times n$ – матрица; x и x^0 – векторы n -мерного евклидова пространства E_n;

$$\mathcal{J} = \{1,2,\ldots,n\}, \ \mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2, \ \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2 = \Phi.$$

Пусть $X \in E_n$ – множество векторов, удовлетворяющих условиям /2/ – –/3/. Множество решений задачи /1/–/3/ обозначим через $\bar{X}$.

Задаче выпуклого программирования /1/–/3/ поставим в соответствие следующую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_j}{dt} = x_j^2 \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i(x) - \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} \right), j \in \mathcal{J}_1; \qquad /4/$$

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i(x) - \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}, \ j \in \mathcal{J}_2; \qquad /5/$$

$$x(0) = x_0. \qquad /6/$$

Вектор $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x))$ примем таким, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{dx_j}{dt} = 0, \ i = 1,2,\ldots, m. \qquad /7/$$

Пусть $x(t)$ – решение системы /4/ – /7/.
Положим

$$\delta_j(t) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i[x(t)] - \frac{\partial\varphi[x(t)]}{\partial x_j} .$$

Используя /4/, получаем

$$x_j(t) = x_j^0 e^{\int_0^t x_j(\tau)\delta_j(\tau)d\tau}, \; j \in \mathcal{J}_1 . \qquad /8/$$

Покажем, что

$$\frac{d\varphi[x(t)]}{dt} = -\sum_{j\in\mathcal{J}_1} x_j^2(t)\delta_j^2(t) - \sum_{j\in\mathcal{J}_2} \delta_j^2(t) . \qquad /9/$$

Имеем

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} + \sum_{j\in\mathcal{J}_1} x_j^2(t)\delta_j^2(t) + \sum_{j\in\mathcal{J}_2}\delta_j^2(t) = \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{dx_j}{dt} .$$

В силу /7/ справедливость равенства /9/ установлена.

Итак, если вектор x^0 не является решением в /I/-/3/ и

$$x_j(0) > 0 \quad \text{при } j \in \mathcal{J}_1 , \qquad /10/$$

то в силу /8/-/9/ функция $\varphi(x)$ строго убывает вдоль траектории $x(t)$.

Пусть x' -такая внутренняя точка множества X, что $\varphi(x') < \varphi(x^0)$. Предполагается также, что x' не совпадает с решением задачи /I/-/3/.

Т е о р е м а I. Если выполнено условие /10/, то

1/ существует такое t', что

$$\varphi[x(t')] = \varphi(x') ;$$

2/ если множество решений задачи /I/-/3/ не пусто и его размерность не равна нулю, то $x(t) \to x^*$, где x^* - внутренняя точка множества X.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу определения вектора x' найдется точка $x'' \in X$ такая, что $x_j'' > 0$ при $j \in \mathcal{J}_1$, $\varphi(x'') < \varphi(x')$. Положим

$$f(t) = \sum_{j\in\mathcal{J}_1} (\ln x_j(t) + x_j''/x_j(t)) + \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathcal{J}_2} (x_j'' - x_j(t))^2 ,$$

имеем

$$\dot f = -\sum_{j=1}^{n} (x_j(t) - x_j'') \frac{\partial\varphi[x(t)]}{\partial x_j} .$$

В силу выпуклости функции $\varphi(x)$ получим

$$\dot f \le \varphi(x'') - \varphi[x(t)] . \qquad /11/$$

Предположим, что при любом t $\varphi[x(t)] > \varphi(x')$, тогда в силу /11/

$$\dot f < \varphi(x'') - \varphi(x') . \qquad /12/$$

Неравенство /I2/ противоречит тому, что функция, равная

$$\sum_{j\in \mathcal{J}_1}(\ln x_j + x_j''/x_j) + \frac{1}{2}\sum_{j\in \mathcal{J}_2}(x_j - x_j'')^2, \qquad /13/$$

ограничена на E_n и принимает свое наименьшее значение в точке x'. В силу утверждения, доказанного выше, получим, что

$$\rho(x(t), \bar{X}) \to 0. \qquad /14/$$

Пусть $\bar{x}$ – внутренняя точка множества $\bar{X}$. Будем говорить, что индекс $j \in \bar{\mathcal{J}}_1$, если $\bar{\mathcal{J}}_1 \in \mathcal{J}_1$ и $\bar{x}_j > 0$. Из /I4/ следует, что

$$x_j(t) \to 0 \qquad \text{при} \quad j \in \mathcal{J}_1 \setminus \bar{\mathcal{J}}_1. \qquad /15/$$

Положим

$$z(t) = \sum_{j\in \mathcal{J}_1}(\bar{x}_j - \bar{y}_j)/x_j(t) + \sum_{j\in \mathcal{J}_2} x_j(t)(\bar{y}_j - \bar{x}_j), \qquad /16/$$

где $\bar{y} \in \bar{X}$.

Имеем

$$\dot{z} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi[x(t)]}{\partial x_j}(\bar{x}_j - \bar{y}_j). \qquad /17/$$

В силу того, что выпуклый квадратичный функционал $\varphi(x)$ в каждой точке отрезка, соединяющего векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ равен $\varphi(\bar{x})$, то, используя /I7/, получаем: функция $\dot{z}(t)$ тождественно равна нулю. Тогда

$$z(t) = \sum_{j\in \mathcal{J}_1}(\bar{x}_j - \bar{y}_j/x_j^0 + \sum_{j\in \mathcal{J}_2} x_j^0(\bar{y}_j - \bar{x}_j). \qquad /18/$$

Покажем, что траектория $x(t)$ ограничена и каждая ее предельная точка при $t \to \infty$ является внутренней в X. Если предположить противное, то существует такая последовательность моментов $t_\ell \to \infty$, что можно выделить три следующих множества значений индекса j, из которых по крайней мере одно не пусто:

$j \in \mathcal{J}_1^0$, если $j \in \bar{\mathcal{J}}_1$ и $x_j(t_\ell) \to 0$;
$j \in \mathcal{J}_1^\infty$, если $j \in \bar{\mathcal{J}}_1$ и $x_j(t_\ell) \to \infty$;
$j \in \mathcal{J}_2^\infty$, если $j \in \mathcal{J}_2$ и $|x_j(t_\ell)| \to \infty$.

Докажем сначала, что множество $\mathcal{J}_1^0 \cup \mathcal{J}_2^\infty$ пусто. Действительно, если предположить противное, то в силу /I4/ найдется вектор $\bar{y} \in \bar{X}$ такой, что при $j \in \mathcal{J}_1^0$ $\bar{y}_1 < \bar{x}_j$, а при $j \in \mathcal{J}_2^\infty$ $\bar{y}_j > \bar{x}_j$, когда $x(t_\ell) \to \infty$ и $\bar{y}_j < \bar{x}_j$, когда $x(t_\ell) \to -\infty$. Тогда $z(t_\ell) \to \infty$, что противоречит /I8/. Теперь убедимся, что $\mathcal{J}_1^\infty$ пусто. Если это не так, то в силу /I4/ и определения множества $\mathcal{J}_1^\infty$ можно построить последовательность векторов $\{y^k\}$ такую, что

1. $y^k \in X$;

2. $y_j^k \to \infty$ при $j \in \mathcal{J}_1^\infty$;

3. $y_j^k = y_j$ при $j \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_1^\infty$, где y_j является предельной точкой последовательности $\{x_j(t_2)\}$.

Подставляя в /16/ y^k вместо $\bar{y}$, получаем

$$z(t_2) = \sum_{j \in \mathcal{J}_1^\infty} (\bar{x}_j - y_j^k)/x_j(t_2) + \sum_{j \in \mathcal{J}_1 \setminus \mathcal{J}_1^\infty} (\bar{x}_j - y_j)/x_j(t_2) + \sum_{j \in \mathcal{J}_2} x_j(t_2)(y_j - \bar{x}_j).$$

Так как функция $z(t)$ постоянна, имеем

$$z(t) = \sum_{j \in \mathcal{J}_1 \setminus \mathcal{J}_1^\infty} (\bar{x}_j - y_j)/y_j + \sum_{j \in \mathcal{J}_2} (y_j - \bar{x}_j) y_j .$$

С другой стороны, из /18/ видно, что при достаточно больших y_j^k $(j \in \mathcal{J}_1^\infty)$ можно получить величину $z(t)$, меньшую любого наперед заданного числа.

Докажем, наконец, что решение $x(t)$ сходится при $t \to \infty$. Пусть x^* и x^{**} - две предельные точки траектории $x(t)$. Положим

$$z(t) = \sum_{j \in \mathcal{J}_1} (x_j^* - x_j^{**})/x_j(t) + \sum_{j \in \mathcal{J}_2} x_j(t)(x_j^{**} - x_j^*).$$

В силу того, что $z(t) = const$, получим

$$\sum_{j \in \bar{\mathcal{J}}_1} (x_j^* - x_j^{**})/x_j^* + \sum_{j \in \mathcal{J}_2} x_j^*(x_j^{**} - x_j^*) =$$

$$= \sum_{j \in \bar{\mathcal{J}}_1} (x_j^* - x_j^{**})/x_j^{**} + \sum_{j \in \mathcal{J}_2} (x_j^{**} - x_j^*) x_j^{**}.$$

Или

$$\sum_{j \in \bar{\mathcal{J}}_1} \left(\sqrt{\frac{x_j^*}{x_j^{**}}} - \sqrt{\frac{x_j^{**}}{x_j^{**}}} \right)^2 + \sum_{j \in \mathcal{J}_2} (x_j^{**} - x_j^*)^2 = 0.$$

Теорема доказана.

§ 2. Нахождение седловых точек

Определим множества $X \subset E_n$ и $U \subset E_m$ соответственно неравенствами $x_j \geq 0, j \in \mathcal{J}_1$; $u_i \geq 0$, $i \in \mathcal{J}_1$. Пару векторов $\{\bar{x}, \bar{u}\}$ будем называть седловой точкой функции $\varphi(x, u)$ на $X \times U$, если выполняются неравенства

$$\varphi(\bar{x}, u) \leq \varphi(\bar{x}, \bar{u}) \leq \varphi(x, \bar{u}) \qquad /19/$$

для $x \in X$, $u \in U$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_j}{dt} = -x_j \frac{\partial\varphi(x,u)}{\partial x_j}, \ j\in J_1; \ \frac{dx_j}{dt} = -\frac{\partial\varphi(x,u)}{\partial x_j}, j\in \bar{J}_1;$$

$$\frac{du_i}{dt} = u_i \frac{\partial\varphi(x,u)}{\partial u_i}, \ i\in J_1; \ \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial\varphi(x,u)}{\partial u_i}, \ i\bar{\in} J_1; \qquad /20/$$

$$x(0)=x^0, \ x^0\in X; \ u(0)=u^0, \ u^0\in U.$$

Т е о р е м а 2. Пусть дважды непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x,u)$ выпукла по x для каждого u, вогнута относительно u для каждого x. Если x^0 и u^0 являются внутренними точками соответственно в X и U, то

$$\varphi(\bar{x}, u(t)) - \varphi(x(t), \bar{u}) \longrightarrow 0, \qquad /21/$$

где $\{x(t), u(t)\}$ - решение системы /20/, $\{\bar{x}, \bar{u}\}$ - седловая точка функции $\varphi(x,u)$ на $X\times U$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Принадлежность функции φ классу C^2 гарантирует единственность решения системы дифференциальных уравнений /20/ и его непрерывную зависимость от начальных данных.

Положим

$$f(x,u) = \sum_{j\in J_1}(x_j - \bar{x}_j \ln x_j) + \frac{1}{2}\sum_{j\bar{\in} J_1}(x_j - \bar{x}_j)^2 +$$

$$+\sum_{i\in J_1}(u_i - \bar{u}_i \ln u_i) + \frac{1}{2}\sum_{i\bar{\in} J_1}(u_i - \bar{u}_i)^2. \qquad /22/$$

Имеем

$$\dot{f} = \sum_{j=1}^{n}(\bar{x}_j - x_j)\frac{\partial\varphi(x,u)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m}(u_i - \bar{u}_i)\frac{\partial\varphi(x,u)}{\partial u_i}$$

В силу того, что функция $\varphi(x,u)$ выпукло-вогнута, справедливо неравенство

$$\dot{f}[x(t), u(t)] \leq \varphi(\bar{x}, u(t)) - \varphi(x(t), \bar{u}). \qquad /23/$$

Так как функция $f(x,u)$ ограничена, то, используя неравенства /19/ и /23/, получаем:

$$\lim_{t\to\infty}[\varphi(\bar{x}, u(t)) - \varphi(x(t), \bar{u})] = 0,$$

что и требовалось.

Рассмотрим задачу: найти

$$\min_{x}\max_{u}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_i a_{ij} x_j \qquad /24/$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = 1, \ u_i \geq 0, \ i = 1,2,\dots,m; \qquad /25/$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\ x_j \geq 0,\ j=1,2,\dots,n \qquad /26/$$

Приведем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{du_i}{dt} = u_i\Big(-v(u,x) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\Big),\ i=1,2,\dots,m;$$

$$\frac{dx_j}{dt} = x_j\Big(v(u,x) - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i\Big),\ j=1,2,\dots,n; \qquad /27/$$

$$u(0)=u^0,\ x(0)=x^0,$$

где

$$v(u,x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_i a_{ij} x_j,$$

векторы u^0 и x^0 удовлетворяют соответственно условиям /25/ и /26/.

Пусть $\{\bar{U}, \bar{X}\}$ - множество решений задачи /24/-/26/. С помощью рассуждений, аналогичных тем, которые применялись при доказательстве теоремы 2, используя свойства оптимальных стратегий матричных игр, можно показать, что имеет место следующая .

Т е о р е м а 3. Если $u_i^0 > 0$ при $i=1,2,\dots,m$, $x_j^0 > 0$ при $j=1,2,\dots,n$, то $u(t) \to u^*$, $x(t) \to x^*$, где $\{u(t), x(t)\}$ - решение системы /27/, $\{u^*, x^*\} \in \{\bar{U}, \bar{X}\}$. Если размерность множества $\{\bar{U}, \bar{X}\}$ не равна нулю, то точка $\{u^*, x^*\}$ является внутренней в $\bar{U} \times \bar{X}$.

Из ранее опубликованных градиентных процессов определения седловых точек выпукло-вогнутых функций отметим метод дифференциальных уравнений, принадлежащий Брауну и фон Нейману /см. , [2] / и метод Эрроу-Гурвица [3]

Поступила в редакцию 27.5.1971 г.

Л и т е р а т у р а

1. И.И.Дикин. Итеративное решение задач линейного и квадратичного программирования. ДАН СССР, 1967, 174, № 4, 747-748.

2. С.Карлин. Математические методы в теории игр программировании и экономике. М., Мир, 1964.

3. Эрроу, Гурвиц, Удзава. Исследования по линейному и нелинейному программированию М., Ин литература 1962.