Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 9.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ОДНОРОДНОЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В.Л.Береснев

Задача оптимизации параметров однородной технической системы относится к задачам типа размещения, унификации и стандартизации. Ввиду большой практической важности таких задач, последним посвящено большое количество работ [1] - [10] с изложением различных подходов и методов решения. Предлагаются точные, приближенные а также эвристические алгоритмы. Тем не менее в случае произвольных функций платы $g^{o}(u)$ и цены $g(u,x)$ в настоящее время не известно эффективных методов решения рассматриваемых задач. Так, например, в работах [4] - [6] для решения задач унификации и размещения предлагается метод ветвей и границ, трудоемкость которого резко возрастает с увеличением размерности задачи.

В этой связи представляется естественным рассмотрение некоторых классов задач данного типа, специфика которых позволяет построить эффективные алгоритмы. Важным шагом в этом направлении было выделение в работах [8], [10] класса задач типа унификации и стандартизации, для которых функция $g(u,x)$ удовлетворяет так называемому свойству связности. Это свойство является достаточным для получения решения задачи методом динамического программирования.

В настоящей работе предполагается, что функция $g(u,x)$ квазивыпуклая по u. Использование свойства квазивыпуклости позволяет свести /§2/ решение исходной задачи к задаче минимизации некоторого полинома специального вида /названного правильным/ с переменными $0,1$. В § 3 для задачи минимизации правильного полинома предложен эффективный алгоритм в духе псевдобулева программирования. Последовательность вычислений, используемая при решении первоначальной задачи, рассмотрена в § 4, здесь же приведены оценки для трудоемкости вычислений по алгоритму построения правльного полинома и его минимизации. При объеме памяти $(m+n)$ количество элементарных операций, необходимых для решения задачи рассмотренного класса, не превосходит $3m(m+n+1)$, где m и n - мощности соответствующих ε - сетей.

§ 1. Постановка задачи

Под однородной технической системой будем понимать систему устройств, имеющих одинаковое функциональное назначение и отличающихся лишь значением своего основного параметра.

Пусть заданы некоторые виды работ, которые могут быть выполнены различными устройствами с соответсвующими издержками. Предположим также, что участие устройства в выполнении работ связано с некоторыми начальными затратами, например с затратами на опытно-конструкторскую разработку устройства с данным значением параметра.

Задача оптимизации параметров однородной технической системы состоит в том, чтобы выбрать набор устройств с такими значениями параметра и такими областями применения этих устройств, чтобы при выполнении полного объема работ сумма начальных затрат и издержек применения была минимальной.

Переведем задачу на формальный язык. Пусть имеется некоторое конечное множество X, принадлежащее множеству вещественных чисел R. На X задана неотрицательная функция $\varphi(x)$ - функция потребностей. Потребности $\varphi(x)$ могут быть удовлетворены некоторым набором устройств со значениями параметра из конечного множества $U \subset R$. На множестве U определена вещественная функция $g^0(u)$ - плата за участие устройства с данным значением параметра в удовлетворении потребностей. На множестве $U \times X$ задана вещественная функция $g(u, x)$ - цена использования устройства со значением параметра u для удовлетворения единичной потребности в $x \in X$.

Последовательность $\{u_i\}_{i=1}^m$ элементов множества U будем называть набором, определяющим систему однородных технических устройств, если устройства со значениями параметра u_i, $i=\overline{1,m}$ и только они участвуют в удовлетворении потребностей.

На множестве X для любого набора $\{u_i\}_1^m$, определяющего систему, рассмотрим функцию $G(\{u_i\}_1^m, x)$ - миноранту семейства функций $\{g(u_i, x)\}_{i=1}^m$. Другими словами, $G(\{u_i\}_1^m, x)$ есть наименьшая цена удовлетворения единичной потребности в точке x набором $\{u_i\}_1^m$. Для фиксированного набора $\{u_i\}_1^m$, суммарные затраты, связанные с полным удовлетворением спроса, составят

$$\sum_{i=1}^m g^0(u_i) + \sum_{x \in X} G(\{u_i\}_1^m, x)\varphi(x).$$

Таким образом, задача оптимизации параметров однородной технической системы состоит в нахождении оптимального набора задачи I:

$$\min_{m>0} \min_{\{u_i\}_1^m} \left\{ \sum_{i=1}^m g^0(u_i) + \sum_{x \in X} G(\{u_i\}_1^m, x)\varphi(x) \right\},$$

где $u_i \in U$, $i=\overline{1,m}$.

Для набора $\{u_i\}_1^m$ рассмотрим множества

$$\bar{Z}_{u_j}(\{u_i\}_1^m) = \{x \in X / g(u_j, x) = G(\{u_i\}_1^m, x)\}, \ j = \overline{1,m} \quad .$$

Совокупность множеств

$$\{Z_{u_j}(\{u_i\}_1^m)\}_{j=1}^m \ , \ Z_{u_j}(\{u_i\}_1^m) \subseteq \bar{Z}_{u_j}(\{u_i\}_1^m), \ j = \overline{1,m},$$

будем называть областями применения набора $\{u_i\}_1^m$,если $Z_{u_j}(\{u_i\}_1^m)$, $j = \overline{1,m}$, попарно не пересекаются и покрывают множество X .

§ 2. Построение правильного полинома

Пусть множества U и X суть соответсвенно множества $\{1,2,\dots,m\}$, $\{1,2,\dots,n\}$. Введением переменных z_i, $i = \overline{1,m}$, принимающих значение I, если i -е устройство участвует в удовлетворении потребностей, и 0 - в противном случае, задача I приводится к задаче П:

$$\min_{z=(z_1,\dots,z_m)\neq 0} \left\{ \sum_{i=1}^m g^0(i) z_i + \sum_{j=1}^n G(z,j)\varphi(j) \right\},$$

где

$$z_i \in \{0,1\}, \ i = \overline{1,m}, \ G(z,j) = \min_{i/z_i=1} g(i,j), \ j = \overline{1,n}.$$

Определение I. Множество $S \subset U$ будем называть связным, если из $i_1, i_2 \in S$, $i_1 < i_3 < i_2$, $i_3 \in U$ следует, что $i_3 \in S$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $g(i,j)$ квазивыпукла по i , если для произвольных $i \in U, j \in X$ множество $S(i,j) = \{k \in U / g(k,j) \leq g(i,j)\}$ связно.

Пусть функция $g(i,j)$ квазивыпукла по i . Для фиксированного $j \in X$ существует такая точка $i^*(j) \in U$, что

$$g(i,j) \geqslant g(i^*,j) \text{ при } i \leq i^*$$
$$g(i,j) > g(i^*,j) \text{ при } i > i^*$$

Тогда для любых $i \in U$, $j \in X$ определим множество $P(i,j)$ следующим образом:

$$P(i,j) = \{k \in U / g(i,j) > g(k,j)\} \cup \{k \in U / g(i,j) = g(k,j), i < k \leq i^*\},$$
если $i \leq i^*$;

$$P(i,j) = \{k \in U / g(i,j) > g(k,j)\} \cup \{k \in U / g(i,j) = g(k,j), i > k\},$$
если $i > i^*$.

Нетрудно заметить, что при $i_1 \neq i_2$ $P(i_1,j) \neq P(i_2,j)$. Кроме того, имеет место одно из двух включений: либо $P(i_1,j) \subset P(i_2,j)$, либо $P(i_1,j) \supset P(i_2,j)$.

О п р е д е л е н и е 3. Будем говорить, что для $i_1, i_2 \in U$ при фиксированном $j \in X$ имеет место отношение $i_1 \prec i_2$, если $P(i_1, j) \subset P(i_2, j)$.

Легко видеть, что данное отношение есть отношение порядка. Кромет того, если для некоторого $j \in X$ $i_1 \prec i_2$, то $i_1 \in P(i_2, j), i_2 \notin P(i_1, j)$.

Л е м м а 1. Если функция $g(i, j)$ квазивыпукла, то для любых $i \in U$, $j \in X$ множество $P(i, j)$ связно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $i_1, i_2 \in P(i, j), i_1 < i_3 < i_2$. Покажем, что $i_3 \in P(i, j)$. Имеем $i_1, i_2 \in S(i, j)$, поскольку $S(i, j)$ связно, то $i_3 \in S(i, j)$, т.е. $g(i_3, j) \leq g(i, j)$. Если $g(i_3, j) < g(i, j)$, то $i_3 \in P(i, j)$. Пусть $g(i_3, j) = g(i, j)$ и предположим, что $i < i^*(j)$. Тогда неравенства $i < i_3 < i^*$ следуют из неравенств $i_1 < i_3 < i_2 \leq i^*$, т.е. $i_3 \in P(i, j)$. Случай $i > i^*(j)$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Далее будем использовать следующее обозначение: $\bar{z}_i = 1 - z_i$.

Л е м м а 2. Для любого $z = (z_1, \ldots, z_m) \neq 0$ имеет место представление

$$G(z, j) = \sum_{i=1}^{m} g(i, j) z_i \prod_{s \in P(i,j)} \bar{z}_s ,$$

где $j = \overline{1, n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для некоторого $z = (z_1, \ldots, z_m) \neq 0$ рассмотрим множество $\mathcal{I} = \{ i \in U \mid z_i = 1\} \neq \emptyset$. Пусть $\mathcal{I} = \{i_1, \ldots, i_{m'}\}$. При фиксированном j упорядочим множество $\mathcal{I}$ согласно отношению $\prec$ и предположим, не умаляя общности, что $i_1 \prec i_2 \prec \ldots \prec i_{m'}$. Так как $g(i_1, j) \leq g(i_k, j)$, $k = \overline{1, m'}$, то имеем $G(z, j) = g(i_1, j)$. Далее, поскольку $i_k \notin P(i_1, j)$, $k = \overline{1, m'}$, $i_1 \in P(i_k, j)$, $k = \overline{2, m'}$ получаем $P(i, j) \cap \mathcal{I} = \emptyset$, $P(i_k, j) \cap \mathcal{I} \neq \emptyset$, $k = \overline{2, m}$. Отсюда следует, что

$$z_{i_1} \prod_{s \in P(i_1, j)} \bar{z}_s = 1, \quad z_{i_k} \prod_{s \in P(i_k, j)} \bar{z}_s = 0, \quad k = \overline{2, m'}.$$

Кроме того, $z_i \prod_{s \in P(i,j)} \bar{z}_s = 0$, когда $i \notin \mathcal{I}$. Тогда получаем окончательно

$$\sum_{i=1}^{m} g(i, j) z_i \prod_{s \in P(i,j)} \bar{z}_s = g(i_1, j).$$

Лемма доказана.

О п р е д е л е н и е 4. Полином $f(x_1, \ldots, x_m)$ от переменных $x_1, \ldots, x_m$, принимающих значение $0, 1$, будем называть правильным, если он может быть записан в виде:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i}^{m} a_{ij} x_i \ldots x_j + a_0 .$$

В дальнейшем будем рассматривать только правильные полиномы с неотрицательными коэффициентами при нелинейных членах, т.е. полиномы, у которых $a_{ij} \geqslant 0$ при $i \neq j$.

Л е м м а 3. Если функция $g(i,j)$ квазивыпукла, то задача П сводится к задаче минимизации некоторого правильного полинома.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим прежде всего, что согласно лемме 2 задача П сводится к минимизации полинома

$$\sum_{i=1}^{m} g^{\circ}(i) z_i + \sum_{j=1}^{n} \varphi(j) \sum_{i=1}^{m} g(i,j) z_i \prod_{s \in P(i,j)} \bar{z}_s + F \bar{z}_1 \ldots \bar{z}_m$$

от переменных $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m$. Здесь F – достаточно большое положительное число. Покажем, что этот полином правильный. Зафиксировав некоторое $j \in X$, упорядочим множество U согласно отношению $<$. Пусть $1 < 2 < \ldots < m$. Тогда можем написать

$$\sum_{i=1}^{m} g(i,j) z_i \prod_{s \in P(i,j)} \bar{z}_s = \sum_{i=1}^{m} g(i,j) \Big[\prod_{s \in P(i,j)} \bar{z}_s - \bar{z}_i \prod_{s \in P(i,j)} \bar{z}_s \Big] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} g(i,j) \Big[\prod_{s \in P(i,j)} \bar{z}_s - \prod_{s \in P(i+1,j)} \bar{z}_s \Big] + g(m,j) \Big[\prod_{s \in P(m,j)} \bar{z}_s - \bar{z}_1 \ldots \bar{z}_m \Big] =$$

$$= g(1,j) + \sum_{i=2}^{m} \big[g(i,j) - g(i-1,j) \big] \prod_{s \in P(i,j)} \bar{z}_s - g(m,j) \bar{z}_1 \ldots \bar{z}_m .$$

Учитывая неравенства $g(i,j) \geqslant g(i-1,j)$, $i = \overline{2,m}$, и связность множеств $P(i,j)$, получаем требуемое.
Лемма доказана.

§ 3. Минимизация правильного полинома

Рассмотрим задачу минимизации правильного полинома: определить

$$\min_{x_1,\ldots,x_m} f(x_1,\ldots,x_m) = \min_{x_1,\ldots,x_m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i}^{m} a_{ij} x_i \ldots x_j ,$$

где $x_i \in \{0,1\}$ $i = \overline{1,m}$.

Вектор $(x_1^*, \ldots, x_m^*)$, связанный с минимально возможным значением правильного полинома $f(x_1, \ldots, x_m)$, будем называть оптимальным вектором, или решением задачи.

О п р е д е л е н и е 5. Элемент $i_1^{\circ} \in U$ будем называть индексом переменной x_1 в правильном полиноме $f(x_1,\ldots,x_m)$, если

$$\sum_{j=1}^{i_1^{\circ}-1} a_{ij} \leqslant 0 , \quad \sum_{j=1}^{i_1^{\circ}} a_{1j} > 0 .$$

Если

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \leq 0 ,$$

то положим $i_1^0 = m+1$.

Л е м м а 4. Если i_1^0 $1 < i_1^0 \leq m$ - индекс переменной x_1 в правильном полиноме $f(x_1, \ldots, x_m)$, то найдется оптимальный вектор $(x_1^*, \ldots, x_m^*)$ такой, что $x_1^* = 1 - x_2^* \ldots x_{i_1^0}^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим оптимальный вектор $(x_1^*, \ldots, x_m^*)$. Пусть $x_\ell^* = 1$ $\ell = \overline{2, i_1^0}$. Предположим противное: $x_1^* \neq 0$, т.е.

$$f(0, x_2^*, \ldots, x_m^*) > f(1, x_2^*, \ldots, x_m^*) .$$

Но,с другой стороны, можем написать

$$f(1, x_2^*, \ldots, x_m^*) = \sum_{j=1}^{i_1^0} a_{1j} + \sum_{j=i_1^0+1}^{m} a_{1j} x_{i_1^0+1}^* \ldots x_j^* + f(0, x_2^*, \ldots, x_m^*) >$$
$$> f(0, x_2^*, \ldots, x_m^*) .$$

А это противоречит предположению. Пусть теперь $x_k^* = 0$ $2 \leq k \leq i_1^0$; $x_\ell^* = 1$ $\ell = \overline{2, k-1}$. Предположим, что $x_1^* \neq 1$, т.е.

$$f(0, x_2^*, \ldots, x_m^*) < f(1, x_2^*, \ldots, x_m^*) .$$

Но учитывая, что

$$\sum_{j=1}^{k-1} a_{1j} \leq 0, \quad \sum_{j=k}^{m} a_{1j} x_k^* \ldots x_j^* = 0 ,$$

получаем

$$f(1, x_2^*, \ldots, x_m^*) = \sum_{j=1}^{k-1} a_{1j} + \sum_{j=k}^{m} a_{1j} x_k^* \ldots x_j^* + f(0, x_2^*, \ldots, x_m^*) \leq$$
$$\leq f(0, x_2^*, \ldots, x_m^*) .$$

А это противоречит предположению. Лемма доказана.

Аналогичные рассуждения позволяют показать справедливость следующего утверждения.

Л е м м а 5. Пусть i_1^0 -индекс переменной x_1 в правильном полиноме $f(x_1, \ldots, x_m)$. Тогда если $i_1^0 = 1$ ($i_1^0 = m+1$) , то найдется оптимальный вектор $(x_1^*, \ldots, x_m^*)$ такой, что $x_1^* = 0$ $(x_1^* = 1)$.

Для правильного полинома $f(x_1, \ldots, x_m)$ приведем общую схему основанного, на леммах 4 и 5 метода построения решения $(x_1^*, \ldots, x_m^*)$

Пусть i_1^0 - индекс переменной x_1 . В случае, когда $i_1^0 = 1$ $(i_1^0 = m+1)$, следуя лемме 5, имеем $x_1^* = 0$ $(x_1^* = 1)$.Легко заметить, что при подстановке $x_1 = 0$ ($x_1 = 1$) в полином $f(x_1, \ldots, x_m)$ получаем правильный полином $f'(x_2, \ldots, x_m)$ от переменных $x_2, \ldots, x_m$.Если $1 < i_1^0 \leq m$, то, согласно лемме 4, x_1^* может быть выражен через $x_2^*, \ldots, x_{i_1^0}^*$. При подстановке в $f(x_1, \ldots, x_m)$ вместо x_1 выражения $1 - x_2 \ldots x_{i_1^0}$ получаем правильный полином $f'(x_2, \ldots, x_m)$. При этом

$$a'_{2j} = a_{2j} + a_{1j} \qquad j = 2, \dots, i_1^0 - 1;$$

$$a'_{2i_1^0} = a_{2i_1^0} - \sum_{j=1}^{i_1^0-1} a_{1j};$$

$$a'_{2j} = a_{2j} \qquad j = i_1^0 + 1, \dots, m;$$

$$a'_{ij} = a_{ij} \qquad i \geqslant 3 .$$

Справедливость этого утверждения следует из следующей цепочки равенств:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i \dots x_j = \sum_{j=1}^{m} a_{1j} x_1 \dots x_j + \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=i}^{m} a_{ij} x_i \dots x_j =$$

$$= a_{11}(1 - x_2 \dots x_{i_1^0}) + \sum_{j=2}^{m} a_{1j} (1 - x_2 \dots x_{i_1^0}) x_2 \dots x_j + \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=i}^{m} a_{ij} x_i \dots x_j =$$

$$= a_{11}(1 - x_2 \dots x_{i_1^0}) + \sum_{j=2}^{i_1^0-1} a_{1j} (1 - x_2 \dots x_{i_1^0}) x_2 \dots x_j + \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=i}^{m} a_{ij} x_i \dots x_j =$$

$$= a_{11} - \left(\sum_{j=1}^{i_1^0-1} a_{1j} \right) x_2 \dots x_{i_1^0} + \sum_{j=2}^{i_1^0-1} a_{1j} x_2 \dots x_j + \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=i}^{m} a_{ij} x_i \dots x_j .$$

Поскольку

$$\sum_{j=1}^{i_1^0-1} a_{1j} \leqslant 0 , \quad \text{то} \quad a'_{2i_1^0} \geqslant 0 .$$

Таким образом, полученный правильный полином $f'(x_2, \dots, x_m)$ имеет неотрицательные коэффициенты при нелинейных членах.

Итак, во всех случаях мы переходим от задачи минимизации исходного правильного полинома $f(x_1, \dots, x_m)$ к задаче минимизации правильного полинома $f'(x_2, \dots, x_m)$, число переменных у которого на единицу меньше. При этом если $(x_2^*, \dots, x_m^*)$ - оптимальный вектор для $f'(x_2, \dots, x_m)$, то $(x_1^*, \dots, x_m^*)$, где $x_1^* = 1 - x_2^* \dots x_{i_1^0}^*$, - оптимальный вектор для $f(x_1, \dots, x_m)$.

Последовательно переходя от одного правильного полинома к следующему, мы, наконец, придем к задаче минимизации правильного полинома $a_{mm} x_m$ от одной переменной. Тогда если $a_{mm} \leqslant 0$, то $x_m^* = 1$, если $a_{mm} > 0$, то $x_m^* = 0$. Воспользовавшись выражением любой компоненты вектора $(x_1^*, \dots, x_m^*)$ через последующие, получим решение задачи.

§ 4. Алгоритм решения задачи П. Сложность алгоритма

В данном параграфе будет рассмотрена последовательность вы-

числений при использовании описанного выше метода решения задачи П.

Алгоритм построения и минимизации правильного полинома $f(x_1,\dots x_m)$ состоит из m шагов. На первом шаге рассматривается полином $f^1(x_1,\dots,x_m)=f(x_1,\dots,x_m)$ а на k -м шаге - правильный полином

$$f^k(x_k,\dots,x_m)=\sum_{i=k}^{m}\sum_{j=i}^{m} a^k_{ij}\, x_i\dots x_j .$$

Переход от $f^k(x_k,\dots,x_m)$ к $f^{k+1}(x_{k+1},\dots,x_m)$ осуществляется по формулам:

$$a^{k+1}_{k+1\,j}=a_{k+1\,j}+a^k_{kj_{i_k^0}}\quad j=k+1,\dots,i^0_k-1;$$

$$a^{k+1}_{k+1\,i^0_k}=a_{k+1\,i^0_k}-\sum_{j=k}^{i^0_k-1} a^k_{kj};$$

$$a^{k+1}_{k+1\,j}=a_{k+1\,j}\qquad j=i^0_k+1,\dots,m;$$

$$a^{k+1}_{ij}=a_{ij}\qquad i\geqslant k+2,$$

где i^0_k - индекс переменной x_k в полиноме $f^k(x_k,\dots,x_m)$.

Рассмотрим порядок действий, связанный с k -м шагом алгоритма. Шаг начинается с вычисления коэффициентов a^k_{kj}, $j=\overline{k,m}$. Для этого необходимо иметь величины $i^0_{k-1}, a^{k-1}_{k-1\,k},\dots,a^{k-1}_{k-1\,i^0_{k-1}}$, определенные на предыдущем шаге, и коэффициенты $a_{kk},\dots,a_{km}$ исходного полинома.

Опишем процесс вычисления коэффициентов a_{kj} . Для этого введем некоторые определения.

Рассмотрим матрицу $\{g(i,j)\}$ $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$. Подстолбцом данной матрицы, соответсвующим j -му столбцу, будем называть множество $\{g(i,j)\}$ $i=\overline{l,s}$, $l\geqslant 1$, $s\leqslant m$.Если $l>s$, то назовем l максимальным элементом данного подстолбца, а $l+1$ и s - верхним и нижним элементами данного подстолбца. Если $l<s$, то $s,l,s-1$ - соответственно максимальный, верхний и нижний элементы.

Для вычисления коэффициента a_{ks}, $k\leqslant s\leqslant m$, необходимо рассмотреть все подстолбцы матрицы $\{g(i,j)\}$, имеющие верхний и нижний элементы, равные соответственно k и s . Если таких подстолбцов нет, то полагаем $a_{ks}=0$. Пусть найдется подстолбец, обладающий такими свойствами. Пусть, кроме того, данный подстолбец соответсвует j -му столбцу и имеет максимальный элемент,равный l. Тогда сопоставим ему величину $\varphi(j)[g(l,j)-g(s,j)]$, если $s>k$, и $\varphi(j)[g(l,j)-g(k,j)]$, если $s<k$. Просмотрев все такие столбцы и просуммировав соответсвующие им величины, определим коэффициент a_{ks} . В случае, когда $k=s$, к полученной величине необходимо добавить - $g^0(k)$.

Вычислив коэффициенты a_{kj}^{k}, находим и запоминаем индекс переменной x_k, после чего k -й шаг алгоритма считаем законченным. Определив индексы всех переменных, по известным формулам находим решение задачи П.

Приведем оценку трудоемкости вычислений по алгоритму, т.е. определим количество элементарных операций /сравнений, сложения и умножения/, а также количество ячеек памяти, затрачиваемых на реализацию алгоритма.

Легко видеть, что для вычисления коэффициентов правильного полинома $f(x_1,\dots,x_m)$ необходимо не более $3mn$ элементарных операций. Но поскольку вычисление коэффициентов полинома производится не сразу, то необходимо n ячеек памяти. Это нужно для того, чтобы на $k+1$ шаге для каждого столбца знать нижний элемент подстолбца, который при максимальном элементе, равном k имеет наибольший /в смысле чисел натурального ряда/ нижний элемент. Кроме этого, k -й шаг алгоритма требует не более $2(i_{k-1}^{0}-k+1)$ операций сложения для построения коэффициентов полинома $f^{k}(x_k,\dots,x_m)$ и $2(i_k^{0}-k+1)$ операций сложения и сравнения для определения индекса переменной x_k. При реализации k -го шага алгоритма требуется $m-k+1$ ячеек памяти для хранения коэффициентов a_{kj}^{k}, $j=\overline{k,m}$, кроме этого, необходимо хранить индексы переменных $x_1,x_2,\dots,x_{k-1}$. Нетрудно получить верхнюю оценку для количества элементарных операций, достаточных для реализации всех шагов алгоритма:

$$3mn+\sum_{k=1}^{m}2(i_k^{0}-k+1)+\sum_{k=2}^{m}2(i_{k-1}^{0}-k+1)<$$

$$<3mn+4\sum_{k=1}^{m}(m-k+1)=3mn+2m(m+1).$$

Таким образом, для решения задачи П при памяти $(m+n)$ ячеек необходимо не более $3m(m+n+1)$ элементарных операций.

В заключение автор выражает признательность В.Т.Дементьеву и Н.И.Глебову за ценные советы и внимание к работе.

Поступила в редакцию 13.7.1971 г.

Литература

1. И.Мауэр, К задаче оптимальной унификации.-Изв.АН Эст.ССР физ.мат., 1967, № 3, 294-298.

2. В.Т.Дементьев. Об одной задаче размещения точек на отрезке-Дискретный анализ, Новосибирск, 1965, вып. 4.

3. Ю.В.Чуев. Методика выбора оптимальных рядов технических устройств.-Стандарты и качество, М.,1969, 7.

4. С.И.Зуховицкий, Р.А.Поляк, М.Е.Примак. Об одном классе задач вогнутого программирования.-Экономика и мат, методы, 1968, IУ, вып. 3.

5. M.E.Efroymson,T.L.Ray. A branch-bound algorithm for pleant locations, Operat.Res.,1966,14,361-368.

6. G.Sa, Branch-and-bound and approximate solution to the capacitated plant-location problem, Operations Research,1969, 17, N 6.

7. М.И.Беркович. Задачи стандартизации и некоторые методы их решения.-Экономика и мат. методы, У, вып. 2, 1969.

8. Э.Х.Гимадутдинов. О свойствах решений одной задачи оптимального размещения точек на отрезке.-Управляемые системы, Новосибирск, 1969, вып. 2 стр.

9. Э.Х.Гимадутдинов. Об одном классе задач нелинейного программирования.-Управляемые системы, Новосибирск, 1969. вып. 3.

10. Э.Х.Гимади. Выбор оптимальных шкал в одном классе задач типа размещения, унификации и стандартизации.-Управляемые системы, Новосибирск, 1970, вып. 6.

11. P.L.Hammer, S.Rudeanu. Pseudo-boolean programming.Operat. Res.1969,17,233-261.