В Ы Ч И С Л И Т Е Л Ь Н Ы Е   С И С Т Е М Ы

Сборник трудов
1962 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 4

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ РАСЧЕТЫ ОДНОТАКТНЫХ СХЕМ

С.В. Макаров

В в е д е н и е

Создание систем высокой сложности и, в частности, вычислительных систем высокой производительности [I] остро ставит проблему структурной надежности. Желательно синтезировать вычислительные системы таким образом, чтобы выход из строя некоторого количества логических блоков не приводил к ошибке на выходе всей системы в целом. Простое дублирование машин является, очевидно, слишком дорогостоящим способом повышения надежности. Целесообразно искать более экономичные способы, основанные на выборе логических схем, обладающих повышенной устойчивостью по отношению к возможным неисправностям.

Настоящая работа является первой из серии исследований в этом направлении, намеченных в отделении вычислительной техники Института математики СО АН СССР. В ней, на примере однотактных схем, рассмотрены вероятностные методы оценки влияния одиночных неисправностей на работу всей схемы в целом.

§ I. Некоторые определения

Мы будем рассматривать логические схемы с n входами в смысле определения, данного в работе [2].

За базис принимаем совокупность трех функциональных элементов: конъюнкции $\&$, дизъюнкции $\vee$, отрицания $\neg$, причем количество входов конъюнкции и дизъюнкции не ограничивается. Считаем, что каждая схема имеет только один выход, хотя приводимые в настоящей работе рассуждения могут быть легко обобщены для схем с любым количеством выходов.

Условимся считать, что каждый элемент схемы имеет только один выход, но этот выход может быть соединен с любым количеством входов других элементов (т.е. могут быть разветвления).

Напомним, что при определении понятия "логическая схема" [2] на соединения между элементами накладывалось следующее ограничение: выход элемента может соединяться с любым количеством входов других элементов, но каждый вход соединен только с одним выходом. Кроме того, для определенности, предполагали, что если некоторый выход соединен с некоторым элементом,то он соединен только с одним входом данного элемента.

Множество всех логических схем, которые могут быть получены друг из друга посредством замены любого количества элементов $\vee$ на элементы $\&$ и любого количества $\&$ на элементы $\vee$, будем называть "логической сетью". Иными словами, логической сетью мы называем логическую схему, определенную с точностью до расстановки символов $\&$ и $\vee$ в графическом изображении схемы.

Пусть выход элемента a_i соединен со входом элемента a_j. Тогда будем говорить, что существует звено ℓ, соединяющее элементы a_i и a_j, причем звено ℓ выходит из элемента a_i и входит в элемент a_j. Выход схемы есть выходное звено схемы.

Каждый вход схемы рассматриваем как выход некоторого фиктивного элемента, именуемого впредь входным элементом; обозначать входные элементы будем теми же буквами, что и соответствующие им входы схемы; на чертежах входные элементы не обозначаем. Входные элементы можно рассматривать как независимые датчики случайных чисел,вырабатывающие с известными вероятностями значения соответствующих входов.

§ 2. Упорядочение схемы по ярусам

I. Каждый входной элемент есть элемент нулевого яруса.

2. Звено, выходящее из элемента k-го яруса, называется звеном k-го порядка.

3. Если для всех звеньев, входящих в некоторый элемент, уже определены порядки, то номер яруса элемента равен наибольшему из этих порядков плюс единица. В соответствии с п.2 это же число будет порядком всех звеньев, выходящих из данного элемента. Нетрудно показать, что за конечное число шагов порядок можно определить для всех звеньев схемы.

Звено k-го порядка может быть входным звеном для элемента i яруса, где $i \geq k+1$. Такому звену приписываем все номера ярусов, начиная от k и до $i-1$.

Пример I. Звено ℓ соединяет элемент 3-го яруса с элементом 6-го яруса. Мы считаем, что данное звено является звеном как 3-го яруса, так и одновременно звеном 4-го и 5-го ярусов. Порядок звена равен 3.

4. Внутри яруса элементы нумеруются произвольным, но фиксированным образом. Выражение $a(i,j)$ впредь будет означать элемент i-го яруса, имеющий порядковый номер j внутри данного яруса.

Если каждому элементу схемы приписан номер яруса и порядковый номер внутри яруса и каждому звену приписан порядок,а также один или несколько номеров яруса, то будем говорить, что схема упорядочена по ярусам. Очевидно, что для всякой конечной схемы процесс упорядочения (пп. I–4) конечен и всегда может быть выполнен. В дальнейшем считаем, что все рассматриваемые нами схемы упорядочены по ярусам.

В приложении (с.51–53) приведены логические схемы I,2,3 и логическая сеть (схема 4), упорядоченные по ярусам.Латинскими буквами от A до F обозначены входы схемы, буквой Z обозначен выход схемы. Разветвления на выходах элементов отмечены жирными точками.

§ 3. Другие определения и обозначения

Пусть символ $\ell(i,j,m,n)$ обозначает звено, выходящее из элемента $a(i,j)$ и входящее в элемент $a(m,n)$. Символом $\ell(i,j,-)$ обозначим совокупность всех звеньев, выходящих из элемента $a(i,j)$, (в частном случае одно звено). Символом $\ell(-,m,n)$ обозначим совокупность звеньев, входящих в элемент $a(m,n)$. В некоторых случаях буква перед скобкой будет опускаться и звенья будут обозначаться так:

$$(i,j,m,n);\ (i,j,-);\ (-,m,n).$$

В других случаях будем, наоборот, оставлять только букву (с индексом или без него), например:

$$\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_i .$$

Введем понятие цепи. Пусть дан некоторый упорядоченный набор звеньев:

$$(i_1,j_1,m_1,n_1),(i_2,j_2,m_2,n_2),(i_3,j_3,m_3,n_3),\dots,(i_K,j_K,m_K,n_K).$$

Если в этом наборе:

$$m_1=i_2,\ m_2=i_3,\ \dots,m_{K-1}=i_K,$$

$$n_1=j_2,\ n_2=j_3,\ \dots,\ n_{K-1}=j_K$$

(т.е. если для любых двух соседних звеньев набора элемент, в который входит предыдущее звено, является в то же время элементом, из которого выходит последующее звено), то данный набор есть **ц е п ь** с началом в элементе $a(i,j)$ и с концом в элементе $a(m_K,n_K)$. Два элемента могут, вообще говоря, соединяться любым количеством цепей.

Рассмотрим произвольный элемент $a(i,j)$. Множество всех элементов схемы, в которых начинаются какие-либо цепи, кончающиеся в элементе $a(i,j)$, а также множество всех звеньев, входящих хотя бы в одну цепь, кончающуюся в элементе $a(i,j)$, назовем **п р е д ы с т о р и е й э л е м е н т а** $a(i,j)$ и обозначим $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(i,j)$. Дополнительно определяем, что каждый элемент принадлежит своей предыстории.

П р е д ы с т о р и я з в е н а (i,j,m,n) есть предыстория элемента $a(i,j)$, т.е. элемента, из которого данное звено выходит. Дополнительно определяем, что предысторией входного элемента является сам этот элемент.

Множество входов, принадлежащих предыстории $\mathfrak{M}(i,j)$, обозначим $X(i,j)$ и назовем **м н о ж е с т в о м в х о д о в, в л и я ю щ и х н а э л е м е н т** $a(i,j)$, или короче, **м н о ж е с т в о м в л и я ю щ и х в х о д о в**.

Пусть дано произвольное множество элементов схемы

$$a_1,\dots,a_K .$$

Предысторией данного множества элементов назовем объединение предысторий, соответствующих всем элементам рассматриваемого множества:

$$\bigcup_{i=1}^{K}\mathfrak{M}_i=\mathfrak{M}(a_1,\dots,a_K).$$

В е с п р е д ы с т о р и и есть количество элементов, принадлежащих данной предыстории (включая входные элементы). Фиксируем некоторый набор звеньев

$$\mathcal{L}=(\ell_1,\ \ell_2,\dots,\ell_K).$$

Рассмотрим предыстории, соответствующие всем звеньям данного набора,

$$\mathfrak{M}_1,\dots,\mathfrak{M}_K$$

и множества влияющих входов

$$X_1,\dots,X_K .$$

Звено $\ell_i\in\mathcal{L}$ является независимым по отношению к набору $\mathcal{L}$, если X_i не пересекается с объединением множеств

$$\bigcup_{j\neq i}X_j\ ,$$

т.е. если множество входов, влияющих на ℓ_i, не пересекается ни с одним аналогичным множеством для других звеньев набора. Если набор $\mathcal{L}$ состоит только из одного звена, то такое звено условимся считать независимым (по отношению к данному набору).

Далее, $p(i,j,m,n)$ есть вероятность того, что звено (i,j,m,n) имеет состояние "0" (вероятность нуля в звене (i,j,m,n)). $q(i,j,m,n)$ есть вероятность того, что звено (i,j,m,n) имеет состояние "I" (вероятность единицы в звене (i,j,m,n)).

Всюду применяем только двухзначную логику, следовательно, любое звено может находиться только в одном из двух состояний — 0 или I.

С каждым входом схемы связана независимая булева переменная; с каждым элементом схемы – булева функция (см.[2]). Совокупность всех n входов рассматриваем как n-мерный вектор с компонентами, равными либо нулю, либо единице; этот вектор назовем **в е к т о р о м в х о д о в**. Каждому значению вектора входов соответствует одно и только одно состояние схемы, определяемое распределением нулей и единиц по всем звеньям схемы.

Если булеву функцию, описывающую работу схемы, представить в виде суперпозиции функций, реализуемых каждым из элементов схемы в отдельности, и при этом отметить, какая из функций, входящих в суперпозицию, каким элементом схемы реализуется, то мы получим таким образом операторную функцию схемы.

При небольшом количестве входов можно перебрать и выписать всевозможные значения вектора входов и, так как количество звеньев конечно, можно для каждого значения вектора входов определить поярусно состояние всех звеньев, вплоть до выходного звена схемы. Результаты таких вычислений могут быть сведены в т а б л и ц у с о с т о я н и й схемы, где по строкам расположены звенья, по столбцам - значения вектора входов, а в пересечениях строк и столбцов - состояния звеньев.

Построив таблицу состояний и используя далее метод полной переборки, принципиально возможно решить многие задачи, касающиеся схемы (в том числе задачи, рассматриваемые в настоящей работе). Такое решение мы будем называть тривиальным.

Однако тривиальное решение задачи практически выполнимо лишь при весьма небольшом количестве входов и звеньев. Так как количество столбцов таблицы состояний есть 2^n (где n - число входов), а число звеньев, вообще говоря, не ограничено, то ясно, что в общем случае необходимо искать другие методы решения схемных задач, существенно более экономные, чем метод полной переборки.

§ 4. Постановка задач

В работе предлагаются алгоритмы для решения двух задач, имеющих непосредственное отношение к вероятностным расчетам логических сетей.

З а д а ч а № I. Дана схема $\mathcal{G}$. Состояние i-го входа схемы есть случайная величина ζ_i, множество значений которой состоит из двух чисел (0, I). Задано распределение вероятностей:

$$\mathcal{P}(\zeta_i = 0) = p_{oi},$$

$$\mathcal{P}(\zeta_i = 1) = q_{oi}.$$

Если схема имеет n входов, то мы имеем n случайных величин $\zeta_1, \dots, \zeta_n$. Предполагаем, что все ζ_i независимы в совокупности. Таким образом, n-мерному вектору входов схемы ставится в соответствие n-мерный случайный вектор

($\zeta_1, \dots, \zeta_n$) с независимыми компонентами, имеющими заданное распределение вероятностей.

Пусть ℓ -произвольное звено схемы. Требуется определить вероятности следующих событий:

$\mathcal{A}$: звено ℓ находится в состоянии 0,

$\mathcal{B}$: звено ℓ находится в состоянии I.

Используем обозначения:

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}) = p, \quad \mathcal{P}(\mathcal{B}) = q.$$

Одно из возможных применений задачи № I состоит в том, что мы можем (при заданном потоке нулей и единиц на входах схемы) определить з а г р у з к у элемента, т.е. математическое ожидание количества срабатываний элемента за N независимых включений схемы (понимая под срабатыванием элемента появление единицы на его выходе; возможны и другие физически оправданные определения срабатывания).

З а д а ч а № 2. Повторяются условия задачи № I. Дан элемент $a(i,j) \in \mathcal{G}$. Предполагаем, что на его выходе может происходить сбой, т.е. превращение единицы, образующейся на выходе элемента при идеальной работе, в нуль или наоборот.

Сбой эквивалентен мгновенному появлению дополнительного элемента - инвертора непосредственно на выходе $a(i,j)$. Отдельно рассматриваем два типа сбоя.

Сбой первого рода (I $\longrightarrow$ 0) - превращение единицы в нуль. Вероятность этого события есть $r(a)$.

Сбой второго рода (0 $\longrightarrow$ I) - превращение нуля в единицу. Вероятность этого события $s(a)$. Величины $r(a)$ и $s(a)$ суть условные вероятности. Если $p(a)$ есть вероятность нуля на выходе элемента при идеальной работе (соответственно $q(a)$- вероятность единицы), то

$$R(a) = q(a)\,r(a) + p(a)\,s(a)$$

есть вероятность сбоя вообще, без конкретизации типа.

$R_1(a) = q(a)\,r(a)$ - безусловная вероятность сбоя первого типа; $R_2(a) = p(a)\,s(a)$ - безусловная вероятность сбоя второго типа.

Пусть $r(a)$, $s(a)$ заданы. Предполагается, что все остальные элементы работают идеально, т.е. для них:

$$r = 0, \quad s = 0.$$

Тогда может произойти одно из двух событий:

I. Либо выход z схемы будет иметь то же состояние, что и в предположении идеальной работы всей схемы (т.е. когда $r(\alpha)=0, s(\alpha)=0$). Это событие есть отсутствие ошибки на выходе (событие $\bar{E}$).

2. Либо выход схемы будет иметь состояние, противоположное тому, которое было бы при идеальной работе всей схемы. Это событие есть ошибка на выходе (событие E).

Требуется найти вероятность ошибки на выходе.

З а м е ч а н и е. Наличие сбоя в элементе, конечно, еще не означает, что на выходе схемы будет ошибка.

П р и м е р 2.

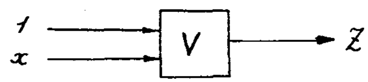

Рис. I.

x - есть выход элемента, работающего со сбоями. $z=1$ независимо от того, есть ли в звене x сбой или нет.

П р и м е р 3.

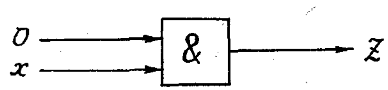

Рис. 2.

$z=0$ независимо от наличия или отсутствия сбоя в звене x .

Эти примеры показывают, что не всякий сбой оказывается существенным по отношению к выходу z .

Одна из целей предпринимаемых исследований состоит в том, чтобы разработать методику построения таких схем (реализующих заданную логическую функцию), которые обладали бы повышенной устойчивостью к возможным сбоям (при заданной надежности отдельных элементов).

Могут быть случаи, когда сбой "гасится" не в следующем ярусе, а через несколько ярусов.

Особый интерес представляет частный случай, когда $r(\alpha)=1$,

$s(\alpha)=0$. Это соответствует вырезанию элемента из схемы. В зависимости от того, насколько большой окажется вероятность ошибки на выходе при условии вырезания элемента $\alpha(i,j)$, мы можем судить о важности данного элемента для схемы, а также делать заключения о том, какой из элементов в первую очередь следует делать более надежным. Если каким-либо образом станет известно, что на выходе схемы-ошибка, то, по результатам задачи № 2 (решенной для всех элементов схемы), мы сможем делать заключение о том, какова вероятность, что ошибка на выходе произошла из-за неисправности именно данного элемента.

§ 5. Решение задачи № I для схем типа дерева

Наиболее легко задача № I решается для схем типа дерева. Для них характерно отсутствие разветвлений на выходах элементов.

П р и м е р 4. На рис. 3 изображена схема типа дерева.

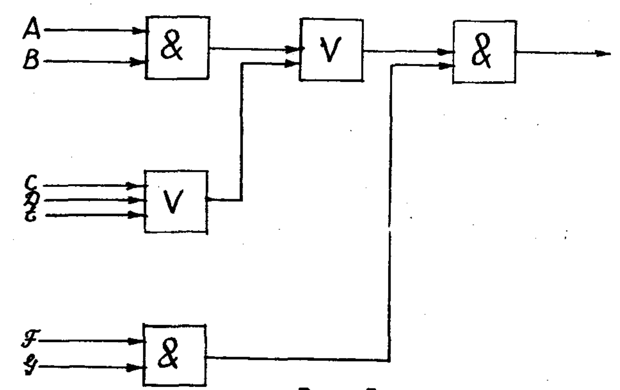

Рис. 3.

Вероятности нулей в звеньях нулевого порядка заданы по условию. Рассмотрим элементы первого яруса. Звенья, входящие в любой элемент первого яруса, всегда независимые. Рассмотрим конъюнкцию с независимыми входами (рис.4).

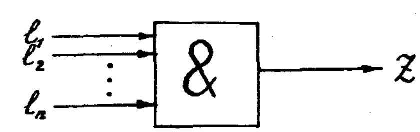

Рис. 4.

p_i – вероятность нуля в звене ℓ_i,

q_i – вероятность единицы в звене ℓ_i.

Тогда вероятность единицы на выходе

$$q_z = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n ;$$

вероятность нуля на выходе есть

$$p_z = 1 - q_z .$$

Для дизъюнкции с независимыми входами аналогично получаем:

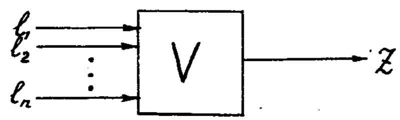

Рис. 5.

$$p_z = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n ; \quad q_z = 1 - p_z$$

(отметим, что такие простые выкладки возможны в силу независимости звеньев). Для инвертора имеем: $q_z = p_1$; $p_z = q_1$.

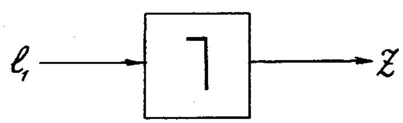

Рис. 6.

Таким образом могут быть рассмотрены все элементы первого яруса и тем самым определены вероятности нулей и единиц в звеньях первого порядка.

Переходим к элементам второго яруса. К ним могут подходить только звенья с порядком, не превышающим единицы. Для всех таких звеньев p и q уже известны (для звеньев нулевого порядка – по условию, для звеньев первого порядка – из вычислений на предыдущем шаге). Все звенья, входящие в любой элемент второго яруса, в случае схемы типа дерева независимы, так как их предыстории не содержат общих входов (не пересекаются по входам). Поэтому p и q для звеньев второго порядка могут быть найдены так же, как это было сделано для звеньев первого порядка.

Таким образом, рассматривая последовательно все ярусы, определяем p и q для звеньев всех порядков, вплоть до выхода z . Описанный алгоритм назовем алгоритмом I (AI). Применим AI к примеру 4.

Вероятности нулей в звеньях нулевого порядка заданы по условию: $p_A, p_B, p_C, p_D, p_E, p_F, p_G$.

Рассмотрим элементы первого яруса: $\&$ (I,I), $\vee$ (I,2), $\&$(I,3

$$q(1,1,2,1) = q_A \cdot q_B , \quad p(1,1,2,1) = 1 - q_A \cdot q_B ,$$

$$p(1,2,2,1) = p_C \cdot p_D \cdot p_E , \quad q(1,2,2,1) = 1 - p_C \cdot p_D \cdot p_E ,$$

$$q(1,3,3,1) = q_F \cdot q_G , \quad p(1,3,3,1) = 1 - q_F \cdot q_G .$$

Второй ярус: $\vee$ (2,I)

$$p(2,1,3,1) = p(1,1,2,1) \cdot p(1,2,2,1) = (1 - q_A \cdot q_B) \cdot p_C \cdot p_D \cdot p_E ,$$

$$q(2,1,3,1) = 1 - (1 - q_A \cdot q_B) \cdot p_C \cdot p_D \cdot p_E$$

Наконец, третий ярус: $\&$.(3,I)

$$q(3,1,-) = q(2,1,3,1)\, q(1,3,3,1) = \\ = [1 - (1 - q_A \cdot q_B) \cdot p_C \cdot p_D \cdot p_E] \cdot q_F \cdot q_G .$$

Переходим к задаче № I в общем случае.

§ 6. Построение ближайшей системы независимых датчиков

Дана схема σ . Фиксируем элемент $a(i,j) \in \sigma$. Его предыстория есть $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}(i,j)$. Рассмотрим некоторое множество элементов из σ :

$$a_1 , a_2 , \ldots , a_k \qquad (*)$$

а также все соответствующие предыстории и множества влияющих входов:

$$\mathfrak{M}_1 , \mathfrak{M}_2 , \ldots , \mathfrak{M}_k ,$$
$$X_1 , \; X_2 , \ldots , \; X_k .$$

Если все X_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ попарно не пересекаются, причем $\bigcup_{i=1}^{k} X_i = X(i,j)$, и если без использования звеньев, выходящих из элементов множества ($*$) невозможно построить цепь, соединяющую какой-либо вход схемы с $a(i,j)$, то множество ($*$) называется с и с т е м о й н е з а в и с и -

мых датчиков (СНД) по отношению к элементу $\alpha(i,j)$ (обозначим ее $\mathcal{H}(i,j)$), а элементы, принадлежащие ($*$), суть независимые датчики (НД) по отношению к $\alpha(i,j)$.

Тривиальной системой независимых датчиков по отношению к любому $\alpha(i,j)$ является $X(i,j)$. Для некоторых элементов из $\mathcal{G}$ могут существовать СНД, отличные от тривиальной системы.

Пусть элемент $\alpha(i,j)$ имеет несколько различных СНД: $\mathcal{H}_{\kappa}(i,j)$. Ближайшей системой независимых датчиков (БСНД) назовем ту из них, вес предыстории которой максимален. Иногда БСНД совпадает с подмножеством входов схемы.

Пример 5. В схеме I (см. приложение, стр.52), элемент V (3,I) имеет БСНД, состоящую из трех входов (B,C,Д). Элемент V (5,I) имеет БСНД из четырех входов (A,B,C,Д).

Пример 6. В схеме 4 (приложение, стр.53), изображающей логическую сеть, элемент α (6,I) имеет нетривиальную БСНД: α (4,I), α (0,7), α (0,8), α (0,9), α (0,I0), α (I,6) (здесь два элемента не являются входными). Элемент α (2,2) той же сети (инвертор) имеет, как и всякий инвертор, БСНД, состоящую из одного элемента, в данном случае α (I,2).

Пример 7. В схеме 2 приложения элемент & (3,2) имеет БСНД (V (2,3), $\neg$ (I,5)).

При решении задачи № I для элемента $\alpha(i,j)\in\mathcal{G}$ (в предположении, что для всех предыдущих ярусов задача № I уже решена) можно независимые датчики, входящие в БСНД относительно $\alpha(i,j)$, рассматривать как независимые входы, для которых вероятности нулей и единиц уже известны. Таким образом, при решении задачи № I незачем рассматривать всю исходную схему $\mathcal{G}$; можно отбросить всю предысторию БСНД относительно $\alpha(i,j)$, оставшуюся схему упорядочить по ярусам и для нее уже решать задачу № I хотя бы методом полной переборки или каким-либо другим методом.

Построение БСНД для всех элементов схемы позволяет существенно упростить решение задачи № I (и других схемных задач).

Опишем алгоритм для построения БСНД.

Дан элемент $\alpha(i,j)\in\mathcal{G}$. Рассмотрим все входящие в него звенья (набор $\mathcal{L}$). Строим множество X_i для каждого звена $\ell_i\in\mathcal{L}$ и исследуем звенья на независимость. Для каждого независимого звена отмечаем элемент, из которого выходит данное

звено. Предысторию отмеченного элемента исключаем из дальнейшего рассмотрения.

Если не все звенья оказались независимыми, то переходим к рассмотрению звеньев предыдущего яруса, принадлежащих $\mathcal{M}_0$ за исключением звеньев, принадлежащих предыстории отмеченных элементов. Если в данном ярусе имеются разветвления, то все звенья, рассматриваемого набора, выходящие из одного и того же элемента, отождествляем и рассматриваем как одно звено. После такого отождествления вновь исследуем набор на независимость. Элементы, из которых выходят независимые звенья, отмечаем, а предысторию отмеченных элементов исключаем из дальнейшего рассмотрения.

Если же не все звенья данного набора независимы, то опять переходим к предыдущему ярусу и т.д., пока не окажется, что все звенья в ярусе, принадлежащие $\mathcal{M}_0$, независимы. Отмеченные элементы образуют БСНД по отношению к $\alpha(i,j)$. Этот алгоритм назовем алгоритмом 2 (А2).

§ 7. Алгоритм разрезания

Пусть требуется решить задачу № I для элемента $\alpha(i,j)\in\mathcal{G}$. Предполагаем, что для всех предыдущих ярусов задача № I уже решена. Если все звенья, входящие в $\alpha(i,j)$, независимы, то применяем AI. Если же не все звенья независимы, то применяем А2, т.е. строим БСНД. Если окажется, что БСНД нетривиальная, то независимые датчики рассматриваем как новые независимые входы и вводим для них обозначения. Если БСНД тривиальная, то новых обозначений не вводим. Затем выписываем операторную функцию, соответствующую элементу $\alpha(i,j)$, (если БСНД нетривиальная, то в новых обозначениях независимых переменных):

$$f(\alpha)=f(A,B,C,\dots)\ .$$

Ставим задачу: какова вероятность, что данная функция принимает значение, равное единице?

Мы хотим, чтобы преобразования, применяемые к $f(\alpha)$ для решения этой задачи, были по возможности простыми и удобными для реализации на электронных вычислительных машинах.

Предлагается следующий алгоритм - алгоритм разрезания.

Рассмотрим функцию $f(\alpha)$. Среди букв A,B,C,... найдутся такие, которые входят в явное выражение для $f(\alpha)$ более одного раза (если бы это было не так, то все звенья, входящие в $\alpha(i,j)$, были бы независимы и мы применили бы AI).

I. Подсчитываем число вхождений каждой буквы в $f(\alpha)$

$$(n_A, n_B, n_C, \dots) = \{n_i\}.$$

2. Среди чисел n_i находим максимальное и соответствующую букву (не ограничивая общности – A) полагаем равной сначала 0, потом I и для каждого случая отдельно выписываем результат подстановки соответствующей константы в $f(\alpha)$:

$$A=0\ ;\quad f_0 = f(0,B,C,\dots) = f_0(B,C,\dots)\ ,$$

$$A=1\ ;\quad f_1 = f(1,B,C,\dots) = f_1(B,C,\dots)\ .$$

Эту операцию назовем разрезанием по переменной A.

3. Преобразовываем f_0 и f_1 с помощью элементарных преобразований, указанных в следующей таблице:

$$\begin{array}{lll}
A\cdot 0 = 0 & 0\cdot A = 0 & \\
A\cdot 1 = A & 1\cdot A = A & \\
A \vee 0 = A & 0 \vee A = A & \\
A \vee 1 = 1 & 1 \vee A = 1 & (**) \\
\bar{\bar{A}} = A & A(BC) = ABC & \\
\bar{0} = 1 & A \vee (B \vee C) = A \vee B \vee C & \\
\bar{1} = 0 & AB \vee AC = A(B \vee C) & \\
 & (AB)C = ABC & \\
 & (A \vee B) \vee C = A \vee B \vee C &
\end{array}$$

4. После применения преобразований $(**)$ к функциям f_0 и f_1 для любой из них может оказаться, что она:

а) либо превращается в константу;

б) либо примет такой вид, что каждая из оставшихся букв будет входить в выражение функции не более одного раза, и тогда для дальнейших расчетов примени AI. В частности, функция может выродиться в одну из переменных в прямой форме. Тогда p и q известны из условий задачи;

в) либо примет вид, когда хотя бы одна из букв входит в явное выражение более одного раза.

Проверяется, какой из трех случаев имеет место для f_0 для f_1.

5. Когда имеет место третий случай, то для соответствующей функции опять вычисляем величины $\{n_i\}$ для всех оставшихся в явном выражении букв и опять производим разрезание функции по переменной, соответствующей максимуму n_i. Не теряя общности, предполагаем, что такой переменной окажется B (таким образом, вновь применяем пп. I–2).

Вновь полученные функции обозначаем так:

$$f_{00} = f_0(0,C,D,\dots) = f_{00}(C,D,\dots)\ ,$$

$$f_{01} = f_0(1,C,D,\dots) = f_{01}(C,D,\dots)\ ,$$

если разрезанию подверглась функция f_0, или

$$f_{10} = f_1(0,C,D,\dots) = f_{10}(C,D,\dots)\ ,$$

$$f_{11} = f_1(1,C,D,\dots) = f_{11}(C,D,\dots)\ ,$$

если разрезанию подверглась функция f_1 (конечно, может случиться, что разрезаются обе функции: и f_0, и f_1).

К полученной таким образом системе функций применяются преобразования $(**)$, (см. п.3), затем опять п. 4 и, быть может, п.5. Обозначения новых возникающих на каждом шаге функций вводятся аналогичным образом.

Пп.4 и 5 применяем до тех пор, пока на очередном шаге не окажется, что ни для одной из функций не имеет места случай в) п. 4.

Этот процесс не бесконечен, ибо, если произвести разрезания сразу по всем переменным, то мы получим только константы.

Как только процесс применения пп. I–5 закончится, приступим к подсчету вероятностей. Разрезание по переменной эквивалентно разбиению некоторого события на два непересекающихся события. Так как вероятности событий A=0, A=I, B=0, B=I и т.д. известны по условию, то, применяя теоремы о произведении и сложении вероятностей и, может быть, пользуясь результатами применения AI к промежуточным функциям, можно всегда определить вероятность обращения исходной функции $f(\alpha)$ в единицу. Описанный алгоритм назовем алгоритмом 3 (A3).

Пример 8. Рассмотрим $f(\alpha)$ для последнего элемента схемы 2 (см.приложение стр.52). На каждом входе схемы вероятность единицы равна $\frac{1}{2}$.

$$f(\alpha) = \bar{A}(\bar{B}C \vee B\bar{C}) \vee \bar{D}(AB \vee \bar{C}) \vee A\bar{B}D\ ,$$

$$B=0\ ;\quad f_0 = \bar{A}C \vee \bar{D}\bar{C} \vee AD\ ,$$

$$B=1\ ;\quad f_1 = \bar{A}\bar{C} \vee \bar{D}(A \vee \bar{C})\ ,$$

$$C=0\ ;\quad f_{00} = \bar{D} \vee AD\ ,$$

$$f_{10} = \bar{A} \vee \bar{D}\ ,\quad (\text{по AI имеем})\ q = \tfrac{3}{4}\ ;$$

$$C=1\ ;\quad f_{01} = \bar{A} \vee AD\ ,$$

$$f_{11} = \bar{D}\cdot A\ ,\quad (\text{по AI имеем})\ q = \tfrac{1}{4}\ ;$$

$D=0;\quad f_{000}=1$ (константа); $\quad q=1$;

$\qquad\quad f_{010}=\bar{A}$ (по AI имеем) $\quad q=\frac{1}{2}$;

$D=1;\quad f_{001}=A$ (входная переменная); $\quad q=\frac{1}{2}$;

$\qquad\quad f_{011}=1$ (константа); $\quad q=1$.

Вероятность обращения $f(a)$ в единицу есть

$$q_z=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdot 1+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\cdot 1=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}.$$

Выгода алгоритма разрезания по сравнению с тривиальным алгоритмом (полной переборкой) состоит в том, что промежуточные функции значительно упрощаются после преобразований $(**)$.

Итак, алгоритмы AI, A2, A3 решают задачу № I.

§ 8. Решение задачи № 2

Рассмотрим схему σ_0 и элемент $a_i\in\sigma_0$. Будем искать вероятность $\mathcal{P}(E)$ ошибки E на выходе схемы σ_0 в предположении, что сбой первого или второго рода может (с известными вероятностями $r(a_i)$ и $s(a_i)$) происходить только в элементе a_i. Остальные элементы схемы предполагаются идеальными. В дальнейшем вместо a_i будем писать просто a.

Пусть f_0 есть операторная функция схемы σ_0. Непосредственно на выходе элемента a (до разветвлений выходящих из него звеньев) ставим дополнительный элемент – инвертор и таким образом получаем новую схему – σ_1, которой соответствует операторная функция f_1.

$\varphi(a)$ есть булева функция, определяющая состояние выхода элемента a. $\varphi(a)$ может рассматриваться и как операторная функция предыстории элемента a.

Сбой называем несущественным, если он не влияет на состояние выхода z схемы σ_0. В противном случае сбой существенный. Очевидно, что сбой существенен тогда и только тогда, когда

$$f_0\neq f_1,$$

т.е. когда

$$f_0\cdot\bar{f}_1\vee\bar{f}_0\cdot f_1=1.$$

Событие E представимо в виде:

$$E=E_1+E_2,$$

где E_1 – ошибка за счет сбоя первого рода,
E_2 – ошибка за счет сбоя второго рода.

Для осуществления события E_1 необходимо, чтобы
1) на выходе a при идеальной работе была I;
2) произошел сбой первого рода;
3) этот сбой оказался существенным.

Следовательно,

$$\mathcal{P}(E_1)=q(a)r(a)\,\mathcal{P}\left\{f_0\cdot\bar{f}_1\vee\bar{f}_0\cdot f_1=1\Big/\varphi(a)=1\right\}.\qquad\text{(I)}$$

Рассмотрим функцию:

$$g_1(a)=\varphi(a)(f_0\cdot\bar{f}_1\vee\bar{f}_0\cdot f_1).$$

Вероятность равенства $g_1(a)=1$ есть

$$\mathcal{P}\{g_1(a)=1\}=\mathcal{P}\{\varphi(a)=1\}\cdot\mathcal{P}\left\{f_0\cdot\bar{f}_1\vee\bar{f}_0\cdot f_1=1\Big/\varphi(a)=1\right\}$$

Очевидно,

$$\mathcal{P}\{\varphi(a)=1\}=q(a).$$

Обозначим

$$\mathcal{P}\{g_1(a)=1\}=\mathcal{G}_1(a).$$

Тогда (I) перепишется в виде:

$$\mathcal{P}(E_1)=r(a)\cdot\mathcal{G}_1(a).$$

Аналогично имеем

$$\mathcal{P}(E_2)=p(a)s(a)\,\mathcal{P}\left\{f_0\cdot\bar{f}_1\vee\bar{f}_0\cdot f_1=1\Big/\varphi(a)=0\right\}.$$

Рассмотрим функцию

$$h_1(a)=\overline{\varphi(a)}(f_0\cdot\bar{f}_1\vee\bar{f}_0\cdot f_1).$$

Вероятность равенства $h_1(a)=1$ есть

$$\mathcal{P}\{h_1(a)=1\}=\mathcal{P}\{\overline{\varphi(a)}=1\}\cdot\mathcal{P}\left\{f_0\cdot\bar{f}_1\vee\bar{f}_0\cdot f_1=1\Big/\overline{\varphi(a)}=1\right\}=$$

$$=p(a)\cdot\mathcal{P}\left\{f_0\cdot\bar{f}_1\vee\bar{f}_0\cdot f_1=1\Big/\varphi(a)=0\right\}.$$

Обозначим

$$\mathcal{P}\{h_1(a)=1\}=\mathcal{H}_1(a).$$

Тогда

$$\mathcal{P}(E_2)=s(a)\cdot\mathcal{H}_1(a).$$

Следовательно,

$$\mathcal{P}(E)=r(a)\cdot\mathcal{G}_1(a)+s(a)\cdot\mathcal{H}_1(a). \qquad (2)$$

Величины $\mathcal{G}_1(a)$ и $\mathcal{H}_1(a)$ находятся посредством решения задачи № I. Таким образом, формула (2) сводит решение задачи № 2 к задаче № I.

Пусть E' обозначает несущественный сбой, а E_1' и E_2' – несущественные сбои первого и второго рода, соответственно.

$$E'=E_1'+E_2',$$

$$\mathcal{P}(E')=\mathcal{P}(E_1')+\mathcal{P}(E_2').$$

Событие $\bar{E}$ есть отсутствие ошибки на выходе схемы σ_0.

$$\mathcal{P}(\bar{E})=1-R(a)+\mathcal{P}(E').$$

Если сбой несущественный, то

$$f_0=f_1,$$

или, иначе,

$$\bar{f}_0\cdot\bar{f}_1\vee f_0\cdot f_1=1.$$

Тогда

$$\mathcal{P}(E_1')=r(a)\cdot\mathcal{G}_1'(a),$$

где $\mathcal{G}_1'(a)$ есть вероятность обращения в единицу функции

$$g_1'(a)=\varphi(a)(\bar{f}_0\cdot\bar{f}_1\vee f_0\cdot f_1).$$

Аналогично,

$$\mathcal{P}(E_2')=s(a)\cdot\mathcal{H}_1'(a),$$

где $\mathcal{H}_1'(a)$ есть вероятность обращения в единицу функции

$$h_1'(a)=\overline{\varphi(a)}(\bar{f}_0\bar{f}_1\vee f_0\cdot f_1).$$

Следовательно,

$$\mathcal{P}(E')=r(a)\mathcal{G}_1'(a)+s(a)\mathcal{H}_1'(a), \qquad (3)$$

$$\mathcal{P}(\bar{E})=1-R(a)+r(a)\mathcal{G}_1'(a)+s(a)\cdot\mathcal{H}_1'(a).$$

Формулу (3) можно получить также непосредственно из равенства (2), учитывая, что

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{G}_1(a)+\mathcal{G}_1'(a)&=q(a),\\ \mathcal{H}_1(a)+\mathcal{H}_1'(a)&=p(a).\end{aligned}\right\}$$

Имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\bar{E})&=1-\mathcal{P}(E)=1-r(a)\mathcal{G}_1(a)-s(a)\mathcal{H}_1(a)=\\ &=1-r(a)[q(a)-\mathcal{G}_1'(a)]-s(a)[p(a)-\mathcal{H}_1'(a)]=\\ &=1-r(a)q(a)-s(a)p(a)+r(a)\mathcal{G}_1'(a)+s(a)\mathcal{H}_1'(a).\end{aligned}$$

Но

$$r(a)q(a)+s(a)p(a)=R(a).$$

Следовательно,

$$\mathcal{P}(\bar{E})=1-R(a)+r(a)\mathcal{G}_1'(a)+s(a)\mathcal{H}_1'(a).$$

В следующем параграфе показывается, каким образом формулы (2) и (3) можно несколько упростить.

§ 9. Вырезание и генерация

Частный случай, когда $r(a)=1$, $s(a)=0$, можно рассматривать как вырезание элемента a из схемы σ_0. Тогда

$$\mathcal{P}(E)=\mathcal{G}_1(a). \qquad (4)$$

Другой частный случай, когда $r(a)=0, s(a)=1$, назовем генерацией ложных импульсов в элементе, или, кратко, генерацией.

В этом случае

$$\mathcal{P}(E)=\mathcal{H}_1(a). \qquad (5)$$

Формулы (4) и (5) допускают упрощение.

Введем два новых типа элементов:

Г) Постоянный нуль, или обрыв.

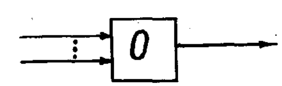

Рис. 7.

2) Постоянную единицу, или г е н е р а т о р.

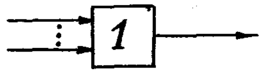

Рис. 8.

Количество входов у этих элементов произвольное. Обрыв есть элемент, выдающий всегда нуль, независимо от состояний входов. Генератор всегда вырабатывает единицу.

Заменяя в схеме σ_0 элемент a на обрыв, получаем схему σ_2 с операторной функцией f_2 ; заменяя в σ_0 элемент a на генератор, получаем схему σ_3 с операторной функцией f_3 . Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} f_0\cdot\bar f_2 \vee \bar f_0\cdot f_2 &= g_2(a)\\ \bar f_0\cdot\bar f_2 \vee f_0\cdot f_2 &= g_2'(a)\\ f_0\cdot\bar f_3 \vee \bar f_0\cdot f_3 &= h_2(a)\\ \bar f_0\cdot\bar f_3 \vee f_0\cdot f_3 &= h_2'(a)\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{P}\{g_2(a)=1\} &= \mathcal{G}_2(a)\\ \mathcal{P}\{g_2'(a)=1\} &= \mathcal{G}_2'(a)\\ \mathcal{P}\{h_2(a)=1\} &= \mathcal{H}_2(a)\\ \mathcal{P}\{h_2'(a)=1\} &= \mathcal{H}_2'(a)\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Легко показать, что при вырезании элемента a справедливы формулы:

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{P}(E)=\mathcal{G}_2(a),\\ &\mathcal{P}(E')=\mathcal{G}_2'(a),\\ &\mathcal{P}(\bar E)=1-R(a)+\mathcal{G}_2'(a)=\rho(a)+\mathcal{G}_2'(a).\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

При генерации в элементе a :

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{P}(E)=\mathcal{H}_2(a),\\ &\mathcal{P}(E')=\mathcal{H}_2'(a),\\ &\mathcal{P}(\bar E)=1-R(a)+\mathcal{H}_2'(a)=q(a)+\mathcal{H}_2'(a)\end{aligned}\right\}. \qquad (9)$$

Функции $g_2(a), g_2'(a), h_2(a), h_2'(a)$ проще, чем функции $g_1(a), g_1'(a), h_1(a), h_1'(a)$, и поэтому они удобнее для вычислений.

Рассуждая аналогично, мы можем теперь вместо формул (2) и (3) дать эквивалентные им формулы (IO), (II):

$$\mathcal{P}(E)=r(a)\mathcal{G}_2(a)+S(a)\mathcal{H}_2(a), \qquad (IO)$$

$$\mathcal{P}(\bar E)=1-R(a)+r(a)\mathcal{G}_2'(a)+S(a)\mathcal{H}_2'(a). \qquad (II)$$

З а м е ч а н и е. Для практических вычислений формулы (I) - (II) не всегда выгодны. Во многих частных случаях можно найти более быстрые способы нахождения величин $\mathcal{P}(E)$ и $\mathcal{P}(\bar E)$.

§ IO. Решение задачи № 2 для постоянной одиночной неисправности

Постоянная, т.е. одинаковая для всех тактов, одиночная неисправность в схеме σ состоит в том, что некоторый элемент $a\in\sigma$, который при нормальной работе реализует на своем выходе функцию $\varphi(a)$, фактически реализует некоторую другую функцию $\psi(a)$, а все остальные элементы работают исправно. При этом схема σ , имеющая операторную функцию f ,переходит в схему σ^* с операторной функцией f^* . Такое событие назовем ψ -неисправностью.

Если ввести функцию

$$g(a)=f\cdot\bar f^*\vee\bar f\cdot f^*$$

и вероятность

$$\mathcal{G}(a)=\mathcal{P}\{f\cdot\bar f^*\vee\bar f\cdot f^*=1\},$$

то вероятность ошибки на выходе схемы при наличии в ней ψ -неисправности определится формулой:

$$\mathcal{P}(E)=\mathcal{G}(a).$$

Для доказательства формулы (II) следует повторить с очевидными видоизменениями рассуждения двух предыдущих параграфов.

Задача легко распространяется на случай, когда элемент $a\in\sigma$ может проявлять неисправности нескольких типов, определяемых соответственно функциями

$$\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_k$$

с вероятностями их возникновения

$$r_1, r_2, \ldots, r_k .$$

Тогда решение дается формулой:

$$\mathcal{P}(E) = \sum_{i=1}^{i=k} r_i \mathcal{G}_i(a), \tag{12}$$

где каждая из величин $\mathcal{G}_i(a)$ вычисляется для соответствующей ψ_i -неисправности.

Частными случаями постоянных ψ -неисправностей являются рассмотренные в § 10 вырезание и генерация.

Функции ψ_i можно рассматривать и как возможные типы случайных сбоев внутри одного такта с вероятностями r_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

З а м е ч а н и е. При наличии ψ -неисправности в элементе a этот элемент может иногда, в зависимости от состояний входящих в него звеньев, давать правильные результаты. Например, если элемент a, реализующий в идеальном случае конъюнкцию AB, фактически реализует дизъюнкцию $A \vee B$, то при A = 1, B = 1 на выходе элемента правильный результат. Тем не менее мы говорим о наличии в нем неисправности.

В ы в о д ы

Методы анализа надежности однотактных схем, предлагаемые в данной работе, позволяют:

1. Определять частоту срабатываний элементов схемы.

2. Оценивать важность каждого элемента схемы, т.е. устанавливать, насколько сильно отражается на работе всей схемы неисправность в каком-либо из элементов.

3. Определять, какие из элементов следует делать особо надежными.

4. Сравнивать различные однотактные схемы, реализующие одну и ту же функцию, по их надежности и посредством такого сравнения выбирать схемы с повышенной надежностью.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

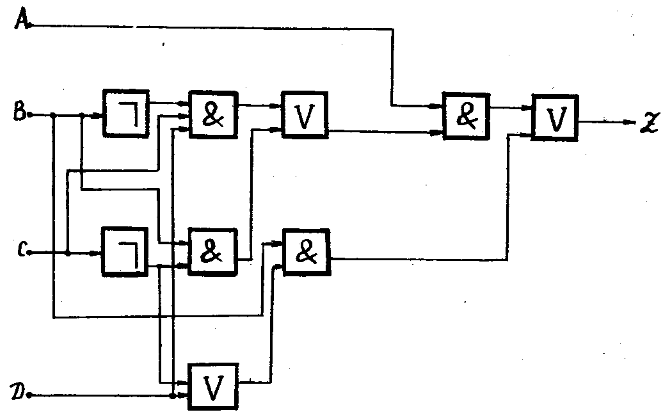

СХЕМА I

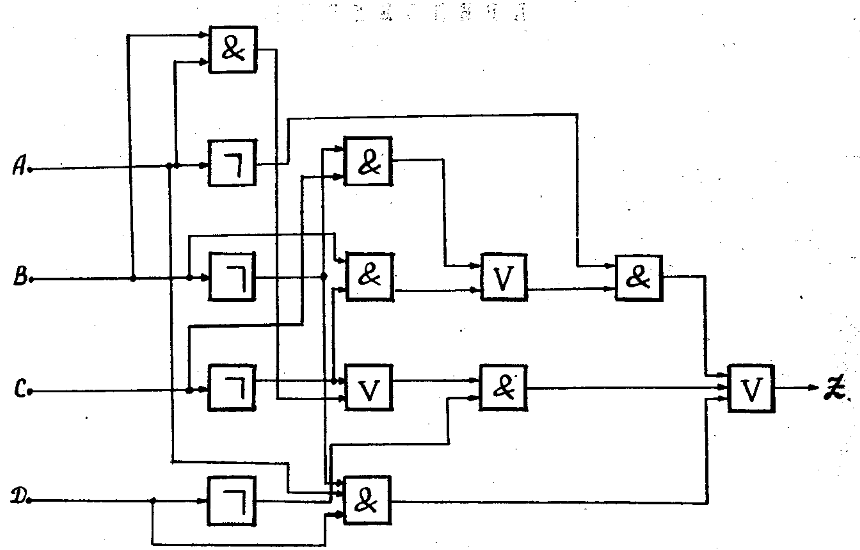

СХЕМА 2

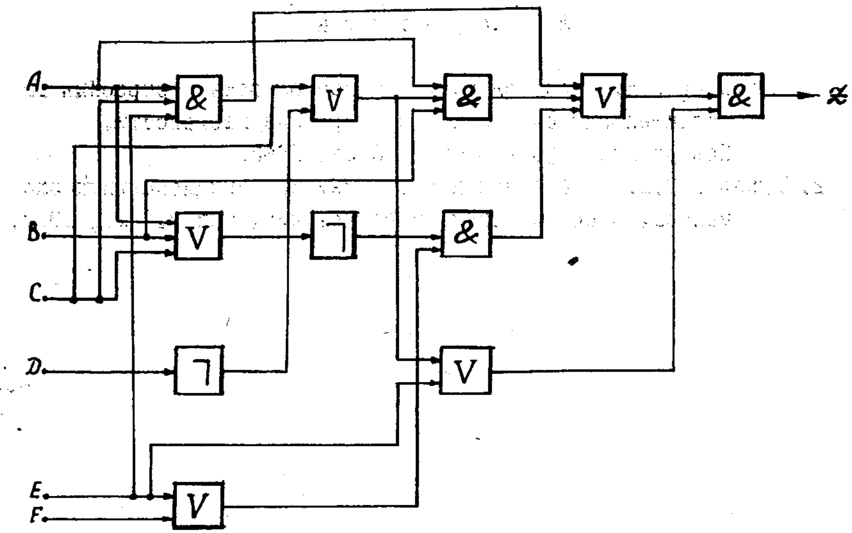

СХЕМА 3

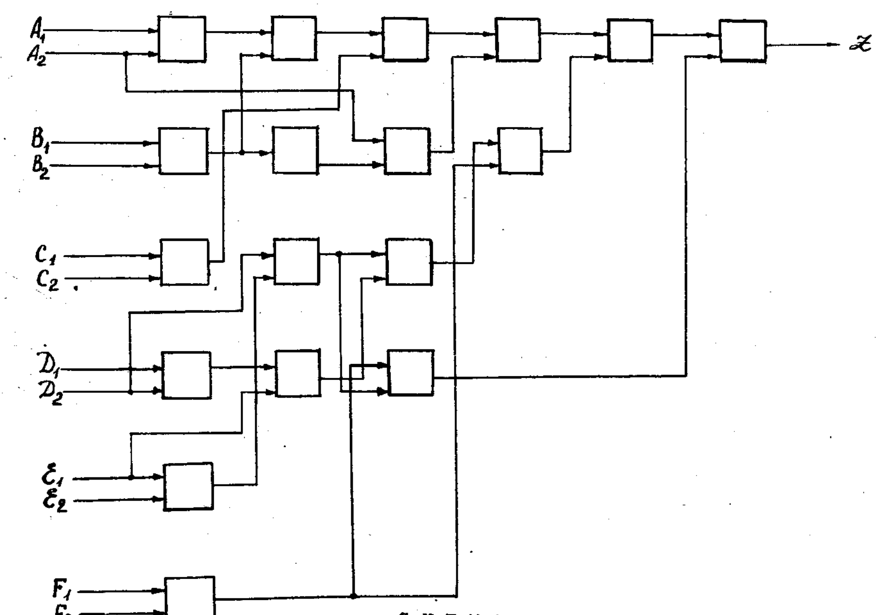

СХЕМА 4

Литература

I. Евреинов Э.В., Косарев Ю.Г. О возможности построения вычислительных систем высокой производительности. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, I962.

2. Лупанов О.Б. Об одном классе схем из функциональных элементов. В сб."Проблемы кибернетики", вып.7. М., I962.