ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Сборник трудов
1963 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 5

О НАДЕЖНОСТИ МНОГОТАКТНЫХ СХЕМ С МАЛОЙ ПАМЯТЬЮ

С.В. Макаров

Создание вычислительных систем высокой производительности [I] остро ставит проблему надежности.

В настоящей статье предлагается алгоритм для численной оценки надежности многотактных схем с небольшим количеством внутренних состояний (т.е. с малой памятью). Надежность схемы определяется в § 3 как вероятность получения правильного результата на выходе схемы в произвольно взятом такте работы. В § I и 2 рассматриваются некоторые вспомогательные задачи. В целом данная работа является продолжением работы [2].

§ I. Предварительное преобразование схемы

Под *многотактной схемой* (МС) будем понимать логическую сеть в смысле определения, данного в монографии [3].

Рассмотрим некоторую МС $\mathfrak{S}$. Каждый из элементов, принадлежащих $\mathfrak{S}$, реализует некоторый ограниченно-детерминированный оператор ([3], стр. I07-I08). В $\mathfrak{S}$ могут быть обратные связи, идущие через элементы задержки на один такт. Для определенности примем, что каждый канал схемы может находиться в одном из двух состояний: 0 или I.

Для упрощения дальнейших рассуждений избавимся от элементов задержки, заменив каждый из них некоторым фиктивным элементом. Пусть z_i - элемент задержки на один такт. Канал, входящий в z_i, обрываем, а на всех каналах, выходящих из z_i (таких каналов при наличии разветвлений может быть несколько), ставим один и тот же элемент β_i без входов, имеющий два состояния: q_1 и q_2. В каждом такте элемент β_i вырабатывает на своем выходе либо 0, либо I, в зависимости от того, в каком из состояний - q_1 или q_2 - он находится. Состояние $q(t+1)$ элемента β_i в такте $t+1$ полностью определяется состоянием канала, подходящего к z_i, в такте t. Нетрудно написать систему канонических уравнений для элемента β_i, аналогично тому, как это делается в [3].

Очевидно, что после такой замены всех элементов задержки z_i на элементы β_i исчезают все обратные связи, имевшиеся в схеме σ. Полученная таким образом МС S обладает следующими свойствами:

I) является логической сетью [3],

2) не содержит обратных связей и элементов задержки,

3) на каждом такте $S(t)$ эквивалентна некоторой однотактной схеме [2],[4],

4) на каждом такте состояние её выхода z описывается одной из не зависящих от времени булевых функций $f_i\ (i=1,2,\dots,m)$ где m - число различных состояний этой схемы. Состояния схемы S и функции f_i находятся во взаимно однозначном соответствии.

Нетрудно показать, что всякую МС σ можно привести к схеме типа S. Описанное преобразование обозначим $\sigma \to S$. Впредь будем считать, что преобразование $\sigma \to S$ выполнено.

§ 2. Задача № I для МС

Рассмотрим схему S_0, составленную из N функциональных элементов $\alpha_j\ (j=1,2,\dots,N)$, каждый из которых может находиться в одном из m_j состояний (некоторые m_j могут равняться единице). Предположим, что S_0 имеет n независимых входов $x_1, x_2, \dots, x_n$ и один выход z. На входы подается случайный поток чисел 0,I с известным распределением вероятностей. Состояние Q схемы S_0 есть вектор, компонентами которого являются состояния отдельных элементов

$$Q=(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Возьмем некоторое другое состояние:

$$Q'=(q_1', q_2', \dots, q_n').$$

Переход схемы S_0 из состояния Q в момент t в состояние Q' в момент $t+1$ эквивалентен совместному осуществлению элементарных переходов:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 \to q_1' \\ q_2 \to q_2' \\ \dots\dots\dots \\ q_n \to q_n' \end{array}\right\}$$

Нетрудно показать, что логическое условие для каждого элементарного перехода $q_i \to q_i'$ может быть записано на языке исчисления высказываний, причем таким образом, что переход $q_i \to q_i'$ будет эквивалентен обращению в единицу некоторой булевой функции

$$\varphi(q_i \to q_i').$$

Если каждый из функциональных элементов α_j есть однотактная схема, то данное утверждение выполняется тривиальным образом. Если среди элементов α_i есть МС, то с помощью преобразований $\sigma \to S$ мы можем превратить каждую МС в схему типа S и тогда наше утверждение становится очевидным.

Отсюда следует, что каждому переходу $Q \to Q'$ соответствует конъюнктивная форма $C(Q \to Q')$:

$$C(Q \to Q') = \mathop{\&}_{i=1}^{N} \varphi(q_i \to q_i'), \qquad (I)$$

и вероятность перехода $Q \to Q'$ есть вероятность обращения функции $C(Q \to Q')$ в единицу. Задача о вычислении вероятности обращения булевой функции в единицу рассмотрена в работах [2], [5], где предложен ряд алгоритмов для ее решения и где она была названа "задачей № I".

Пусть $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ - все состояния схемы S_0.

Переход $Q_i \to Q_j$ будем называть i,j -переходом. Каждому i,j -переходу соответствует конъюнктивная форма $C(i,j)$, которая строится так же, как и форма (I). Вероятность i,j -перехода обозначим через $\mathcal{P}(i,j)$. Очевидно, что $\mathcal{P}(i,j)$ равна вероятности обращения $C(i,j)$ в единицу:

$$\mathcal{P}(i,j) = \mathcal{P}\{C(i,j)=1\} \qquad (2)$$

Совокупность величин $\mathcal{P}(i,j)$ образует матрицу переходов:

$$\mathcal{T}_1 = \left\| \begin{matrix} \mathcal{P}(1,1), \mathcal{P}(1,2), \ldots, \mathcal{P}(1,m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathcal{P}(m,1), \mathcal{P}(m,2), \ldots, \mathcal{P}(m,m) \end{matrix} \right\| \qquad (3)$$

Так как для вычисления вероятности перехода $Q_i \to Q_j$ не требуется знания предыстории, то последовательность состояний схемы S_0 может рассматриваться как однородная марковская цепь [6].

Рассмотрим s -ую степень матрицы $\mathcal{T}_1$.

Если при некотором s все элементы матрицы $\mathcal{T}_1^s$ положительны (что выполняется в большинстве практически интересных случаев), то применима теорема о предельных вероятностях, по которой вероятности p_j пребывания схемы S_0 в j -м состоянии (j =I,2 ... m) находятся как элементы предельной матрицы

$$\mathcal{T} = \lim_{n \to \infty} \mathcal{T}_1^n , \qquad (4)$$

причем p_j есть общее значение элементов j -го столбца матрицы $\mathcal{T}$ (см. [6]).

З а м е ч а н и е. Часто для получения хорошего приближения к матрице $\mathcal{T}$ достаточно 3-4 раза выполнить последовательное возведение матрицы в квадрат. Однако при увеличении порядка матрицы (3) вычислительные трудности резко возрастают, и это обстоятельство делает невозможным непосредственное применение описываемого алгоритма к схемам с большим количеством внутренних состояний.

После того как подсчитаны вероятности переходов $\mathcal{P}(i,j)$ и по ним определены предельные вероятности p_j пребывания схемы S_0 в j -м состоянии, легко найти априорную вероятность единицы на выходе z схемы S_0 в некотором произвольно взятом такте (при условии, что перед этим схема S_0 уже проработала много тактов, так что имеет смысл говорить о предельных вероятностях).

Имеем

$$\mathcal{P}(z=1) = \sum_{j=1}^{m} p_j \, \mathcal{P}(f_j = 1) . \qquad (5)$$

(Напомним, что f_j есть булева функция, реализуемая схемой S_0 в j -м состоянии).

Следуя принятой в [2] терминологии, назовем задачу об отыскании вероятности $\mathcal{P}(z=1)$ "задачей № I для МС". Формула (5) показывает, что она сводится к задаче № I для однотактных схем.

§ 3. Задача № 2 для МС

Событие, состоящее в появлении на выходе z схемы S_0 неправильного сигнала (0 вместо I или I вместо 0), назовем о ш и б к о й н а в ы х о д е и будем обозначать его буквой E . Обратное событие обозначим $\bar{E}$. Соответствующие вероятности суть $\mathcal{P}(E)$ и $\mathcal{P}(\bar{E})$.

При наличии в S_0 одного или нескольких неисправных элементов схема S_0 фактически превращается в некоторую новую схему S_i . Такое событие назовем S_i -неисправностью.

Пусть известно, что может произойти одна из неисправностей, переводящая S_0 в одну из схем

$$S_0, S_1, S_2, \ldots, S_K$$

с вероятностями

$$\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_K .$$

S_0 - неисправность есть "нулевая неисправность", переводящая схему S_0 в себя.

Мы будем предполагать, что события образуют полную систему событий и, следовательно,

$$\sum_{i=0}^{K} \tau_i = 1 . \qquad (6)$$

На практике иногда оказывается возможным среди всех могущих иметь место неисправностей выбрать небольшое количество наиболее вероятных, образующих "почти полную" систему событий в том смысле, что равенство (6) выполняется с достаточной точностью.

Вероятность ошибки на выходе за счет S_i - неисправности обозначим $\mathcal{P}_i(E)$.

Допустим, что в схеме S имеется S_i -неисправность. Найдем $\mathcal{P}_i(E)$. Построим вспомогательную схему S_i^*

$$S_i^* = (S_0 \& \bar{S}_i) \vee (\bar{S}_0 \& S_i) . \qquad (7)$$

Очевидно, что формула (7) выражает условие неэквивалентности схем S_0 и S_i . Правая часть обращается в единицу тогда и только тогда, когда состояние выхода схемы S_i отличается от состояния выхода схемы S_o. Следовательно,

$$\mathcal{P}_i(E) = \mathcal{P}(S_i^* = 1). \tag{8}$$

Таким образом, чтобы найти $\mathcal{P}_i(E)$, требуется решить задачу № I для S_i^*.

Учитывая вероятности r_i возникновения S_i -неисправности, получаем:

$$\mathcal{P}(E) = \sum_{i=1}^{K} r_i \, \mathcal{P}_i(E), \tag{9}$$

$$\mathcal{P}(\bar{E}) = 1 - \sum_{i=1}^{K} r_i \mathcal{P}_i(E). \tag{10}$$

Задачу об определении $\mathcal{P}(E)$ назовем "задачей № 2 для МС". Из равенств (8) и (9) следует, что она сводится к задаче № I для однотактных схем.

Величину $\mathcal{P}(\bar{E})$ назовем *надежностью схемы* S_o. Таким образом, надежность схемы S_o есть вероятность выдачи правильного результата на выходе Z схемы S_o в произвольно взятом такте. Данное определение нельзя считать универсальным в силу многих ограничительных допущений, сделанных выше. Для схем с малой памятью (порядка I0-20 состояний) все вычисления могут быть выполнены до конца без существенного усовершенствования алгоритма.

Следует отметить, что понимание надежности как вероятности исправной работы в произвольном фиксированном такте хорошо согласуется с интуитивными представлениями о надежности.

Литература

I. Евреинов Э.В. и Косарев Ю.Г. О возможности построения вычислительных систем высокой производительности. Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, I962.

2. Макаров С.В. Вероятностные расчеты однотактных схем. Сб. "Вычислительные системы", вып.4, I962, Новосибирск.

3. Кобринский Н.Е. и Трахтенброт Б.А. Введение в теорию конечных автоматов. М., I962.

4. Лупанов О.Б. Об одном классе схем из функциональных элементов. Сб. "Проблемы кибернетики", вып.7, М., I962.

5. Мерекин Ю.В. Решение задач вероятностного расчета однотактных схем методом ортогонализации. Сб. "Вычислительные системы", вып. 5, I963, Новосибирск.

6. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М., I96I.