В Ы Ч И С Л И Т Е Л Ь Н Ы Е С И С Т Е М Ы

Сборник трудов

1963 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 5

О РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ

Г.А. Бекишев

Одной из задач, сформулированных в работе [1] в связи с построением вычислительных систем, является изучение свойств алгоритмов для определения возможности представить процесс их реализации в виде большого числа параллельно выполняемых операций. Эта задача, в частности, включает в себя оценку минимальной длины алгоритма и минимального числа машин для его реализации. Данная статья посвящена получению оценок этого рода для некоторых простейших задач линейной алгебры. С этой целью задача распараллеливания алгоритмов рассматривается в статье как некоторая задача теории графов.

1. На языке теории графов задача распараллеливания алгоритмов может быть сформулирована следующим образом.

Пусть A - некоторый вычислительный алгоритм, X - множество операций, составляющих A. Полагая $y \in \Gamma x$ в том случае, когда результат операций x служит аргументом в операции y, представим A в виде графа $G=(X,\Gamma)$.

Будем говорить, что последовательность множеств

$$S_0, S_1, \ldots; S_\alpha, \ldots, S_\alpha \subset X$$

образует A -разбиение графа $G=(X,\Gamma)$, если выполняются следующие условия:

1) $S_\alpha \neq \varnothing$,

2) $S_\alpha \cap S_\beta = \varnothing$, $\alpha \neq \beta$,

3) $\bigcup_\alpha S_\alpha = X$,

4) $\Gamma S_\alpha \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta$.

Нетрудно видеть, что всякое A -разбиение графа G будет соответствовать некоторому распараллеливанию алгоритма A и обратно. Очевидно также, что A -разбиение графа G с минимальным числом классов S_α будет характеризовать минимальную длину алгоритма A.

2. Выясним теперь в общем виде вопрос о том, какие графы допускают A -разбиения, и укажем способ нахождения минимального A -разбиения графа G в том случае, когда такие разбиения возможны для G.

ТЕОРЕМА 1. **Всякий прогрессивно конечный граф $G=(X,\Gamma)$ допускает A-разбиение. Обратно, граф, допускающий A-разбиение, является прогрессивно конечным.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть граф $G=(X,\Gamma)$ прогрессивно конечен, т.е. не содержит путей бесконечной длины.

Построим следующую последовательность множеств:

$$X(0)=\{x/x\in X, \Gamma x = \varnothing\},$$
$$X(1)=\{x/x\in X, \Gamma x \subseteq X(0)\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X(\alpha)=\begin{cases} \{x/x\in X, \Gamma x \subseteq X(\alpha-1)\}, & \text{если } \alpha \text{ -порядковое число 1-го рода.} \\ \bigcup_{\beta<\alpha} X(\beta) & \text{если } \alpha \text{ - порядковое число 2-го рода.} \end{cases}$$

С помощью множеств $X(\alpha)$ индуктивно определим новую последовательность множеств:

$$S_0, S_1, S_2, \ldots S_\alpha, \ldots,$$

полагая

$$S_0=X(0), \quad S_1=X(1)\setminus X(0), \qquad \text{и т.д.}$$

Если множества S_β определены уже для всех порядковых чисел $\beta<\alpha$, то полагаем $S_\alpha = X(\alpha)\setminus X(\alpha-1)$, если α – порядковое число I-го рода и $S_\alpha=\varnothing$, если α – 2-го рода.

Покажем, что множества S_α при непредельных α образуют A -разбиение графа G.

В самом деле, применяя трансфинитную индукцию, легко убедимся прежде всего в том, что множества $X(\alpha)$ образуют неубывающую последовательность:

$$X(0)\subseteq X(1)\subseteq \ldots\ldots \subseteq X(\alpha)\subseteq \ldots\ldots,$$

стабилизирующуюся на некотором порядковом числе τ, мощность которого не превосходит, очевидно, мощности множества X.

Множество X будет суммой этой последовательности:

$$X=\bigcup_\alpha X(\alpha). \qquad (I)$$

Действительно, предположим, что $\bigcup_\alpha X(\alpha)\subset X$. Полагаем $Y=X\setminus\bigcup_\alpha X(\alpha)$. Тогда $Y\neq\varnothing$, причем $y\in Y$ лишь в том случае, когда $\Gamma y\not\subseteq \bigcup_\alpha X(\alpha)$. Возьмем $y_1\in Y$. Так как $\Gamma y_1\not\subseteq\bigcup_\alpha X(\alpha)$, то в Γy_1 найдется $y_2\in Y$. Аналогично, в Γy_2 найдется $y_3\in Y$ и т.д.

Продолжая этот процесс, мы построим бесконечный путь $\mu[y_1,y_2,\ldots]$ вопреки предположению, что граф $G=(X,\Gamma)$ прогрессивно конечный. Тем самым равенство (I) доказано.

Покажем теперь, что все условия в определении A - разбиения графа G для множеств S_α (при непредельных α) выполнены.

I) $\bigcup_\alpha S_\alpha = X$. В самом деле, пусть $x\in X$. Тогда можно указать такое α, что $x\in X(\alpha)$, но $x\,\bar{\in}\,X(\beta)$ при $\beta<\alpha$. Очевидно, что α будет необходимо порядковым числом I-го рода. Отсюда следует, что $x\in S_\alpha$, т.е. $X\subseteq\bigcup_\alpha S_\alpha$, и потому $X=\bigcup_\alpha S_\alpha$.

2) Очевидно, что $S_\alpha\neq\varnothing$ и $S_\alpha\cap S_\beta=\varnothing$ при $\alpha\neq\beta$.

3) Наконец, $\Gamma S_\alpha\subseteq\bigcup_{\beta<\alpha}S_\beta$. Действительно, так как α – непредельное порядковое число, то

$$S_\alpha = X(\alpha)\setminus X(\alpha-1). \qquad \text{Но} \qquad \Gamma X(\alpha)\subseteq X(\alpha-1),$$

значит, $\Gamma S_\alpha\subseteq X(\alpha-1)$. С другой стороны, $X(\alpha-1)=\bigcup_{\beta\le\alpha-1}S_\beta$, поэтому $\Gamma S_\alpha\subseteq\bigcup_{\beta<\alpha}S_\beta$.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть множества $S_0,S_1,\ldots,S_\alpha,\ldots,S_\alpha\subset X$ образуют A -разбиение графа $G=(X,\Gamma)$. Предположим, что граф G не прогрессивно конечный. Тогда су-

ществует некоторый бесконечный путь $\mu[y_1,y_2,\ldots\ldots]$. Обозначим через Y множество вершин пути μ. По самому определению A -разбиения графа G следует, что $\Gamma S_0=\varnothing$. Следовательно, $Y\cap S_0=\varnothing$. Пусть уже $Y\cap S_\beta=\varnothing$ для всех $\beta<\alpha$. Покажем, что $Y\cap S_\alpha=\varnothing$. Действительно, если $Y\cap S_\alpha\neq\varnothing$, то некоторое $y_i\in S_\alpha$. Но $\Gamma S_\alpha\subseteq\bigcup_{\beta<\alpha}S_\beta$, т.е. $y_{i+1}\in\bigcup_{\beta<\alpha}S_\beta$, что противоречит равенству $Y\cap S_\beta=\varnothing$ для всех $\beta<\alpha$. Таким образом, теорема I полностью доказана.

ТЕОРЕМА 2. Мощность множества классов S_α A-разбиения графа $G=(X,\Gamma)$, построенного так же, как и в теореме I, не превосходит мощности множества классов $\bar S_\alpha$ произвольного A-разбиения этого графа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имея в виду последующие приложения этой теоремы, ограничимся случаем, когда граф G конечный. Пусть множества $S_0,S_1,\ldots,S_\alpha$ образуют A -разбиение графа G, как в теореме I, а множества $\bar S_0,\bar S_1,\ldots,\bar S_\beta$ образуют произвольное A -разбиение этого графа. Требуется доказать, что $\alpha\le\beta$.

Если $\bar x\in\bar S_0$, то $\Gamma\bar x=\varnothing$, а так как $S_0=\{x/x\in X,\ \Gamma x=\varnothing\}$, то отсюда следует, что $\bar S_0\subseteq S_0$. Пусть уже $\bigcup_{j=0}^{k}\bar S_j\subseteq\bigcup_{j=0}^{k}S_j$ для некоторого k. Покажем, что тогда и $\bigcup_{j=0}^{k+1}\bar S_j\subseteq\bigcup_{j=0}^{k+1}S_j$. Действительно, каково бы ни было

$$\bar x\in\bigcup_{j=0}^{k+1}\bar S_j \qquad \Gamma\bar x\subseteq\bigcup_{j=0}^{k}\bar S_j\subseteq\bigcup_{j=0}^{k}S_j,$$

т.е. $\bar x\in\bigcup_{j=0}^{k+1}S_j$. Если бы было $\beta<\alpha$, то $X=\bigcup_{j=0}^{\beta}\bar S_j\subseteq\bigcup_{j=0}^{\beta}S_j\subset\bigcup_{j=0}^{\alpha}S_j=X$, что, очевидно, невозможно.

Теорема доказана.

3. Если A – конечный алгоритм, то ему соответствует, очевидно, прогрессивно конечный граф $G=(X,\Gamma)$. Построив для G A -разбиение так, как в теореме I, мы охарактеризуем, согласно теореме 2, минимальную длину алгоритма A. Заметим, что принятое здесь определение минимальной длины A как числа классов S_α в минимальном A -разбиении графа G, соответствующего A, совпадает с тем определением, которое дано в работе [I]. Чтобы в этом убедиться, достаточно построить минимальное A -разбиение для графа $G^{-1}=(X,\Gamma^{-1})$. Ясно, что число классов в минимальных A -разбиениях графов G и G^{-1} будет одним и тем же.

4. В некоторых случаях можно получить оценку снизу для

минимальных A -разбиений графов G , принадлежащих некоторому семейству.

Рассмотрим семейство $\mathcal{G}_n$ графов $G_n=(X,\Gamma)$ следующего вида:

а) каждый граф семейства $\mathcal{G}_n$ прогрессивно конечен;

в) каждый граф $G_n \in \mathcal{G}_n$ содержит $2n-1 (n>1)$ вершин $|X|=2n-1$;

c) существует ровно n вершин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, таких, что $\Gamma^{-1}x_i=\phi$ $(i=1,2,\ldots,n)$;

d) существует одна единственная вершина $z \in X$, для которой $\Gamma z=\phi$;

e) из каждой вершины $x \neq z$ исходит ровно одна дуга;

f) в каждую вершину $x \neq x_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ заходит ровно две дуги.

ТЕОРЕМА 3. Каждый граф $G_n=(X,\Gamma)$ семейства $\mathcal{G}_n$ является деревом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что G_n является связным графом и имеет $2n-2$ ребер.

Связность графа вытекает из более общего утверждения о том, что всякий прогрессивно конечный граф $G=(X,\Gamma)$ с единственной вершиной z , для которой $\Gamma z=\phi$, является связным

В самом деле, всякий прогрессивно конечный граф будет, очевидно, индуктивен и, значит, обладает базой [2]. При этом роль базы будет играть множество $X(o)=\{x/x\in X,\ \Gamma x=\phi\}$.

Если теперь множество $X(o)$ состоит из одной вершины z, то отсюда сразу следует, что G связный. Легко подсчитать далее, что в графе G_n число дуг равно $2n-2$, но так как граф G_n не содержит контуров, то и число ребер будет равно $2n-2$.

Теорема доказана.

5. Для произвольного графа-дерева G_n семейства $\mathcal{G}_n$ рассмотрим всевозможные минимальные A -разбиения. Пусть множества $S_o, S_1, \ldots, S_{h-1}$ образуют одно из таких разбиений, а J означает число их. Будем называть число h высотой дерева G_n , число $d=\min\limits_{J} \max\limits_{o\leq i\leq h-1} |S_i|$ назовем диаметром G_n.

ТЕОРЕМА 4. Если $2^p<n\leq 2^{p+1}$, $p=0,1,2,\ldots$, то в семействе $\mathcal{G}_n$ наименьшая высота дерева равна $p+2$.

Доказательству этой теоремы предпошлем две леммы.

ЛЕММА I. Дерево G_{n+1} минимальной высоты семейства $\mathcal{G}_{n+1}$ не ниже дерева G_n минимальной высоты семейства $\mathcal{G}_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы вытекает из следующих замечаний: если $n\geqslant 2$, то среди вершин $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ графа G_{n+1} , для которых $\Gamma^{-1}x_i=\phi$, найдется по крайней мере одна такая вершина x_j , что $\Gamma x_j \neq \{z\}$ $(\Gamma z=\phi)$. Пусть это будет вершина x_{n+1} . Исходящую из нее дугу обозначим (x_{n+1}, x) , а через y_1, y_2 $(y_1<y_2)$ обозначим две другие, смежные с x вершины. Если теперь из графа G_{n+1} удалить вершины x, x_{n+1} , все инцидентные им дуги и наложить одну дугу (y_1, y_2) , то получим, очевидно, некоторый граф G_n семейства $\mathcal{G}_n$. Минимальному A -разбиению графа G_{n+1} будет тогда соответствовать некоторое A -разбиение графа G_n с небольшим числом классов, и потому дерево наименьшей высоты семейства $\mathcal{G}_n$ будет не выше дерева наименьшей высоты семейства $\mathcal{G}_{n+1}$.

ЛЕММА 2. Если множества $S_o, S_1, \ldots, S_\alpha$ образуют A -разбиение некоторого графа $G_n=(X,\Gamma)$ семейства $\mathcal{G}_n$, то число вершин множества S_i не превосходит числа 2^i , т. е. $|S_i|\leqslant 2^i$ $(i=0,1,2,\ldots,\alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем вершину $z\in X$, для которой $\Gamma z=\phi$, а через x и y обозначим смежные с z вершины. Рассмотрим, далее, подграфы $(X_1, \Gamma x_1)$ и $(X_2, \Gamma x_2)$, порожденные соответственно множествами:

$$X_1=\hat{\Gamma}^{-1}_x=\{x\}\cup\Gamma^{-1}x\cup\Gamma^{-2}x\cup\ldots\quad, X_2=\hat{\Gamma}^{-1}_y=\{y\}\cup\Gamma^{-1}y\cup\Gamma^{-2}y\cup\ldots.$$

Легко видеть, что это будут некоторые графы G_K , G_m семейств $\mathcal{G}_K$ и $\mathcal{G}_m$, где $K+m=n$.

Система множеств $\bar{S}_j=X_1\cap S_j$, $j=1,2,\ldots,\alpha$ после удаления из нее пустых множеств будет, очевидно, A - разбиением графа G_K . Аналогично, множества $\bar{\bar{S}}_j=X_2\cap S_j$, $j=1,2,\ldots,\alpha$ представят некоторое A -разбиение графа G_m . Если теперь предположить, что лемма верна для всех семейств $\mathcal{G}_K$, $K<n$, то она, очевидно, будет верна и для графов семейства $\mathcal{G}_n$,так как справедливость ее для семейства $\mathcal{G}_2$ может быть установлена непосредственной проверкой.

Обратимся теперь к доказательству теоремы 4.

Пусть сначала $n=2^{p+1}$. Если бы наименьшая высота дерева в семействе $\mathcal{G}_n$ была равна $p+1$, то в силу леммы 2 оно содержало бы самое большее $\sum\limits_{i=0}^{p} 2^i=2^{p+1}-1$ вершин,в то время как каждое дерево семейства $\mathcal{G}_{2^{p+1}}$ содержит $2^{p+2}-1$ вершин. Следовательно, высота любого дерева в семействе $\mathcal{G}_{2^{p+1}}$ будет $\geq p+2$. С другой стороны, в этом семействе найдется дерево высоты $p+2$. Это будет дерево, для которого A-разбиение $S_0, S_1, \ldots, S_{p+1}$ характеризуется тем, что $|S_j| = 2^j$ для каждого j. Существование такого дерева в семействе $\mathcal{G}_{2^{p+1}}$, очевидно, обеспечено. Таким образом, наименьшая высота дерева в семействе $\mathcal{G}_{2^{p+1}}$ равна $p+2$.

Пусть теперь $2^p < n < 2^{p+1}$. Применяя лемму 2, легко сделаем заключение, что высота любого дерева в $\mathcal{G}_n$ будет $\geq p+2$. Из леммы I, однако, вытекает, что наименьшая высота дерева в семействе $\mathcal{G}_n$ не превосходит наименьшей высоты дерева в семействе $\mathcal{G}_{2^{p+1}}$, т.е. $\leq p+2$. Следовательно, наименьшая высота дерева в $\mathcal{G}_n$ равна $p+2$, и теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* n *таково, что* $2^p < n \leq 2^{p+1}$ $(p=0,1,2,\ldots)$. *Тогда наименьший диаметр дерева в семействе* $\mathcal{G}_n$ *равен* $n-2^{p-1}$, *если* $2^p < n < 2^p+2^{p-1}$, *и равен* $2(n-2^p)$, *если* $2^p+2^{p-1} \leq n \leq 2^{p+1}$.

Ограничимся доказательством второй части теоремы, так как доказательство первой части может быть проведено аналогичными рассуждениями.

Предположим, что $2^p+2^{p-1} \leq n \leq 2^{p+1}$. Из теоремы 4 следует, что наименьшая высота дерева в семействе $\mathcal{G}_n$ равна $p+2$. Возьмем некоторое дерево $G_n \in \mathcal{G}_n$ наименьшей высоты, и пусть система множеств $S_0, S_1, \ldots, S_{p+1}$ образует минимальное A-разбиение этого дерева.

Если бы диаметр d этого дерева был меньше, чем $2(n-2^p)$, то отсюда непосредственно вытекало бы, что $|S_{p+1}| < 2(n-2^p)$ и, значит, $\sum_{j=0} |S_j| > (2n-1) - 2(n-2^p) = 2^{p+1}-1$. Это, однако, невозможно, так как в силу леммы 2 всегда имеет место неравенство $\sum_{j=0} |S_j| \leq 2^{p+1}-1$.

С другой стороны, для указанных n среди деревьев наименьшей высоты в семействе $\mathcal{G}_n$ найдется дерево диаметра $d = 2(n-2^p)$. В самом деле, если $n = 2^{p+1}$, то на основании той же леммы легко сделать заключение о том, что в семействе $\mathcal{G}_{2^{p+1}}$ имеется лишь единственное дерево наименьшей высоты $p+2$, а диаметр этого дерева равен 2^{p+1}. То же самое получим и по формуле $d = 2(n-2^p)$. Если же $2^p+2^{p-1} \leq n < 2^{p+1}$, то есть $n = 2^p+2^{p-1}+j$, $j = 0,1,\ldots,2^{p-1}-1$, то в названном выше дереве $G_{2^{p+1}} = (X,\Gamma)$ семейства $\mathcal{G}_{2^{p+1}}$ рассмотрим подграф, порожденный множеством вершин $X \setminus B$, где

B – какое-либо множество из $2^p - 2j$ вершин x_i графа $G_{2^{p+1}}$, таких, что $\Gamma^{-1}x_i = \varnothing$. Нетрудно видеть, что этот подграф принадлежит семейству $\mathcal{G}_n$, при $n = 2^p+2^{p-1}+j$, причем его диаметр равен

$$d = 2^{p+1} - (2^p - 2j) = 2^p + 2j = 2(n-2^p).$$

Что и требовалось доказать.

6. Применяя доказанные теоремы, определим минимальную длину h алгоритмов для решения некоторых задач линейной алгебры, а также минимальное число N машин для их реализации.

а) *Скалярное произведение двух векторов.* По определению скалярным произведением двух векторов $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называется величина

$$(a,b) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i. \qquad (2)$$

Из формулы (2) следует, что для вычисления (a,b) потребуется n операций умножения и $n-1$ операций сложения. Если, как ранее, каждый алгоритм, представленный формулой (2), изобразить графом G_n, то множество всех алгоритмов для вычисления скалярного произведения (a,b) представится семейством $\mathcal{G}_n$. При этом, очевидно, дерево наименьшей высоты и наименьшего диаметра в $\mathcal{G}_n$ охарактеризует как h, так и N. Таким образом, в силу теорем 4 и 5 имеем:

Если $2^p < n \leq 2^{p+1}$, $p = 0,1,2,\ldots$, то минимальная из длин алгоритмов для вычисления скалярного произведения двух векторов длины n равна $p+2$; минимальное число N машин равно $N = n-2^{p-1}$ в случае, когда $2^p < n < 2^p+2^{p-1}$ и $N = 2(n-2^p)$ при $2^p+2^{p-1} \leq n \leq 2^{p+1}$.

б) *Умножение матрицы на вектор.* В результате умножения матрицы $A = (a_{ik})_1^n$ на вектор $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ получается вектор $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, компоненты c_i которого вычисляются по формулам:

$$c_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_k, \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Так как каждая компонента c_i вектора c может быть вычислена независимо от других, то, используя предыдущие результаты, получаем: при $2^p < n \leq 2^{p+1}$, $p = 0,1,2,\ldots$ минимальная из длин алгоритмов для вычисления произведения матрицы $A = (a_{ik})_1^n$ на вектор $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ равна $p+2$, а минимальное число машин равно:

$\mathcal{N} = n\ (n-2^{p-1})$, если $2^p < n < 2^p + 2^{p-1}$ и

$\mathcal{N} = 2n\ (n-2^p)$, эсли $2^p + 2^{p-1} \leq n \leq 2^{p+1}$.

в) Умножение матрицы на матрицу. Если $A = (a_{ik})_1^n$, $B = (b_{kj})_1^n$, $C = (c_{ij})_1^n$ три матрицы, такие, что $AB = C$, то $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, $i,j = 1,2,\ldots,n$. Справедлива, очевидно, следующая

ТЕОРЕМА. При $2^p < n \leq 2^{p+1}$, $p = 0,1,2,\ldots$ минимальная из длин алгоритмов для вычисления произведения AB двух матриц $A = (a_{ik})_1^n$ и $B = (b_{kj})_1^n$ равна $p+2$, а минимальное число машин равно:

$\mathcal{N} = n^2(n-2^{p-1})$, если $2^p < n < 2^p + 2^{p-1}$, и

$\mathcal{N} = 2n^2(n-2^p)$, если $2^p + 2^{p-1} \leq n \leq 2^{p+1}$.

Приведенные результаты показывают, что в ряде случаев удается доказать соответствующие теоремы о минимальной длине h алгоритмов и минимальном числе $\mathcal{N}$ машин, в которых оценка h и $\mathcal{N}$ получается по целому семейству алгоритмов, решающих данную задачу. Поэтому было бы очень важно получить такие оценки по h и $\mathcal{N}$ для возможно более широкого круга математических задач.

Литература

1. Евреинов Э.В., Косарев Ю.Г. О возможности построения вычислительных систем высокой производительности. Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1962.
2. Берж К. Теория графов и ее применения. М., Изд-во иностранной литературы, 1962.