В Ы Ч И С Л И Т Е Л Ь Н Ы Е   С И С Т Е М Ы

Сборник трудов

1963 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 6

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ

В.А. Тюренков

1. В работе [1] описывается алгоритм для нахождения кратчайшего соединения между конфигурациями B и C в процессе составления печатной монтажной схемы.

Вся площадь платы мыслится разделенной горизонтальными и вертикальными линиями на квадратные элементы со стороной, равной минимальной толщине проводника. Клеткам платы, не являющимся граничными, присваиваются (начиная с клеток, соседних с конфигурацией B) индексы 1,2,3,4 и т.д. до тех пор, пока не будет достигнута конфигурация C .

Для целей программирования существенно, чтобы при нумерации клеток можно было обойтись меньшим количеством чисел. В настоящей заметке показывается, что всегда достаточно трех индексов (1,2 и 3).

2. Дадим описание алгоритма $A(m)$ (о числовом значении m будет сказано в п.3).

Пусть (X,Γ) - неориентированный связный граф без петель [2], (B,Γ_B) и (C,Γ_C) - связные подграфы $(B\subset X, C\subset X, B\cap C=\Lambda)$.

Будем применять такие обозначения:

$$\Gamma^i(B)=\Gamma(\Gamma(\Gamma\ldots\ldots\Gamma(B)\ldots\ldots)),$$

$$\Gamma^0(B)=B,$$

$$\Gamma^{-1}(B)=\Lambda,$$

$n(\mathrm{mod}\, m)$ – наименьшее неотрицательное число, сравнимое с n по модулю m.

Алгоритм $A(m)$ нахождения кратчайшего пути, ведущего от (B,Γ_B) к (C,Γ_C), заключается в следующем.

1-й шаг. Помечаем индексом 0 вершины множества B.

2-й шаг. Помечаем последовательно вершины каждого из множеств $\Gamma^i(B)\setminus\Gamma^{i-1}(B)$ $(i=1,2\ldots)$ индексами $i\,(\mathrm{mod}\, m)$ до тех пор, пока не окажется помеченной одна из вершин множества C.

3-й шаг. Приняв помеченную вершину множества C за начало пути, обозначим ее через x_0.

4-й шаг. Выбираем во множестве $\Gamma(x_j)$ одну из вершин, помеченную индексом $i_j - 1(\mathrm{mod}\, m)$ (где i_j – индекс вершины x), и обозначим ее через x_{j+1}. Повторяем 4-й шаг до тех пор, пока не выберем одну из вершин множества B. Выбранные точки и образуют кратчайший путь от (C,Γ_C) к (B,Γ_C):

$$x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_{\rho(B,C)} = b.$$

Если каждое из множеств B и C состоит из одной вершины, а $m=\infty$, то мы получаем описанный в книге Бержа [2] алгоритм нахождения кратчайшего пути между двумя вершинами графа.

Если известна верхняя граница $S \geq \rho(B,C)$, то при использовании ЭВМ потребуется $[\log_2(\min(S,m))]+1$ двоичных разрядов для записи индекса $i(\mathrm{mod}\, m)$. Следовательно, уменьшение количества индексов может быть достигнуто за счет уменьшения числа m. В следующем пункте выясняется, при каких значениях m алгоритм $A(m)$ корректен, и находится меньшее из таких значений.

3. ТЕОРЕМА. Для любого графа задача нахождения кратчайшего пути между связными подграфами (B,Γ_B) и (C,Γ_C) может быть решена алгоритмом $A(3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $\rho(B,C)=\rho(B,x_0)$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что при выполнении 4-го шага алгоритма $A(3)$ каждая выбранная точка пути расположена к B ближе, чем предыдущая, т.е. что

$$\rho(B,x_{j+1})=\rho(B,x_j)-1.$$

Подмножества вершин графа, помеченных индексами 0,1 и 2, обозначим, соответственно, $\Gamma_0(B), \Gamma(B)$ и $\Gamma_2(B)$. Очевидно,

$$\Gamma_\ell(B)\subset \bigcup_{\substack{i\equiv \ell(\mathrm{mod}\,3)\\ i\geq 0}} (\Gamma^i(B)\setminus\Gamma^{i-1}(B)).$$

Так как $x_j\in\Gamma_{i_j}(B)$ и $x_{j+1}\in\Gamma_{i_j-1(\mathrm{mod}\,3)}(B)$, то существуют такие числа κ_1 и κ_2, что

$$x_j\in\Gamma^{\kappa_1}(B)\setminus\Gamma^{\kappa_1-1}(B), \tag{1}$$

$$x_{j+1}\in\Gamma^{\kappa_2}(B)\setminus\Gamma^{\kappa_2-1}(B), \tag{2}$$

причем

$$\kappa_1-\kappa_2 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\,3). \tag{3}$$

Из (1) и (2) следует, что $\rho(B,x_j)=\kappa_1$, $\rho(B,x_{j+1})=\kappa_2$. А так как $\rho(x_j, x_{j+1})=1$, то

$$|\kappa_1-\kappa_2|\leq 1. \tag{4}$$

Сопоставляя (3) и (4), имеем: $\kappa_1-\kappa_2=1$, т.е. $\rho(B,x_{j+1}) = \rho(B,x_j)-1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко видеть, что если множества B и C не являются смежными, то алгоритм $A(2)$ не решает задачу нахождения кратчайшего пути. В самом деле, так как алгоритм $A(2)$ использует лишь два индекса для пометки вершин графа, то при выполнении 4-го шага алгоритма $A(2)$ вершина x_{j+1} может и не оказаться к B ближе, чем x_j.

Из доказанной теоремы и замечания следует, что минимальное значение m равно 3, причем эта оценка не может быть уменьшена даже в частных случаях.

4. Алгоритм $A(3)$ был применен при составлении программы расположения печатных проводников на плате [3]. При этом граф, о котором говорится в настоящей заметке, содержательно интерпретировался следующим образом:

X – множество неграничных клеток платы,

$y=\Gamma(x)$ – отношение соседства неграничных клеток x и y.

Благодаря сокращению количества номеров оказалось возможным отводить для номера каждой клетки всего лишь два разряда в ячейках МОЗУ.

Литература

1. В.Л.Харченко. Алгоритм составления печатной монтажной схемы с помощью вычислительной машины.Отчёт. Институт математики СО АН СССР,1962.
2. К.Берж. Теория графов и её применения. ИЛ, М., 1962.
3. В.А.Тюренков. Программа расположения печатных проводников на плате. Отчет.Институт математики СО АН СССР, 1963.