ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Сборник трудов
1963 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 9

О СОБЫТИЯХ, СВЯЗАННЫХ С СЕМЕЙСТВОМ АВТОМАТОВ. I

Г.С. Плесневич

В работе предложен один способ классификации событий, в некотором смысле связанных с данным семейством автоматов. Проводимая классификация событий в известной степени отражает уровни сложности распознавания элементов события автоматами из данного семейства. С точки зрения этой классификации мы рассматриваем два семейства автоматов: семейство всех конечных автоматов и семейство автоматов, эквивалентных одномерным, односторонним, стабильным итеративным системам в смысле Ф.К. Хенни [I]. С первым семейством связывается класс всех регулярных событий, и классификация оказывается тривиальной, т.е. состоит из одного класса. Со вторым семейством связывается класс всех рекурсивных событий, и его классификация содержит бесконечное число различных классов.

§ I. Некоторые обозначения

Под алфавитом мы будем понимать любое конечное множество.

Если T - произвольный алфавит, то T^n - обозначает множество всех слов длины n в алфавите T ;

$\overline{T}$ - обозначает множество всех непустых конечных слов в алфавите T ;

T^∞ - обозначает множество всех бесконечных почти периодических слов в алфавите T, т.е. слов вида $xyy\ldots y\ldots$, где $x, y \in \overline{T}$;

t^∞ - обозначает бесконечное слово $tt\ldots t\ldots$, $t \in T$;

σ - обозначает следующую функцию $T^\infty \to T$;

$$t_i, t \in T, \ \sigma(t_1 t_2 \ldots t_n \ldots) = \begin{cases} t, & \text{если существует } k \text{ такое, что } t_n = t \text{ при } n > k; \\ \text{не определено} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если Q и R - произвольные множества, то через QR мы будем обозначать множество, элементами которого являются комбинации qr, $q \in Q$, $r \in R$.

Наконец, Σ будет обозначать двубуквенный алфавит $\{0, 1\}$, а Π - трехбуквенный алфавит $\{0, 1, \beta\}$.

§ 2. Классификация событий, связанных с произвольным семейством автоматов

В этом параграфе под автоматом мы будем понимать любой абстрактный автомат. Каждый такой автомат A задается совокупностью $(Q, U, V, \delta, \lambda, q_0)$. Здесь Q - произвольное (не обязательно конечное) множество - множество внутренних состояний автомата A ; U - входной алфавит; V - выходной алфавит; $\delta: Q \times U \to Q$ - функция переходов автомата A ; $\lambda: Q \times U \to V$ - функция выходов; q_0 - начальное состояние. Если автомат A находится во внутреннем состоянии q и на его вход поступает буква $u \in U$, то он выдает на выходе букву $\lambda(q, u)$ и переходит в новое внутреннее состояние $\delta(q, u)$.

Пусть x - произвольное слово в алфавите U. Условимся обозначать через $\overline{A}(x)$ слово в алфавите V, буквы которого есть последовательно получаемые выходы из автомата A, когда на вход A поступают последовательно буквы слова x; при этом предполагается, что автомат A находится в начальном состоянии q_0, когда на его вход поступает первая буква слова x. Отображение $x \to \overline{A}(x)$ множества $\overline{U}$ во множество $\overline{V}$ будем называть отображением, индуцированным автоматом A. Последнюю букву слова $\overline{A}(x)$ мы обозначим через $A(x)$.

Мы будем рассматривать только события, элементами которых являются двоичные слова. Таким образом, событие S - это произвольное подмножество $\overline{\Sigma}$.

Пусть задано какое-либо семейство автоматов $\mathcal{A} = \{ A \}$. Пусть также f - какая-либо функция, определенная на множестве Σ и принимающая значения во множестве N всех целых неотрицательных чисел.

О п р е д е л е н и е I. Событие S называется f - п р е д с т а в и м ы м в с е м е й с т в е $\mathcal{A}$, если существует автомат $A \in \mathcal{A}$ с входным-выходным алфавитом Π такой, что для любого слова $x \in \overline{\Sigma}$:

I. если $x \in S$, то $A(x\beta^{f(x)}) = 1$;

2. если $x \notin S$, то $A(x\beta^{f(x)}) = 0$;

3. если $f(x) > 0$ и $0 \leq k < f(x)$, то $A(x\beta^{k}) = \beta$.

Определение f -представимости событий является обобщением известного определения представимости событий в автоматах, которое теперь совпадает с 0 -представимостью. (Через 0 обозначена функция $0(x) = 0$).

О п р е д е л е н и е 2. Классом событий, связанных с семейством автоматов $\mathcal{A}$, называется класс $\mathcal{C}$ всех f -п р е д с т а в и м ы х в $\mathcal{A}$ с о б ы т и й, когда f пробегает всю совокупность функций вида $\overline{\Sigma} \to N$.

Из определений I и 2 следует, что если $S \in \mathcal{C}$ и если известен автомат A, f - представляющий S, то мы можем распознать любой элемент события S, ничего фактически не зная о функции f. Действительно, если $x \in \overline{\Sigma}$, то мы следующим образом можем определить, принадлежит ли x событию S. Введем в автомат A последовательно буквы слова x и найдем $A(x)$. Если $A(x) = 1$, то $x \in S$; если $A(x) = 0$, то $x \notin S$. Если же $A(x) = \beta$, то мы вводим в автомат букву β и находим $A(x\beta)$. Точно также, если $A(x\beta) = 1$, то $x \in S$; если $A(x\beta) = 0$, то $x \notin S$. Если же $A(x\beta) = \beta$, то снова вводим в A букву β и смотрим, чему равен выход $A(x\beta\beta)$ и т.д. Поскольку $S \in \mathcal{C}$, мы рано или поздно выясним, принадлежит ли x к S или нет.

Пусть $\varphi(n)$ - произвольная функция $N \to N$.

О п р е д е л е н и е 3. Событие S принадлежит классу $\mathcal{C}_\varphi$, если S f -п р е д с т а в и м о с ф у н к ц и е й f такой, что $f(x) \leq \varphi$(длина x).

Функция $\varphi(n)$ играет роль границы "времени" распознавания автоматами семейства A элементов события S. Мы можем считать, что функция φ определяет "сложность" распознавания элементов события S. Именно, если $S \in \mathcal{C}_\varphi$, а $S' \notin \mathcal{C}_\varphi$, то естественно считать, что событие S' имеет большую сложность распознавания своих элементов, чем событие S.

Введенное таким способом понятие сложности распознавания элементов события будет ближе соответствовать интуитивному представлению об этом понятии, если мы будем предполагать, что семейство автоматов достаточно полно. Именно, пусть $\mathfrak{A}$ - семейство всех отображений, индуцируемых автоматами из $\mathcal{A}$. Мы будем предполагать, что $\mathfrak{A}$ удовлетворяет нижеследующим условиям $(L_1 - L_6)$.

L_1. Если $F: \overline{U} \to \overline{V}$ и $G: \overline{V} \to \overline{W}$ - отображения из $\mathfrak{A}$, то их композиция $GF: \overline{U} \to \overline{W}$ также принадлежит $\mathfrak{A}$.

L_2. Если $F: \overline{U} \to \overline{W}$ и $G: \overline{V} \to \overline{Z}$ - отображения из $\mathfrak{A}$, то отображение $F \times G: \overline{UV} \to \overline{WZ}$, определяемое формулой:

$$F \times G((u_1 v_1)(u_2 v_2)\ldots(u_n v_n)) = (w_1 z_1)(w_2 z_2)\ldots(w_n z_n),$$

где $w_1 w_2 \ldots w_n = F(u_1 u_2 \ldots u_n)$ и $z_1 z_2 \ldots z_n = G(v_1 v_2 \ldots v_n)$, также принадлежит $\mathfrak{A}$.

L_3. Если отображение $F: \overline{U} \to \overline{V}$ принадлежит $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}$ принадлежит также следующее отображение $F^{(n)}: \overline{U^n} \to \overline{V^n}$:

$$F^{(n)}((u_1 u_2 \ldots u_n)(u_1' u_2' \ldots u_n')\ldots(u_1'' u_2'' \ldots u_n'')) = F(u_1 u_2 \ldots u_n u_1' u_2' \ldots u_n' \ldots u_1'' u_2'' \ldots u_n').$$

L_4. Если $F: \overline{U} \to \overline{V}$ - отображение из $\mathfrak{A}$ и α - какая-либо буква, не входящая в алфавит U, то тривиальное продолжение отображения F на слова алфавита $U \cup \alpha$ также принадлежит $\mathfrak{A}$, т.е. $\mathfrak{A}$ принадлежит следующее отображение

$$F_\alpha : \overline{U \cup \alpha} \to \overline{V \cup \alpha}:$$

$$F_\alpha(\alpha^{k_1} u_1 \alpha^{k_2} u_2 \ldots \alpha^{k_n} u_n \alpha^{k_{n+1}}) = \alpha^{k_1} v_1 \alpha^{k_2} v_2 \ldots \alpha^{k_n} v_n \alpha^{k_{n+1}},$$

где $v_1 v_2 \ldots v_n = F(u_1 u_2 \ldots u_n)$.

L_5. Семейству $\mathfrak{A}$ принадлежит "задержка", т.е. отображение $J: \overline{U} \to \overline{U \cup \alpha}$

$$J(u_1 u_2 \ldots u_{n-1} u_n) = \alpha u_1 \ldots u_{n-2} u_{n-1},$$

где α - какая-либо фиксированная буква, возможно входящая в алфавит U.

L_6. Семейству $\mathfrak{A}$ принадлежит любое "константное" отображение, т.е. отображение вида $\overline{\chi}: \overline{U} \to \overline{V}$:

$$\overline{\chi}(u_1 u_2 \ldots u_n) = \chi(u_1)\chi(u_2)\ldots\chi(u_n),$$

где χ - произвольное отображение алфавита U в алфавит V.

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие семейства автоматов $\mathcal{A}$, для которых выполняются условия $(L_1 - L_6)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Любой класс C_φ замкнут относительно операций пересечения, объединения и дополнения событий.

Предварительно докажем две леммы.

ЛЕММА I. Пусть x – произвольное фиксированное слово в алфавите U и $[x]: \overline{U} \to \Sigma$ отображение, определяемое следующим образом:

$$[x](u_1 u_2 \ldots u_n) = \begin{cases} 0^{k-1}\, 10^{n-k}, & \text{если } u_1 u_2 \ldots u_k = x\,; \\ 0^n & \text{– в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда в семействе $\mathcal{A}$ существует автомат, индуцирующий отображение $[x]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z = u_1 u_2 \ldots u_k u_{k+1} \ldots u_n$ – произвольное слово в алфавите U. Применим к нему каждое из отображений $I, J, J^2, \ldots, J^k$ (здесь I –тождественное отображение $\overline{U} \to \overline{U}$).

$$I(z) = u_1 u_2 \ldots u_k u_{k+1} \ldots u_n\,,$$
$$J(z) = \alpha u_1 \ldots u_{k-1} u_k \ldots u_{n-1},$$
$$J^2(z) = \alpha\alpha \ldots u_{k-2} u_{k-1} \ldots u_{n-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$J^k(z) = \alpha\alpha \ldots \alpha\, u_1 \ldots u_{n-k}.$$

Отсюда видно, что $(J^k \times J^{k-1} \times \ldots \times J \times I)\,\overline{\eta}\,(u_1 u_2 \ldots u_k) =$

$$= (\alpha\alpha \ldots \alpha u_1)(\alpha\alpha \ldots u_1 u_2) \ldots (\alpha u_1 u_2 \ldots u_k)\,,$$

где η – отображение $U \to U^{k+1}$:

$$\eta(u) = uu \ldots u = u^{k+1}.$$

Определим теперь отображение $\chi : (U \cup \alpha)^{k+1} \to \Sigma$ следующим образом:

$$\chi(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y - \alpha x\,, \\ 0 & \text{– в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда легко видеть, что $[x] = \overline{\chi}\,(J^k \times J^{k-1} \times \ldots \times J \times I)\,\overline{\eta}$.

Из L_1, L_2, L_5 и L_6 следует, что отображение $[x]$ принадлежит семейству $\mathfrak{A}$.

ЛЕММА 2. Пусть A – автомат из определения I. Тогда в $\mathcal{A}$ существует автомат A', удовлетворяющий для любого $x \in \overline{\Sigma}$ условиям:

1. $A(x) = A'(x)$;
2. если $A(x\beta^{f(x)}) = 0$ и $f(x) > 0$, то $A'(x\beta^{f(x)}) = \gamma$;
3. если $A(x\beta^{f(x)}) = 1$ и $f(x) > 0$, то $A'(x\beta^{f(x)}) = \delta$;
4. если $A(x) = 0$, то $A'(x\beta) = \gamma$;
5. если $A(x) = 1$, то $A'(x\beta) = \delta$;
6. если $f(x) > 0$ и $k \neq f(x)$, то $A'(x\beta^k) = \beta$;
7. если $f(x) = 0$ и $k > 1$, то $A'(x\beta^k) = \beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{n-1} \sigma_n$ – произвольное слово из $\overline{\Sigma}$. Покажем, что в семействе $\mathfrak{A}$ существует отображение $H: \overline{\Pi} \to \overline{\Sigma}$, переводящее любое слово вида $x\beta^k$ в слово $0^n 10^{k-1}$. Для этого рассмотрим отображение $(I \times J)\overline{\eta}$, где $\eta: \Pi \to \Pi$ определяется так: $\eta(\pi) = \pi\pi$ (вообще, символ η будет обозначать любое отображение вида $U \to U^k$, $u \to u^k$).

Если мы применим отображение $(I \times J)\overline{\eta}$ к слову $x\beta^k$, то получим слово $(\sigma_1\alpha)(\sigma_2\sigma_1)\ldots(\sigma_n\sigma_{n-1})(\beta\sigma_n)(\beta\beta)\ldots(\beta\beta)$. Отсюда видно, что если определить отображение $\chi : \Pi(\Pi \cup \alpha) \to \Pi$

$$\chi(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z = \beta 0\,, \text{ либо } z = \beta',\\ 0 & \text{– в противном случае,} \end{cases}$$

то в качестве H можно будет взять отображение $\overline{\chi}(I \times J)\overline{\eta} \in \mathfrak{A}$.

Используя отображение H, можно построить отображение $G: \overline{\Pi} \to \overline{\{0, \gamma, \delta\}}$, принадлежащее $\mathfrak{A}$, которое удовлетворяет следующему условию:

$$G(x\beta^k) = \begin{cases} 0^n \gamma\, 0^{k-1}, & \text{если } A(x) = 0\,, \\ 0^n \delta\, 0^{k-1}, & \text{если } A(x) = 1\,, \\ 0^{n+k}, & \text{если } A(x) = \beta\,. \end{cases}$$

Действительно, пусть $F: \overline{\Pi} \to \overline{\Pi}$ – отображение, индуцируемое автоматом A. Применим к слову $x\beta^k$ отображение $(JF \times H)\,\overline{\eta}$. Тогда $(n+1)$-ой буквой полученного слова будет $\pi_n 1$, где $\pi_n = A(x)$, а остальными буквами будут буквы вида $\pi 0$, $\pi \in \Pi$. Определив отображение $\omega: \Pi\Sigma \to \{0, \gamma, \delta\}$:

$$\omega(z) = \begin{cases} \gamma, & \text{если } z = 01\,, \\ \delta, & \text{если } z = 11\,, \\ 0 & \text{– в остальных случаях,} \end{cases}$$

мы можем в качестве G взять отображение $\overline{\omega}(JF\times H)\overline{\eta}\in\mathfrak{A}$. Модифицируем теперь отображение $F:\overline{\Pi}\to\overline{\Pi}$ таким образом, чтобы в любом слове вида $F(x\beta^k)$ все буквы 0, расположенные далее n-ой буквы, были заменены на γ, а буквы 1, также расположенные далее n-ой буквы, были заменены на δ. Таким модифицированным отображением является отображение $K=\overline{\nu}(I\times F)\overline{\eta}$, где $\nu:\Pi^2\to\Pi\cup\gamma\cup\delta$:

$$\nu(z)=\begin{cases}\gamma, & \text{если } z=\beta 0,\\ \delta, & \text{если } z=\beta 1,\\ z & \text{— в остальных случаях.}\end{cases}$$

Из отображений G и K построим новое отображение $L=\overline{\mu}(G\times K)\overline{\eta}$, определив отображение $\mu:\{0,\gamma,\delta\}(\Pi\cup\gamma\cup\delta)\to\Pi\cup\gamma\cup\delta$:

$$\mu(z)=\begin{cases}\gamma, & \text{если } z=0\gamma, \text{ либо } z=\gamma\pi;\\ \delta, & \text{если } z=0\delta, \text{ либо } z=\delta\pi;\\ \pi, & \text{если } 0\pi=z.\end{cases}$$

Легко проверить, что любой автомат, индуцирующий отображение L, удовлетворяет всем условиям, содержащимся в лемме, за исключением быть может условий 6 и 7. Для того чтобы удовлетворить последним условиям, мы должны так модифицировать отображение L, чтобы в слове $L(x\beta^k)$ сохранилась первая буква γ или δ, а остальные буквы γ и δ были заменены буквой β. Построим прежде отображение M, обладающее свойством:

$$M(x\beta^k)=\begin{cases}0^{m-1}10^{n+k-m}, & \text{если } m\text{-ая буква слова } L(x\beta^k) \text{ равна } \gamma \text{ или } \delta \text{ и если всякая } i\text{-ая буква, } i<m, \text{ этого слова отлична от } \gamma \text{ и } \delta;\\ 0^{n+k} & \text{— в противном случае.}\end{cases}$$

Таким отображением M является, например, отображение $[\alpha]_{0,1,\beta}\,\overline{\lambda}\,L$, где $\lambda:\Pi\cup\gamma\cup\delta\to\Pi\cup\alpha$,

$$\lambda(z)=\begin{cases}\alpha, & \text{если } z=\gamma, \text{ либо } z=\delta,\\ z & \text{— в противном случае,}\end{cases}$$

и $[\alpha]_{0,1,\beta}$ обозначает тривиальное продолжение отображения $[\alpha]:\overline{\{\alpha\}}\to\overline{\Sigma}$ на алфавит $\Pi\cup\alpha$.

Из отображений L и M теперь можно построить отображение P – модифицированное L, о котором говорилось раньше. Таким P является отображение $\overline{\varepsilon}(L\times M)\overline{\eta}$,

где $\varepsilon:(\Pi\cup\gamma\cup\delta)\Sigma\to\Pi\cup\gamma\cup\delta$

$$\varepsilon(z)=\begin{cases}\pi, & \text{если } z=0\pi,\\ \gamma, & \text{если } z=1\gamma,\\ \delta, & \text{если } z=1\delta.\end{cases}$$

Таким образом, автомат индуцирующий отображение P, обладает всеми свойствами I – 7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ I. Из определения I непосредственно следует, что если S f- представимое событие, то дополнение S, т.е. событие $\overline{\Sigma}\setminus S$, также f-представимо. (Нужно только заменить автомат A автоматом B, который выдает 0 тогда, когда A выдает I, и выдает I тогда, когда A выдает 0; это можно сделать, используя свойства L_1 и L_6). Следовательно, любой класс C_φ замкнут относительно операции дополнения событий. Поэтому достаточно доказать, что C_φ замкнут относительно операции пересечения событий.

Пусть событие S f-представимо и событие T g-представимо. Докажем, что событие $S\cap T$ является h-представимым, где $h(x)=max(f(x),g(x))$. Отсюда будет следовать, что если $S,T\in C_\varphi$, то также и $S\cap T\in C_\varphi$.

Пусть A – автомат, f-представляющий S, и B – автомат, g-представляющий T. Используя лемму 2, заменим автомат A на автомат A', а автомат B на B'. Предположим, что $F:\overline{\Pi}\to\overline{\Pi\cup\gamma\cup\delta}$ и $G:\overline{\Pi}\to\overline{\Pi\cup\gamma\cup\delta}$ отображения, индуцируемые автоматами A' и B', соответственно. Из F и G построим новое отображение $H=\overline{\omega}(F\times G)\overline{\eta}$, определив

$$\omega:(\Pi\cup\gamma\cup\delta)(\Pi\cup\gamma\cup\delta)\to\Pi\cup\gamma\cup\delta$$

$$\omega(z)=\begin{cases}\beta, & \text{если } z=0\beta, \text{ либо } z=1\beta, \text{ либо } z=\beta 0, \text{ либо } z=\beta 1;\\ 0, & \text{если } z=00, \text{ либо } z=01, \text{ либо } z=10, \text{ либо } z=\gamma\delta, \text{ либо } \delta\gamma, \text{ либо } \delta\delta;\\ 1, & \text{если } z=11, \text{ либо } z=\gamma\gamma;\\ \gamma, & \text{если } z=\gamma\beta, \text{ либо } z=\beta\gamma;\\ \delta, & \text{если } z=\delta\beta, \text{ либо } z=\beta\delta.\end{cases}$$

Из определения отображения H видно, что для слова $H(x\beta^k)$, если k достаточно большое, имеются следующие возможности:

1) слово не содержит букв γ и δ;
2) слово содержит две буквы γ;
3) слово содержит буквы γ и δ, причем буква γ предшествует δ;

4) слово содержит буквы γ и δ, причем буква δ предшествует γ;

5) слово содержит две буквы δ.

Отсюда следует, что каждая буква слова $([\gamma\gamma]_{0,1,\beta} \times [\gamma\delta]_{0,1,\beta} \times [\delta\gamma]_{0,1,\beta} \times [\delta\delta]_{0,1,\beta})\,\bar{\eta}\, H(x, \beta^k)$ при достаточно большом k имеет либо вид $\pi\pi\pi\pi$, либо является одной из следующих букв:

$2^{I})$ I000,
$3^{I})$ 0I00,
$4^{I})$ 00I0,
$5^{I})$ 000I.

(Случаи 2^{I}, 3^{I}, 4^{I}, 5^{I} соответствуют случаям 2,3,4,5).

Определим теперь отображение $\theta: \Pi^4 \longrightarrow \Pi$ следующим образом: $\theta(\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4) = \pi_1$. Тогда, если C - какой-либо автомат, реализующий отображение

$$\bar{\theta}([\gamma\gamma]_{0,1,\beta} \times [\gamma\delta]_{0,1,\beta} \times [\delta\gamma]_{0,1,\beta} \times [\gamma\gamma]_{0,1,\beta})\,\bar{\eta}\, H,$$

то нетрудно увидеть, что C обладает свойствами I - 3 определения I для события $S \cap T$ и функции $h(x) = max(f(x), g(x))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть функции* $\varphi: N \to N$ *и* $\psi: N \to N$ *таковы, что* $\varphi(n) \leq \psi(n)$ *для всех* $n > n_0$. *Тогда* $C_\varphi \subset C_\psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S \in C_\varphi$. Представим S в виде $S = S_0 \cup (S \cap (\Sigma \setminus S_0))$, где S_0 - конечное событие, состоящее из всех слов события S, имеющих длину $\leq n_0$. Из леммы I следует, что любое одноэлементное событие 0 -представимо. Следовательно, на основании предложения I, $S_0 \in C_0$. Отсюда следует, что $\Sigma \setminus S_0$ также принадлежат C_0. Поэтому событие $S \cap (\Sigma \setminus S_0)$ принадлежит классу C_φ. Но это событие не содержит слов длины $\leq n_0$. Следовательно, оно принадлежит также классу C_{φ_0}, где

$$\varphi_0(n) = \begin{cases} \psi(n), & \text{если } n > n_0, \\ 0, & \text{если } n \leq n_0. \end{cases}$$

Таким образом, используя предложение I, мы получим, что $S \in C_{\varphi_0}$. Поскольку $\varphi_0(n) \leq \psi(n)$ для всех n, то $S \in C_\psi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если событие* S *является* f*-представимым, то оно также является для любого натурального* $K \neq 0$ $]\frac{f}{K}[$ *-представимым, где через* $]\frac{f}{K}[$ *обозначена функция, значение которой для* x *равно наименьшему целому, большему или равному* $\frac{f(x)}{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A - автомат, f -представляющий событие S, и $F: \bar{\Pi} \to \bar{\Pi}$, индуцируемое этим автоматом отображение. Продолжим тривиально отображение F на слова алфавита $\Pi \cup \alpha$ и для этого продолжения F_α рассмотрим отображение $F_\alpha^{(k)}$. Таким образом, слово вида $(\sigma_1 \alpha^{k-1}) \ldots (\sigma_n \alpha^{k-1})$ отображением $F_\alpha^{(k)}$ переводится в слово $(\pi_1 \alpha^{k-1}) \ldots (\pi_n \alpha^{k-1})$, где $\pi_1 \ldots \pi_n = F(\sigma_1 \ldots \sigma_n)$. Рассмотрим теперь отображение $\bar{\omega} F_\alpha^{(k)} \bar{\mu}$, где μ определяется как

$$\mu(z) = \begin{cases} \sigma\alpha^{k-1}, & \text{если } z = \sigma, \\ \beta^k, & \text{если } z = \beta, \end{cases}$$

а $\omega: (\Pi \cup \alpha)^k \longrightarrow \Pi$ определяется следующим образом:

$$\omega(z) = \begin{cases} \sigma, & \text{если } z = \sigma\alpha^{k-1}, \text{ либо } z = \beta^i \sigma y,\ y \in \bar{\Pi}; \\ \beta, & \text{если } z = \beta^k, \text{ либо } z = \beta\alpha^{k-1}. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что автомат B, индуцирующий отображение $\bar{\omega} F_\alpha^{(k)} \bar{\mu}$ $]\frac{f}{K}[$ - представляет событие S.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Для любого целого* $K > 0$ *и любой функции* $\varphi: N \to N$ *классы* C_φ *и* $C_{K\varphi}$ *совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S \in C_{K\varphi}$. Тогда S f - представимо и $f(x) \leq K\varphi(n)$, где n -длина x. Следовательно, S также $]\frac{f}{K}[$ - представимо. Поскольку $]\frac{f(x)}{K}[\leq \frac{K\varphi(n)}{K} = \varphi(n)$, то $S \in C_\varphi$. Таким образом, $C_{K\varphi} \subset C_\varphi$. Обратное включение $C_\varphi \subset C_{K\varphi}$ очевидно, так как $\varphi(n) \leq K\varphi(n)$ для всех n.

ТЕОРЕМА I. *Пусть для достаточно больших значений* n *выполняется соотношение*

$$a \leq \frac{\varphi(n)}{\psi(n)} \leq b,$$

где a *и* b *- какие-либо действительные числа и* $a > 0$. *Тогда классы* C_φ *и* C_ψ *совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что числа a и b являются рациональными. Пусть $a = \frac{p}{q}$ и $b = \frac{r}{s}$. Тогда мы имеем неравенства:

$$p\psi(n) \leq q\varphi(n),$$
$$s\varphi(n) \leq r\psi(n),$$

выполняющиеся для всех n, больших некоторого n_0. Из этих неравенств на основании предложения 2 мы получаем включения $C_{p\psi} \subset C_{q\varphi}$ и $C_{s\varphi} \subset C_{r\psi}$. Отсюда, используя предложение 4, получим $C_\psi \subset C_\varphi$ и $C_\varphi \subset C_\psi$, т.е. $C_\varphi = C_\psi$.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\varphi(n)}{\psi(n)} = a \neq 0$. Тогда классы C_φ и C_ψ совпадают.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\varphi(n)}{\psi(n)} = a$, то $C_{\psi+\varphi} = C_\psi$.

Теорема I и ее следствия показывают, что на сложность распознавания элементов события автоматами данного семейства оказывает влияние только асимптотическое поведение функции φ.

§ 3. Классификация событий, связанных с семейством конечных автоматов

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{A}$ - произвольное семейство конечных автоматов, удовлетворяющее условиям $(L_1 - L_6)$. Тогда для любой функции φ

$$C_\varphi \subset C_1 .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть событие S является f-представимым и A - автомат, f-представляющий событие S. В силу конечности автомата A выполняется следующее условие: если $x \in \overline{\Sigma}$, $A(x\beta^i) = \beta$ для $i \leq K$ и K больше числа состояний автомата A, то $A(x\beta^i) = \beta$ для всех i. Следовательно, для всех $x \in \overline{\Sigma}$ имеет место $f(x) < K$. Это означает, что любое событие, связанное с семейством A, принадлежит уже классу C_K. Используя предложение I, мы получим, что S также принадлежит классу C_1.

Пусть $\mathcal{A}$ теперь обозначает класс всех конечных автоматов. Тривиально проверяется, что $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям $(L_1 - L_6)$.

ТЕОРЕМА 3. Каждое событие, связанное с семейством $\mathcal{A}$, является регулярным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из теоремы 2, достаточно доказать, что каждое событие $S \in C_1$ регулярно. Пусть A - автомат, f-представляющий событие S. Будем считать, что A является автоматом Мура и что X - множество внутренних состояний автомата A, представляющих событие T, состоящее из слов x, $A(x) = 1$ и слов $x\beta$, $A(x\beta) = 1$. Пусть Y - множество

всех состояний автомата A, предшествующих по сигналу β состояниям из X, т.е.

$$q \in Y \Longleftrightarrow \delta(q, \beta) \in X .$$

Тогда очевидно, что множество состояний $X \cup Y$ представляет событие S, т.е. S - регулярно. •

§ 4. Классификация событий, связанных с семейством автоматов, эквивлентных одномерным односторонним стабильным системам

В этом параграфе $\mathcal{A}$ будет обозначать семейство всех автоматов A следующего вида:

$$A = (\Sigma^\infty, U, V, \delta, \lambda, 0^\infty),$$

функции переходов и выходов которых (δ и λ, соответственно) определяются с помощью конечных автоматов C_u и D_u. Именно, каждой букве u соответствует два конечных автомата C_u и D_u и если $x \in \Sigma^\infty$ и $u \in U$, то

$$\delta(x, u) = \overline{C_u}(x),$$
$$\lambda(x, u) = \sigma(\overline{D_u}(x)).$$

Пусть Z_A обозначает совокупность всех внутренних состояний автомата A, которые достижимы из начального состояния 0^∞.

Мы дополнительно предполагаем, что каждый автомат A из семейства $\mathcal{A}$ удовлетворяет следующим двум условиям.

I) Любое слово $x \in Z_A$ имеет вид:

$$x = y0^\infty, \quad y \in \overline{\Sigma}.$$

2) Для любого $x \in Z_A$ и $u \in U$ значение функции $\delta(x, u)$ определено, т.е. $\overline{D}_u(x)$ имеет вид:

$$\overline{D}_u(x) = y v^\infty, \quad y \in \overline{V}, \quad v \in V .$$

Каждый автомат $A \in \mathcal{A}$ может быть представлен как конечный автомат с линейно растущей лентой. Это представление ясно из рисунка, к которому мы даем краткие пояснения.

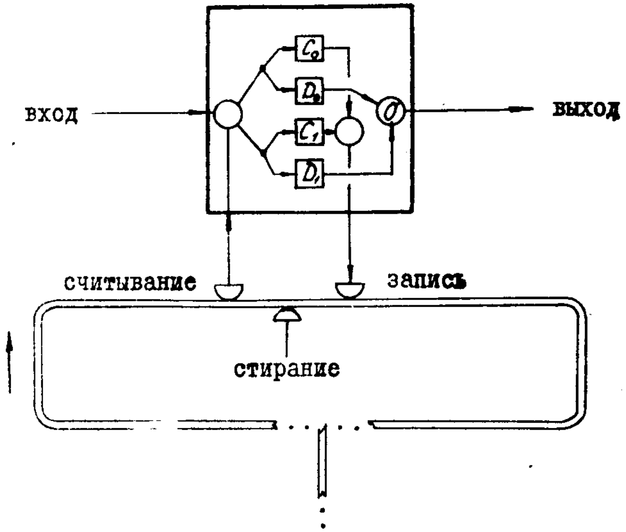

Рис. I

Здесь мы рассматриваем автомат A с входным - выходным алфавитом Σ. Автомат начинает работу с лентой, на которой записано слово 0^{K} где K - максимальное число внутренних состояний автоматов C_0, C_1, D_0, D_1. По окончании каждого такта лента удлиняется на K ячеек, в каждой из которой записан 0. Соответственно этому каждый раз удлиняется на K единиц длина каждого такта. Входной сигнал в течение какого-либо такта повторяется столько раз, какова продолжительность этого такта. Выходной сигнал появляется в конце каждого такта. Переключательный элемент, соединенный с входным каналом, включает пару автоматов C_0, D_0, либо пару автоматов C_1, D_1 в зависимости от того, является ли входной сигнал 0 или 1.

Таким образом, если за единицу времени считать продвижение ленты на одну ячейку, то можно сказать, что произвольный автомат $A \in \mathcal{A}$ имеет линейно растущую память и линейно растущее время вычисления в каждом своем такте. Следовательно, если входное слово x имеет длину n, то для его непосредственного распознавания на автомате A требуется следующее время:

$$K+2K+3K+\ldots+nK=\frac{n(n+1)}{2}K.$$

Другое представление автоматов семейства $\mathcal{A}$ связано с одномерными односторонними стабильными итеративными системами. Различные классы итеративных систем были введены и изучены Ф.К.Хенни (см. [I]), который показал также их практическую важность и целесообразность их дальнейшего изучения. Одномерные односторонние стабильные итеративные системы образуют весьма узкий класс итеративных систем. Поскольку в дальнейшем из всех итеративных систем мы будем иметь дело только с односторонними и одномерными итеративными системами, то мы для краткости будем называть их просто системами. Относящиеся сюда понятия мало известны, поэтому мы дадим все нужные нам определения.

I. Понятие системы

Система представляет собой совокупность сетей,

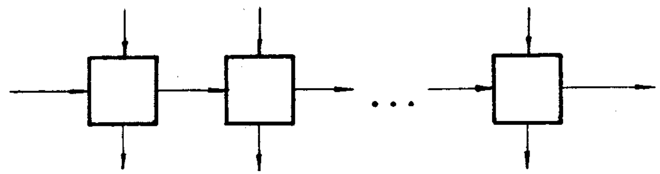

Рис. 2

составленных из конечного числа идентичных ячеек. Ячейка системы - это конечный инициальный автомат с двумя входами и двумя выходами:

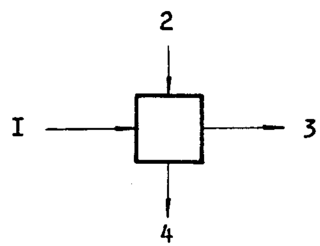

Рис. 3

Канал (2) называется входным каналом ячейки; каналы (I) и (3) называются боковыми, а канал (4) - выходным. Для полного задания системы необходимо также фиксировать некоторый боковой сигнал, так называемый граничный сигнал системы.

Таким образом, формально система есть совокупность

$$\mathcal{S}=(Q,S,U,V,\mu,\nu,\varkappa,q_0,s_0)$$

четырех конечных множеств (называемых, соответственно, множеством внутренних состояний ячейки системы, алфавитом боковых сигналов системы, входным алфавитом, выходным алфавитом) трех функций:

$$\mu: Q\times S\times U \longrightarrow Q\ ,$$
$$\nu: Q\times S\times U \longrightarrow S\ ,$$
$$\varkappa: Q\times S\times U \longrightarrow V$$

и, наконец, двух букв $q_0\in Q$, $s_0\in S$ (называемых инициальным состоянием ячейки и граничным сигналом системы).

Сеть из n ячеек, или n -сеть, способна воспринимать по входным каналам своих ячеек буквы любого слова $x=u_1u_2\dots u_n\in\overline{U}$ длины n .

Работа n -сети происходит по тактам. В такте $t=0$ все ячейки системы устанавливаются в инициальное состояние q_0 , а на входные каналы сети поступают буквы данного слова. Граничный сигнал s_0 подается на боковой канал крайней слева ячейки сети и в течение такта $t=0$ проходит, преобразуясь, через всю сеть. Одновременно с прохождением бокового сигнала снимаются значения выходов из ячеек сети. В конце такта $t=0$ ячейки сети принимают новые состояния $q_1 q_2\cdots q_n$. В такте $t=1$ сеть действует точно так же, как и в такте $t=0$, за исключением того, что ячейки сети в начале такта $t=1$ теперь установлены в состояниях $q_1q_2\ \cdots\ q_n$. Аналогичным образом может быть определено действие сети в любой момент дискретного времени t .

Точное, формальное определение работы сети таково. Работа n -сети – это последовательность

$$y(0),\ y(1),\ y(2),\ \dots,\ y(t),\ \dots \qquad (\ast)$$

внутренних состояний этой сети (т.е. комбинаций внутренних состояний n ячеек сети; другими словами, элементов $y\in Q^n$), которая рекуррентно определяется из начального состояния $y(0)=q_0^n$ и из данного входного слова $x=u_1u_2\ \dots\ u_n$. Именно, если $y(t)=q_1q_2\cdots q_n$, то

$$y(t+1)=\mu(q_1,s_0,u_1)\mu(q_2,s_1,u_2)\dots\mu(q_n,s_{n-1},u_n),$$

где боковой сигнал s_i находится по рекуррентной формуле:

$$s_i=\nu(q_i,\ s_{i-1},\ u_i),\quad 1\leq i<n,$$

(s_0 – граничный сигнал системы $\mathcal{S}$).

Выход $z(t)$ из сети в такт t определяется внутренним состоянием сети $y(t)$ в этот такт:

$$z(t)=\varkappa(q_1,s_0,u_1)\varkappa(q_2,s_1,u_2)\dots\ \varkappa(q_n,s_{n-1},u_n).$$

Каждая сеть системы имеет конечное число внутренних состояний, ибо она состоит из конечного числа ячеек, а ячейка содержит конечное число внутренних состояний. Поэтому последовательность ($\ast$) является почти периодической для любого слова $x\in U$, т.е. сеть обязательно впадает в цикл внутренних состояний.

n -сеть называется слабо стабильной, если для любого слова $x\in U^n$ выходы в цикле внутренних состояний сети, к которому приходит n -сеть, совпадают; другими словами, если существует такой такт t_0 , что $z(t_0+t)=z(t_0)$ для любого $t=0,1,2,\dots$. Это условие выполняется автоматически, если для любого $x\in U^n$ цикл внутренних состояний сети имеет длину 1, т.е. если сеть при любом входном слове приходит к устойчивому состоянию. В этом случае сеть называется стабильной.

Система называется стабильной (слабо стабильной), если стабильна (слабо стабильна) каждая её сеть.

Произвольная слабо стабильная (в частности, стабильная) система $\mathcal{S}$ индуцирует некоторое отображение $F:\overline{U}\longrightarrow\overline{V}$. Именно, если x -произвольное слово в алфавите U , то, рассматривая работу n -сети, где n = длине x , мы найдем выходное слово z , которое производится n -сетью в цикле; это слово z мы и сопоставляем со словом x .

2. Эквивалентность систем и автоматов семейства

В этом пункте мы покажем, что семейство автоматов $\mathcal{A}$ и семейство всех стабильных систем индуцируют одни и те же отображения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Для любого автомата* $A\in\mathcal{A}$ *существует эквивалентная ему (т.е. индуцирующая то же отображение) стабильная система* $\mathcal{S}$. *Для любой стабильной системы* $\mathcal{S}$ *существует эквивалентный ей автомат* $A\in\mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A -автомат из семейства $\mathcal{A}$.

$$A=(\Sigma^\infty,\ U,\ V,\ \delta,\ \lambda,\ 0^\infty),$$

где δ и λ определяются конечными автоматами C_u и D_u. Предположим, что P_u – множество внутренних состояний автомата C_u, а Q_u – множество внутренних состояний автомата D_u. Обозначим через Q множество $P_{u_1}P_{u_2}\dots P_{u_n}Q_{u_1}Q_{u_2}\dots Q_{u_n}$, где $u_1,u_2,\dots u_n$ – все буквы алфавита U. Множество Q мы примем за множество внутренних состояний ячейки системы $\mathcal{S}$. В качестве множества боковых сигналов системы мы возьмем алфавит Σ, причем граничным сигналом будем считать букву 0. В качестве начального состояния ячейки системы $\mathcal{S}$ возьмем комбинацию всех начальных состояний автоматов $C_{u_1}, C_{u_2}\dots C_{u_n}$, $D_{u_1}, D_{u_2}\dots D_{u_n}$. Определим теперь функции $\mu, \nu, \varkappa$.

$$\mu(q,\sigma,u_i)=q',$$

где q' отличается от q только тем, что его компоненты $p_{u_i}\in P_{u_i}$ и $q_{u_i}\in Q_{u_i}$ заменены, соответственно, на $\delta_{P_{u_i}}(p_{u_i},\sigma)$ и $\delta_{Q_{u_i}}(q_{u_i},\sigma)$, где $\delta_{P_{u_i}}(\delta_{Q_{u_i}})$ обозначает функцию переходов автомата $P_{u_i}(Q_{u_i})$.

$$\nu(q,\sigma,u_i)=\lambda_{P_{u_i}}(p_{u_i},\sigma),$$

где $\lambda_{P_{u_i}}$ – функция выходов автомата C_{u_i}.

$$\varkappa(q,\sigma,u_i)=\lambda_{Q_{u_i}}(q_{u_i},\sigma).$$

Для того чтобы показать, что система $\mathcal{S}$ эквивалентна автомату A, рассмотрим для произвольного слова $x=u_1u_2\dots u_n$ следующую полубесконечную матрицу (σ_{ij}), $i=0,1,2,\dots$, $j=1,2,\dots,n$. Элемент σ_{ij} этой матрицы равен той букве 0 или I, которая появляется на боковом входе в j-ую ячейку n-сети в такте $t=i$, если на входные каналы сети подаются буквы слова x. Таким образом, j-ый столбец матрицы является бесконечной последовательностью боковых сигналов, входящих в j-ую ячейку в последовательные моменты времени. Легко видеть, что $(j+1)$-ый столбец полностью определяется j-ым столбцом и сигналом u_j. Действительно, для произвольного $u\in U$ определим два автомата E_u и F_u:

$$\begin{aligned}
&E_u=(Q,\Sigma,\Sigma,\delta_{E_u},\lambda_{E_u},0),\\
&\delta_{E_u}(q,\sigma)=\mu(q,\sigma,u),\\
&\lambda_{E_u}(q,\sigma)=\nu(q,\sigma,u),\\
&F_u=(Q,\Sigma,V,\delta_{F_u},\lambda_{F_u},0),\\
&\delta_{F_u}(q,\sigma)=\mu(q,\sigma,u),\\
&\lambda_{F_u}(q,\sigma)=\varkappa(q,\sigma,u).
\end{aligned} \qquad (жж)$$

Очевидно, что $\sigma_{0,j+1}\sigma_{1,j+1}\sigma_{2,j+1}\dots=\overline{E_{u_j}}(\sigma_{0,j}\sigma_{1,j}\sigma_{2,j}\dots)$. Аналогично, если v_{ij} – выход из j-ой ячейки в такт $t=i$, то

$$v_{0,j+1}v_{1,j+1}v_{2,j+1}\dots=\overline{F_{u_j}}(\sigma_{0,j}\sigma_{1,j}\sigma_{2,j}\dots).$$

Заметим теперь, что автоматы C_u и E_u, соответственно, D_u и F_u эквивалентны. Следовательно, выход из j-ой ячейки в такте t при t достаточно большом совпадает с выходом из автомата A: $\lambda(x,u_j)$, где $x\in\overline{\Sigma}$, $x=\sigma_{0,j}\sigma_{1,j}\dots$. Это показывает, что $\mathcal{S}$ и A индуцирует одно и то же отображение $\overline{U}\to\overline{V}$.

Докажем теперь вторую часть предложения 5.

Пусть $\mathcal{S}$ – стабильная система. Предположим сначала, что алфавит боковых сигналов системы состоит из двух букв, т.е. $S=\Sigma$. Кроме того, предположим, что для произвольного входного слова и произвольной ячейки сети боковые сигналы в эту ячейку при достаточно большом t равны 0. Тогда, определяя автоматы E_u и F_u по формулам (жж), мы можем построить автомат A вида $(\Sigma^\infty, U, V, \delta, \lambda, 0^\infty)$, у которого функции δ и λ определяются с помощью E_u и F_u. Автомат A индуцирует то же отображение, что и система $\mathcal{S}$, причем, как легко проверить, $A\in\mathfrak{A}$. Для окончания доказательства достаточно показать, что произвольная стабильная система заменена на эквивалентную систему с указанными выше предположениями. Действительно, в силу теоремы 2I из [I] каждая стабильная система с произвольным алфавитом боковых сигналов может быть заменена на эквивалентную ей стабильную систему с алфавитом боковых сигналов Σ. Далее, не трудно показать, что для произвольной стабильной системы существует эквивалентная ей стабильная система, которая обладает свойством: для произвольного входного слова и произвольной ячейки сети боковые сигналы в эту ячейку при достаточно большом t равны фиксированному заранее сигналу s_0.

3. Класс событий, связанных с семейством $\mathfrak{A}$

В этом пункте мы покажем, что класс всех событий, связанных с $\mathfrak{A}$, совпадает с классом всех рекурсивных событий. Событие S рекурсивно, если существует машина Тьюринга T такая, что

$$T(x)=\begin{cases} \text{I, если } x\in S,\\ 0\text{, если } x\notin S.\end{cases}$$

Мы примем следующее определение машины Тьюринга. Машина Тьюринга T с внешним алфавитом Π и внутренним алфавитом $\{a\}$ есть конечное множество троек вида:

$$\langle \pi a, \pi' a', \sigma \rangle, \quad \pi a, \ \pi' a' \in \Pi\{a\}, \quad \sigma \in \Sigma,$$

удовлетворяющее условию

$$\langle \pi a, \pi' a', \sigma \rangle \in T, \ \langle \pi a, \pi'' a'', \sigma'' \rangle \in T \Longrightarrow \pi = \pi', \ a' = a'', \ \sigma' = \sigma''.$$

В алфавите $\{a\}$ отмечены два состояния a_0 и a_k - начальное и заключительное состояния машины T.

Любое выражение вида: $x(\pi a)y$, где $x, y \in \Pi$, либо x -пустое слово, либо y -пустое слово, называется ситуацией машины T. Ситуация вида $x(\beta a_0)$ называется начальной ситуацией, а ситуация вида $(\beta a_k)y$ называется заключительной ситуацией машины T.

Переход от одной ситуации машины T к другой ситуации совершается по правилам:

(а) $x\pi_1(\pi a)y \longrightarrow x(\pi_1 a')\pi' y$, если $\langle \pi a, \pi' a', 0 \rangle \in T$;

(б) $(\pi a)y \longrightarrow (\beta a')\pi' y$, если $\langle \pi a, \pi' a', 0 \rangle \in T$;

(в) $x(\pi a)\pi_1 y \longrightarrow x\pi'(\pi_1 a')y$, если $\langle \pi a, \pi' a', 1 \rangle \in T$;

(г) $x(\pi a) \longrightarrow x\pi'(\beta a')$, если $\langle \pi a, \pi' a', 1 \rangle \in T$.

Машина Тьюринга T вычисляет отображение $\varphi: \overline{\overline{\Sigma}} \longrightarrow \overline{\overline{\Sigma}}$, если для каждого слова $x \in \overline{\overline{\Sigma}}$ существует цепочка ситуаций:

$$x(\beta a_0) = \gamma_1 \longrightarrow \gamma_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow \gamma_p = (\beta a_k)\beta^m \varphi(x). \qquad (***)$$

Для каждой машины Тьюринга T можно построить систему $\mathcal{S}$, которая моделирует работу машины T.

Опишем работу системы $\mathcal{S}$.

Произвольная ситуация $\pi_1\pi_2\dots\pi_{i-1}(\pi_i a)\pi_{i+1}\pi_{i+2}\dots\pi_n$ машины Тьюринга T представляется в системе $\mathcal{S}$ внутренним состоянием $\beta\beta\dots\beta\varepsilon\pi_1\pi_2\dots\pi_{i-1}(\pi_i a)\pi_{i+1}\pi_{i+2}\dots\pi_n\beta\beta\dots\beta$

достаточно длинной сети системы в некоторый нечетный такт $2t-1$. В следующий такт $2t$ состояние сети изменяется в зависимости от схемы T. Именно, если $\langle \pi_i a, \pi' a', 0 \rangle \in T$, то состояние сети будет

I) $\beta\beta\dots\beta\beta\pi_1\pi_2\dots\pi_{i-1}a'\pi'\pi_{i+1}\dots\pi_{n-1}\pi_n\beta\dots\beta$,

и если $\langle \pi_i a, \pi' a', 1 \rangle \in T$, то состояние сети будет

2) $\beta\beta\dots\beta\beta\pi_1\pi_2\dots\pi_{i-1}\pi'(\pi_{i+1}a')\pi_{i+2}\dots\pi_n\beta\beta\dots\beta$.

В такте $2t+1$ сеть переходит из состояния I) в состояние

$$\beta\beta\dots\beta\beta\varepsilon\pi_1\dots\pi_{i-2}(\pi_{i-1}a')\pi'\pi_{i+1}\dots\pi_{n-1}\pi_n\beta\dots\beta$$

или из состояния 2) в состояние

$$\beta\beta\dots\beta\beta\varepsilon\pi_1\dots\pi_{i-2}\pi_{i-1}\pi'(\pi_{i+1}a')\dots\pi_{n-1}\pi_n\beta\dots\beta.$$

Таким образом, переходу машины Тьюринга T из одной ситуации в следующую соответствуют два такта работы сети системы.

В начальном такте $t=0$ на вход сети системы подается входное слово $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n\beta\beta\dots\beta$. В следующий такт $t=1$ сеть принимает состояние $\varepsilon\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n(\beta a_0)\beta\dots\beta$, которое соответствует начальной ситуации машины Тьюринга T. Наконец, если сеть попадает в состояние, соответствующее заключительной ситуации машины T , то последующие состояния сети не изменяются.

Легко построить стабильную систему, работающую так, как это описано выше.

Систему $\mathcal{S}$ удобно определить с помощью двух конечных автоматов B и C , которые выбраны так, что состояние n -сети в такте t при входном слове x равно $\overline{B}^{t-1}\,\overline{C}(x)$. Мы не приводим здесь схемы автоматов B и C ввиду того, что они громоздки.

ТЕОРЕМА 4. Для каждого рекурсивного события $S \subset \overline{\Sigma}$ существует автомат $A \in \mathcal{A}$ и рекурсивная функция $f: \overline{\Sigma} \longrightarrow N$ такие, что A f-представляет S.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку событие S рекурсивно, то существует машина Тьюринга T , распознающая слова этого события. Для произвольного слова $x \in \overline{\Sigma}$ обозначим через $g(x)$ число шагов вычисления на машине T функции φ , характеристической для множества S (т.е. $g(x) = p$ из $(***)$). Построим стабильную систему $\mathcal{S}$, моделирующую в изложенном выше смысле машину Тьюринга T. Легко видеть, что если на вход сети системы $\mathcal{S}$ подать слово $x\beta^{g(x)+m+2}$, то сеть "остановится" через $2g(x)$ тактов в устойчивом состоянии $\beta^{g(x)}(\beta a_k)\beta^m\varphi(x)$. Таким образом, если мы определим выход из ячейки системы $\mathcal{S}$ в зависимости от её внутреннего состояния следующим образом: 0, если ячейка находится в состоянии 0 ; 1 , если ячейка находится в состоянии 1 ; β , если ячейка находится в любом внутреннем состоянии, отличном от 0 и 1 ; то тогда система $\mathcal{S}$ будет обладать свойствами:

1) выход из $\mathcal{S}$ при входном слове $x\beta^k$ равен 1, когда и $x \in S$ и $k = g(x) + m + 2$;

2) равен 0, когда $x \notin S$ и $k = g(x) + m + 2$;

3) равен β, когда $k \neq g(x) + m + 2$.

Следовательно, любой автомат $A \in \mathfrak{A}$, эквивалентный системе $\mathcal{S}$, f-представляет событие S, где $f: \overline{\Sigma} \longrightarrow N$ - рекурсивная функция, определенная как: $f(x) = g(x) + m + 2$.

СЛЕДСТВИЕ. Класс всех событий, связанных с семейством $\mathfrak{A}$, совпадает с классом всех рекурсивных событий.

4. Условия ($L_1 - L_6$) и семейство $\mathfrak{A}$

Семейство $\mathfrak{A}$ удовлетворяет всем условиям $L_1 - L_6$, изложенным в § I. Проверка этого не вызывает затруднений,но требует довольно громоздких построений. Поэтому мы ее не будем проводить.

5. Нетривиальность классификации событий, связанных с семейством

Из того, что семейство $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям $L_1 - L_6$ следует, что классификация связанных с $\mathfrak{A}$ событий содержит бесконечное множество совпадающих между собой классов.Например, любые две функции φ и ψ, имеющие одинаковый асимптотический рост, дают тождественные классы C_φ и C_ψ. В то же время эта классификация нетривиальна, другими словами,она содержит бесконечное множество несовпадающих классов.

Доказательство этого факта легко может быть получено "диагональным" рассуждением при использовании универсальной системы. (Впрочем, нетривиальность классификации легко может быть выведена из общих свойств рекурсивных множеств).Универсальная система имеет некоторые применения при изучении функциональных возможностей класса одномерных односторонних итеративных систем. Поэтому мы предполагаем дать её описание. Это будет сделано во второй части работы, которая будет опубликована в одном из следующих выпусков "Вычислительных систем". Кроме того, там же будут установлены некоторые дальнейшие свойства классификации событий, связанных с семейством $\mathfrak{A}$.

Литература:

I. F.C.Henni. Iterative arrays of logical circuits, New York, 1961.