

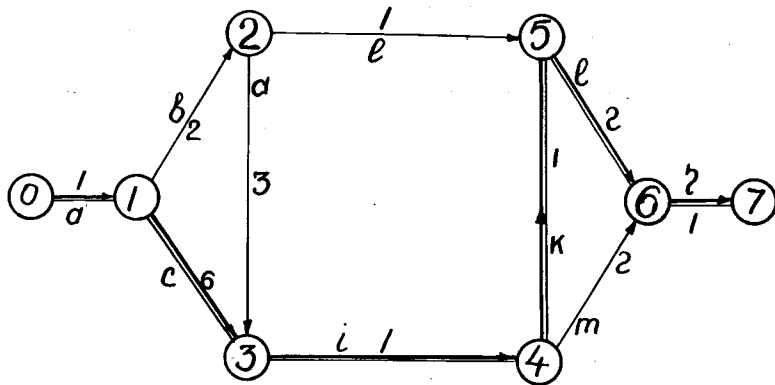
МЕТОД ЛОГИЧЕСКИХ ДИАГРАММ
ДЛЯ ПЛАНИРОВАНИЯ РАЗРАБОТОК СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Г.С. Поспелов, А.И. Тейман

В нашей работе [1] подробно изложены некоторые математические методы планирования разработок сложных систем, известные в США, главным образом, как методы "PERT". В настоящих заметках сделано ряд дополнений к этой работе, касающихся, главным образом, линейной диаграммы плана и случайной сети.

I. Логическая сеть (сетевая диаграмма) и временные характеристики плана

По методу "PERT" составляется стрелочная диаграмма, или логическая сеть разработки. Логическая сеть состоит из узлов - событий, соединенных направленными дугами. В логической сети плана разработки реализуется единственная логическая операция "И". Любое событие, которое характеризуется узлом с несколькими входящими дугами (работами), возникает тогда, когда все работы будут окончены и при этом возникновение события совпадает по времени с работой, оканчивающейся последней. Каждое событие отражает завершение определенного этапа всей разработки и порождает ряд новых работ, показанных в сети в виде дуг или линий, выходящих из узла, представляющего это событие. В качестве примера на рис. I приведена стрелочная ди-



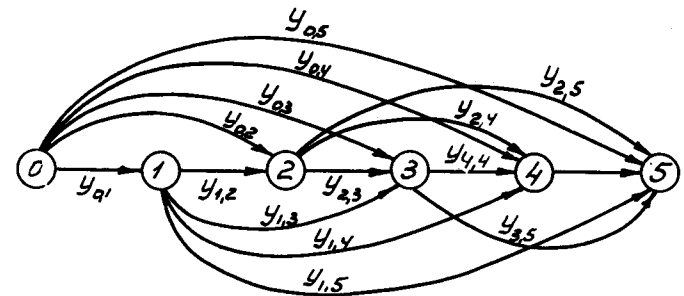
Р и с. I

аграмма выполнения некоторого комплекса работ. Буквы около стрелок (дуг) указывают наименование работ, цифры - время выполнения каждой работы. События на диаграмме представлены кружками, цифры в кружках - номера событий. На рис. I работы, относящиеся к критической последовательности, изображены двойными линиями. Сумма времени работ, относящихся к критической последовательности, образует общее время выполнения всего комплекса работ, равное 12 единицам.

Введем необходимые для дальнейшего обозначения: e_i - события (узлы) сети; ($i = 0, 1, \dots, n$); q_{ij} - работа (дуга), начинающаяся в узле i и оканчивающаяся в узле j ; t_i - промежутки времени между начальным событием e_0 и событием e_i , или моменты наступления событий e_i при $t_0 = 0$. При этом $t_n = \lambda$ будет временем выполнения всей разработки; y_{ij} - промежуток времени, затрачиваемый на выполнение работы q_{ij} .

Первая задача, которая возникает после составления сети и назначения y_{ij} - это нумерация последовательности событий. Нумерацию можно провести, придерживаясь следующего правила. Для определения события e_1 вычеркиваем событие e_0 со всеми выходящими из него дугами. Тогда в укороченной сети событием, имеющим только выходящие дуги, будет событие e_2 . Для определения события e_2 вычеркиваем событие e_1 со всеми выходящими из него дугами и т.д. Заметим, что только в полной

сети с числом дуг $m = 0,5(1+n)n$ после каждого вычеркивания будет только одно событие с отходящими дугами, получающее очередной номер. При $m < 0,5(1+n)n$ после каждого вычеркивания может обнаружиться несколько событий с только отходящими дугами. Нумерация таких событий предварительно может быть произведена произвольно. На рис. 2 приведена сеть, где событие e_2 может быть обозначено как событие e_3 , а событие e_3 как e_2 . При вычеркивании события e_1 оба упомянутых события имеют только отходящие дуги. В таком же положении по отношению друг к другу находятся в этой сети события e_8 и e_9 .

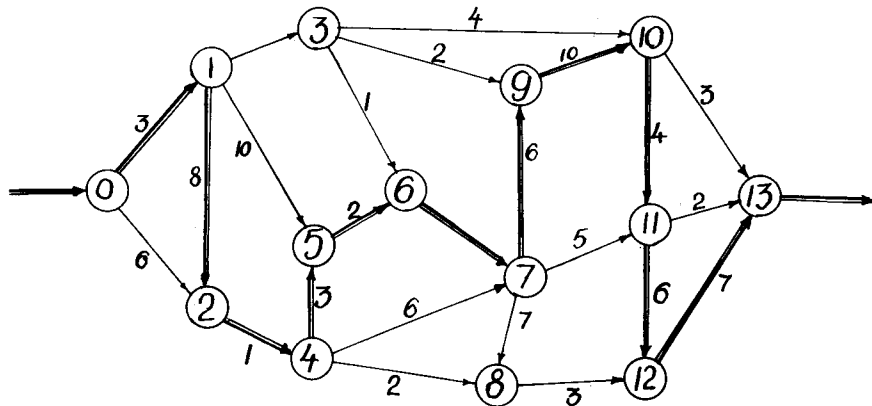


Р и с. 2

Теперь можно приступить к определению моментов t_i возникновения событий e_i и определения критической последовательности операции от e_0 до e_n . При этом t_n явится суммой времен критической последовательности операций. Нужно подчеркнуть, что от начального события e_0 до любого события e_i (в том числе и e_n) имеется своя критическая последовательность, или свой критический путь. Длина критического пути в единицах времени при $t_0 = 0$ будет временем (и притом самым ранним!) возникновения события e_i . Обозначим это время, или длину критического пути от e_0 до e_i , через t_i^0 . Раньше, чем t_i^0 , событие e_i появиться не может. Для события e_n самое раннее время его возникновения равно времени завершения всей разработки. Критический путь между e_0 и e_n будем называть главным.

2. Линейная диаграмма плана

Линейная диаграмма представляет собой диаграмму, на которой вдоль шкалы времени размещаются все операции, или работы, в виде линий, или полос. Линейную диаграмму удобнее строить на основе сетевой диаграммы после того, как все события сетевой диаграммы перенумерованы по указанному выше правилу. Расположение отдельных работ в столбце линейной диаграммы подчиняется определенному правилу. В операции q_{ij} - индекс i означает номер начала операции, а j - номер конца операции. В столбце операции q_{ij} линейной диаграммы все операции располагаются по возрастанию номерам концов операции j . Внутри групп операций с одинаковыми номерами концов j операции располагаются по возрастанию номерам начал операций i . На рис. 3 построена линейная диаграмма на основе сетевой диаграммы рис. 1. Критический путь изображен в виде двойной ломаной линии.



Р и с. 3

№	Работа	Полный резерв времени
I	$q_{0,2}$	$t_2^{(1)} - \gamma_{0,2} = 11 - 6 = 5$
2	$q_{1,3}^*$	$t_3^{(1)} - t_1^{(1)} - \gamma_{1,3} = 16 - 3 - 7 = 6$
3	$q_{1,5}$	$t_5^{(1)} - t_1^{(1)} - \gamma_{1,5} = 15 - 3 - 10 = 2$
4	$q_{3,6}^*$	$t_6^{(1)} - t_3^{(1)} - \gamma_{3,6} = 17 - 10 - 1 = 6$
5	$q_{3,9}^*$	$t_9^{(1)} - t_3^{(1)} - \gamma_{3,9} = 28 - 10 - 2 = 16$
6	$q_{3,10}^*$	$t_{10}^{(1)} - t_3^{(1)} - \gamma_{3,10} = 38 - 10 - 4 = 24$
7	$q_{4,7}$	$t_7^{(1)} - t_4^{(1)} - \gamma_{4,7} = 22 - 12 - 6 = 4$
8	$q_{4,8}$	$t_8^{(1)} - t_4^{(1)} - \gamma_{4,8} = 45 - 12 - 2 = 31$
9	$q_{6,9}$	$t_9^{(1)} - t_6^{(1)} - \gamma_{6,9} = 28 - 17 - 8 = 3$
10	$q_{7,8}$	$t_8^{(1)} - t_7^{(1)} - \gamma_{7,8} = 45 - 22 - 7 = 16$
11	$q_{7,11}$	$t_{11}^{(1)} - t_7^{(1)} - \gamma_{7,11} = 42 - 22 - 5 = 15$
12	$q_{8,12}^*$	$t_{12}^{(1)} - t_8^{(1)} - \gamma_{8,12} = 48 - 29 - 3 = 16$
13	$q_{10,13}$	$t_{13}^{(1)} - t_{10}^{(1)} - \gamma_{10,13} = 55 - 38 - 3 = 14$
14	$q_{11,13}$	$t_{13}^{(1)} - t_{11}^{(1)} - \gamma_{11,13} = 55 - 42 - 2 = 11$

Операции, относящиеся к критической последовательности $q_{0,1}$, $q_{1,3}$, $q_{3,9}$, $q_{4,5}$, $q_{4,6}$ и $q_{6,7}$, жестко закреплены на шкале времени и не могут быть перемещены. Операции $q_{2,3}$, $q_{2,5}$ и $q_{4,6}$ могут быть смещены вправо до тех пор, пока не достигнут граничной линии критического пути. Операцию $q_{1,2}$ можно сместить только вправо, пока ее окончание не совпадет с моментом $t_2^{(1)} = 4$. При этом смещение операции $q_{1,2}$ вправо на некоторый отрезок времени Δt приведет к смещению вправо на такой же отрезок времени операций $q_{2,3}$ и $q_{2,5}$.

На линейной диаграмме наглядно видны резервы времени для выполнения отдельных работ и взаимосвязи их при возможных перемещениях.

При повторяющемся, или поточном, производстве выполнения комплекса работ период производства T_n равняется продолжительности самой длительности операции. Для диаграмм, изображенных на рис. 1 и 4, самой продолжительной операцией является операция $q_{1,3}$. Она и определяет периодичность потока T_n , равного $\gamma_{1,3}$ единицам времени. На рис. 4 изображена диаграмма поточного производства выполнения комплексов работ, полученного на основе диаграммы единичного комплекса (рис. 3). Операции, относящиеся к каждому единичному комплексу, имеют свои

штриховку. Линейную диаграмму можно использовать для анализа распределения во времени какого-либо показателя $X(t)$, характеризующего производство. Таким показателем могут быть стоимость, необходимое количество рабочей силы и т.п.

В этом случае каждая операция будет изображаться не линией, или полосой (как на рис. 3 и 4), а в виде графика непрерывной, или дискретной, функции $X_{ij}(t)$, указывающей, как изменяется показатель на интервале Δ_{ij} (рис. 5). Суммируя показатели всех одновременно выполняемых операций, получим суммарный показатель $X(t)$ всего производства на интервале T_n . Если обратиться к диаграмме (рис. 4), то там для всех операций показатель одинаков по величине и неизменен во времени. Пусть этим показателем будет требуемое количество рабочей силы. Суммирование по всем одновременно выполняемым операциям дает распределение требуемого количества рабочей силы во времени (ступенчатый график $X(t)$ внизу на рис. 4). Как видно, требуемое количество рабочей силы распределено неравномерно. Наибысшее количество рабочей силы ($X = 50$) используется в интервале $3+nT_n \leq t \leq 4+nT_n$; ($X = 20$) - используется в интервале $nT_n \leq t \leq 1+nT_n$ ($n=0,1,2\dots$). Однако для выполнения плана работ с периодичностью $T_n = 6$, согласно диаграмме рис. 4, придется содержать $X = 50$ единицам рабочей силы, но, таким образом, рабочая сила будет использоваться нерационально. Перемещая операции, не относящиеся к критической последовательности, можно попытаться добиться более равномерного распределения требуемой рабочей силы (рис. 5). Так, например, сместив операцию q_{23} на единицу времени вправо, мы уже снизим требуемое количество рабочей силы до 40 единиц. Наименьшее требуемое количество рабочей силы X_{min} получается при равномерном распределении, когда $X_{min} = const$ на всех интервалах T_n . При этом

$$X_{min} = \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} X(t) dt. \quad (2.1)$$

(В рассматриваемом примере $X_{min} = 33,3$ единицы). Добиться равномерного распределения $X(t)$ конечно не всегда возможно. Мерой равномерности распределения может служить функционал

$$J = \int_0^{T_n} [X(t) - X_{min}]^2 dt. \quad (2.2)$$

Перемещая операции, не относящиеся к критической последова-

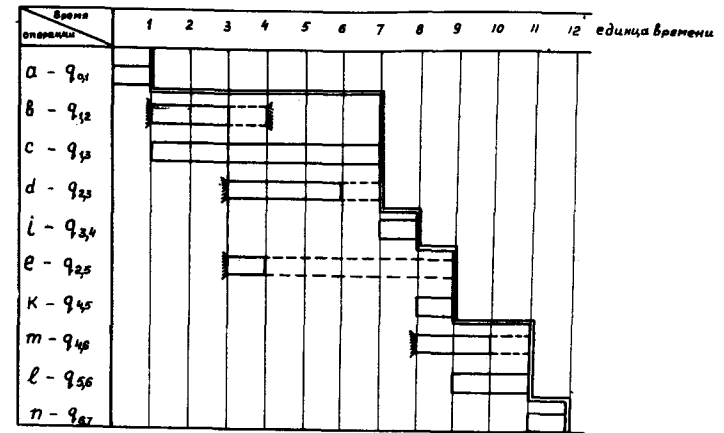


Рис. 4

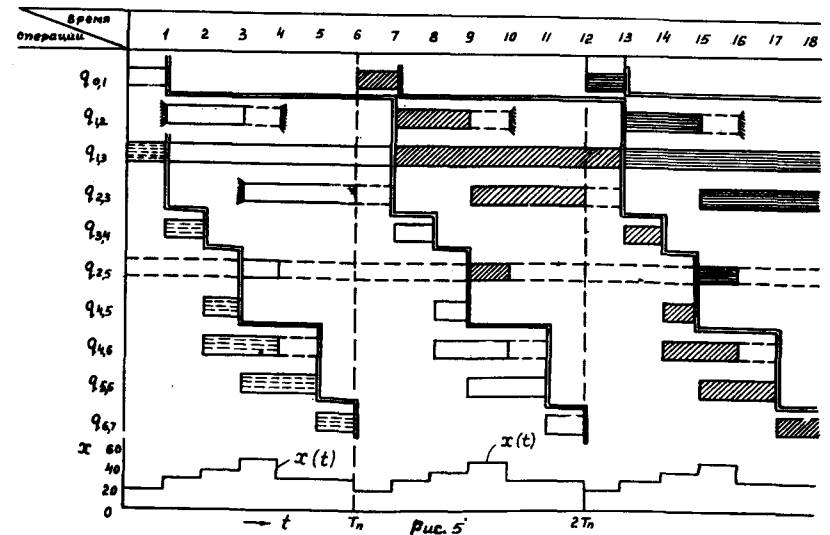
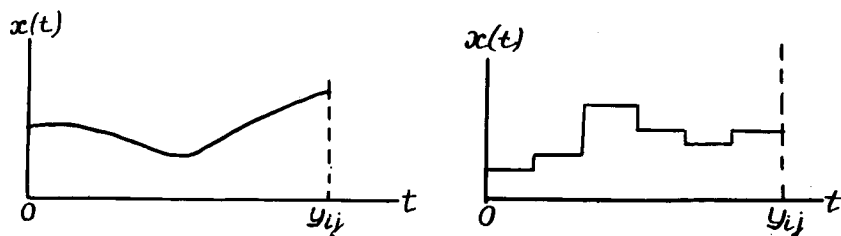


Рис. 5



Р и с. 6.



Р и с. 7

тельности, следует добиться минимума функционала (2.2).

В [12] приводится алгоритм минимизации функционала, аналогичного (2.2).

3. Минимизация стоимости разработки (комплекса работ) при заданном сроке

При решении этой задачи предполагается, что прямые расходы, или стоимость выполнения каждой операции (соответственно всей разработки), возрастает с сокращением сроков выполнения работы, т.е. с уменьшением y_{ij} . Предполагается, что зависимость стоимости C_{ij} выполнения каждой работы q_{ij} линейно зависит от y_{ij} , т.е.

$$c_{ij} = -a_{ij} y_{ij} + b_{ij}, \quad (3.1)$$

где

$$a_{ij} \geq 0 \text{ и } b_{ij} > 0.$$

Далее, продолжительность каждой работы ограничивается сверху и снизу

$$0 \leq d_{ij} \leq y_{ij} \leq D_{ij} < \infty, \quad (3.2)$$

и каждая работа должна быть выполнена в отводимый для нее промежуток времени, т.е.

$$t_j - t_i - y_{ij} \geq 0. \quad (3.3)$$

Общая стоимость прямых расходов на разработку

$$C = \sum_{ij} -a_{ij} y_{ij} + b_{ij} \quad (3.4)$$

минимизируется при условиях (3.2) и (3.3) при заданном сроке окончания всех работ $t_n = \lambda$. Как видно, сформулированная задача является задачей линейного программирования. Возможность существования минимума суммы (3.4) при фиксированном $t_n = \lambda$ может быть пояснена на примере сети из трех событий (рис. 6). Если в этой сети фиксировать t_2 , то, меняя t_1 при ограничениях (3.2) и (3.3), можно всегда найти минимальную стоимость обеих работ (работа q_{02} не показана на рис. 6, так как при $t_2 = \text{const}$ она на минимум стоимости не влияет).

Если задать новое, например меньшее значение t_2 , то суммарная стоимость обеих работ возрастает; однако можно найти такое значение t_x , когда возросшая стоимость будет минимальной по отношению к стоимости при всех других допустимых значениях t_x . Иными словами, для сети из $n+1$ событий при фиксированном $t_n = \lambda$ можно найти такие t_i и y_{ij} , когда общая прямая стоимость всей разработки будет минимальной. Сеть с таким распределением t_i и y_{ij} является оптимальной сетью. Для каждого значения $t_n = \lambda$ существует своя оптимальная сеть и свое значение минимальной стоимости. Цель дальнейшего исследования - получение зависимости минимальной стоимости прямых расходов от продолжительности разработки, т.е.

$$C_{\text{прям}}^{\min} = f(\lambda).$$

Эта функция с ростом λ будет убывать.

При желании можно подсчитать общую стоимость проекта

$$C_{\text{общ}} = C_{\text{прям}}^{\min} + C_{\text{косв}},$$

где $C_{\text{косв}} = \psi(\lambda)$ - стоимость косвенных расходов (накладных), возрастающих обычно с ростом λ . Поскольку $C_{\text{прям}}^{\min}$ убывающая, а $C_{\text{косв}}$ возрастающая функции, то найдется такое λ , при котором $C_{\text{общ}}$ будет минимально.

Решение задач линейного программирования с целью определения $C_{\text{прям}}^{\min} = f(\lambda)$ предварительно потребует несколько более строгих формулировок, чем это было только что сделано в пояснительном тексте, что нами сделано в [1].

Алгоритм решения этой задачи рассмотрен в [4] [5].

4. Случайные сети

В § 1,2,3 предполагалось, что длительности операций строго определены и могут меняться только в некоторых пределах, будучи однозначно связанными со стоимостью.

Таким образом, фиксированные значения стоимостей всех операций определяют полностью некоторый план с соответствующей ему детерминированной сетью.

В действительности более реально предположение, что длительности операций являются случайными с некоторым распределением вероятностей. В этом случае очевидно, что и времена t_i появления событий будут случайными величинами, следовательно,

и полное время выполнения комплекса работ λ случайной величиной будет.

При самых общих предположениях задачей оптимизации такого плана является стохастическое программирование со случайным целевым вектором при случайных ограничениях.

Один из возможных подходов к решению этой задачи состоит в замене всех случайных величин их математическими ожиданиями, что сводит ее к рассмотренной ранее схеме. В этом случае дополнительным требованием является необходимость вычисления некоторых вероятностных характеристик, например дисперсий случайных величин, доверительных интервалов для оценок и т.п.

Часто приходится решать ограниченную задачу, когда не требуется нахождение оптимальных планов, а строится лишь временной график и, следовательно, необходимы лишь временные оценки. Сформулируем задачу несколько точнее. Предполагается, что технологически проект задан, т.е. последовательность операций и их взаимосвязи фиксированы, а случайными являются лишь длительности операций. Под случайной сетью в дальнейшем понимается сеть с фиксированной структурой, но случайной длиной стрелок. Предполагается заданным распределение вероятностей случайных величин y_{ij} и их совместное распределение. В этих условиях необходимо определить характеристики сети - времена появления событий, критические пути, резервы времени и т.д.

Идеальным решением был бы, по-видимому, метод расчета вероятностного распределения этих величин. Так как имеющиеся общие методы приводят к громоздким вычислениям, то во избежание последнего возможны два обходных пути.

Первый основан на использовании методов Монте-Карло. Моделирование случайной сети на ЭВМ и проигрывание ее позволяет в принципе получить распределение вероятностей появления всех событий, вероятности появления того или иного критического пути, вероятности принадлежности операций к критическому пути, различные средние значения и другие характеристики. Один из возможных вариантов использования методов Монте-Карло указан в [10].

Второй пусть состоит в нахождении различных оценок основных характеристик аналитическим путем, например оценок для математического ожидания длительности проекта, вероятности его выполнения в намеченный срок и т.п. Достаточно простой в использовании является методика, изложенная в [8].

Предполагается, что y_{ij} - независимые, одинаково распределенные случайные величины с плотностью:

$$P_{ij}(x) \begin{cases} K_{ij}(x - a^i)(b^i - x) & \text{для } a^i \leq x \leq b^i \\ 0 & \text{для } x < a^i \text{ или } b^i < x \end{cases} \quad (4.1)$$

(P_{ij} - плотность вероятности бета-распределения).

Постулируется, что математическое ожидание и дисперсия выражаются следующими формулами:

$$M y_{ij} = \bar{y}_{ij} = \frac{1}{6}(\alpha^i + 4m^i + \beta^i),$$

$$D y_{ij} = \sigma_{ij}^2 = \frac{1}{36}(\beta^i - \alpha^i)^2, \quad (4.2)$$

где m^i - мода распределения случайной величины y_{ij} , а значения α^i и β^i соответствуют (4.1).

Параметры α^i , β^i и m^i называются соответственно "оптимистической", "пессимистической" и "наиболее вероятной" оценками для времени y_{ij} , необходимого для выполнения операции q_{ij} ; полученные путем опроса специалистов эти оценки позволяют при принятых предположениях вычислить средние значения и дисперсии длительности всех операций.

Эти данные дают возможность вычислить оценки \bar{t}_i и $\bar{\sigma}_i^2$ для математических ожиданий \bar{t}_i и дисперсий $\bar{\sigma}_i^2$ времени появления событий.

Используя описанную в [I] методику, получаем следующие рекуррентные соотношения (сеть предполагается упорядоченной):

$$\begin{cases} \bar{t}_0 = 0 \\ \bar{t}_i = \bar{t}_0 + \bar{y}_{0i} \\ \bar{t}_j = \max_{q_{ij} \in P} (\bar{t}_i + \bar{y}_{ij}) = \bar{t}_k + \bar{y}_{kj} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (4.3)$$

(здесь K равно тому значению индекса i , при котором сумма $\bar{t}_i + \bar{y}_{ij}$ в j -й строке достигает максимума);

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_0^2 = 0 \\ \bar{\sigma}_i^2 = D(t_0 + y_{0i}) = \bar{\sigma}_0^2 + \sigma_{0i}^2 \\ \bar{\sigma}_j^2 = D(t_k + y_{kj}) = \bar{\sigma}_k^2 + \sigma_{kj}^2 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (4.4)$$

(Значение K выбирается из формулы (4.3)).

Эти формулы позволяют получать оценки для средних значений и дисперсий наиболее ранних возможных времен начала выполнения операций и в обозначениях § I $\bar{t}_i = \bar{t}_i^{(0)}$

Аналогичные соотношения можно выписать для средних значе-

ний и дисперсий наиболее поздних времен окончания операций $\bar{t}_i^{(n)}$ и $\bar{\sigma}_i^{(n)2}$:

$$\begin{cases} \bar{t}_n^{(n)} = \bar{\lambda} = \bar{t}_n \\ \dots \\ \bar{t}_i^{(n)} = \min_{q_{ij} \in P} (\bar{t}_j^{(n)} - \bar{y}_{ij}) = \bar{t}_k^{(n)} - \bar{y}_{ik} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \end{cases} \quad (4.5)$$

и

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_n^{(n)2} = \bar{\sigma}_n^2 \\ \dots \\ \bar{\sigma}_i^{(n)2} = \bar{\sigma}_k^{(n)2} + \bar{\sigma}_{ik}^2 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \end{cases} \quad (4.6)$$

(K равно тому значению индекса j , при котором разность $\bar{t}_j^{(n)} - \bar{y}_{ij}$ в i -й строке минимальна).

Дополнительное предположение о том, что время выполнения проекта λ имеет нормальное распределение, позволяет получить значение вероятности выполнения проекта в определенный срок.

Предполагается, что величина

$$x = \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{\bar{\sigma}_\lambda}$$

нормально распределена с параметрами 0, 1 и тогда

$$P(\lambda \leq \lambda_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda_0} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \Phi\left(\frac{\lambda_0 - \bar{\lambda}}{\bar{\sigma}_\lambda}\right).$$

Естественно, что решается и обратная задача - задаются значением вероятности P и из уравнения $\Phi\left(\frac{\lambda_0 - \bar{\lambda}}{\bar{\sigma}_\lambda}\right) = P$ находят величину λ_0 , которая принимается за исходное плановое время.

Описанная методика, будучи относительно простой в применении, обладает рядом существенных недостатков.

Нетрудно видеть, что оценка $\bar{\lambda}$ для истинного среднего времени выполнения проекта $\bar{\lambda}$ является всегда "оптимистической", то есть имеет место $\bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}$.

В самом деле, если обозначить через (z_1, z_2, \dots, z_p) полный набор всевозможных путей, соединяющих начало и конец случайной сети, то истинное среднее $\bar{\lambda}$ должно вычисляться путем определения максимального пути в каждой реализации и последующего усреднения его по множеству реализаций:

$$\bar{\lambda} = M \max [z_1, z_2, \dots, z_p]. \quad (4.7)$$

ний и дисперсий наиболее поздних времен окончания операций

$$\begin{cases} \bar{t}_i^{(0)} \text{ и } \bar{\sigma}_i^{(0)2} : \\ \bar{t}_n^{(0)} = \bar{\lambda} = \bar{t}_n, \\ \dots \\ \bar{t}_i^{(0)} = \min_{q_{ij} \in P} (\bar{t}_j^{(0)} - \bar{y}_{ij}) = \bar{t}_n^{(0)} - \bar{y}_{in} \quad (i=0, 1, \dots, n-1) \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_n^{(0)2} = \bar{\sigma}_n^2, \\ \dots \\ \bar{\sigma}_i^{(0)2} = \bar{\sigma}_n^2 + \bar{\sigma}_{in}^2 \quad (i=0, 1, \dots, n-1), \end{cases} \quad (4.6)$$

(\mathcal{K} равно тому значению индекса j , при котором разность $\bar{t}_j^{(0)} - \bar{y}_{ij}$ в i -й строке минимальна).

Дополнительное предположение о том, что время выполнения проекта λ имеет нормальное распределение, позволяет получить значение вероятности выполнения проекта в определенный срок.

Предполагается, что величина

$$x = \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{\bar{\sigma}_\lambda}$$

нормально распределена с параметрами 0, 1 и тогда

$$P(\lambda \leq \lambda_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\lambda_0 - \bar{\lambda}}{\bar{\sigma}_\lambda}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \Phi\left(\frac{\lambda_0 - \bar{\lambda}}{\bar{\sigma}_\lambda}\right).$$

Естественно, что решается и обратная задача - задаются значением вероятности P и из уравнения $\Phi\left(\frac{\lambda_0 - \bar{\lambda}}{\bar{\sigma}_\lambda}\right) \geq P$ находят величину λ_0 , которая принимается за исходное плановое время.

Описанная методика, будучи относительно простой в применении, обладает рядом существенных недостатков.

Нетрудно видеть, что оценка $\bar{\lambda}$ для истинного среднего времени выполнения проекта $\bar{\lambda}$ является всегда "оптимистической", то есть имеет место $\bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}$.

В самом деле, если обозначить через (z_1, z_2, \dots, z_p) полный набор всевозможных путей, соединяющих начало и конец случайной сети, то истинное среднее $\bar{\lambda}$ должно вычисляться путем определения максимального пути в каждой реализации и последующего усреднения его по множеству реализаций:

$$\bar{\lambda} = M \max [z_1, z_2, \dots, z_p]. \quad (4.7)$$

нения проекта в определенный срок, расчета исходного планового времени математически не обоснованы. Необходимо, во всяком случае, оценить, насколько эти величины отличаются от истинных. Это можно сделать, сравнив результаты, полученные другими методами, например моделированным и аналитическим путем. Некоторые соображения относительно аналитического подхода можно найти в работе [II].

Л и т е р а т у р а

1. Поспелов Г.С., Тейман А.Н. Автоматизация процессов управления разработками больших систем или сложных комплексов. Известия АН СССР. Техническая кибернетика № 4, 1963.
2. Немчинов В.С. О применении математических методов в экономических исследованиях и планировании, М., 1960.
3. Канторович Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., 1959.
4. Kelley I.E. Critical-path planing and scheduling: mathematical basis.- Opns Res., 9, 1961, 296-320.
5. Ford L.R., Fulkerson D.R. A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the hitecock problem.- Canad.J.Math., 9, 1957, 210-218.
6. Fulkerson D.R. Expected critical path lengths PERT networks.- Opns. Res., 9, 1961, 808-817.
7. Eisner H.A. Generalized network approach to the planning and scheduling of a research project. - Opns. Res., 10, 1962, 115-125.
8. Malcom D.G., Roseboom J.H., Clark C.F., Fazar W. Applic. techn. for research and development program evaluation.- Opns. Res., 7, 1959, 646-669.
9. Bigdon C.G. Bibliography on project planning and control by network analysis, 1959 - 1961. - Opns. Res., 10, 1962, 728-731.
10. Van Slyke R.M. Monte Carlo methods and the PERT problem.- Opns. Res., 11, 1963, 839-860.
11. Clark C.E. The greatest of a finite set of random variables. - Opns. Res., 9, 1961.
12. Burgess A.R., James B. Kullbrew. Variation in activity level on a cyclical arrow diagram.- The journal of Industrial engineering, March-April, 1962, V, XIII, N 2.

13. Сидеев И.М. К вопросу о синтезе логических схем для поиска неисправностей и контроля состояния сложных систем. - Изв. АН СССР, ОТН, Техническая кибернетика, 1963, № 2.