ВНЕШНЯЯ ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

В.А. Цецохо

§ I. Некоторые свойства потенциалов простого и двойного слоя

Пусть S - простая замкнутая поверхность трёхмерного пространства, имеющая за исключением конечного числа точек непрерывно меняющуюся касательную плоскость. Точки, в которых нет касательной плоскости, назовём "угловыми" точками и обозначим их через A_i $(i=1,2,\dots,n)$. Пусть $\Delta=\min R(A_i,A_k)$ ($R(A_iA_k)$ - расстояние между точками A_i и A_k) и $0<\delta<\frac{\Delta}{2}$. Обозначим через S_δ ту часть поверхности S, которая останется, если выделить из неё участки, лежащие внутри сфер радиуса δ с центрами в "угловых" точках.

Будем считать, что при всех достаточно малых δ пересечение каждой из упомянутых сфер с поверхностью S состоит из одной замкнутой гладкой кривой. Таким образом, поверхность S_δ (при всяком достаточно малом δ) является гладкой незамкнутой поверхностью, ограниченной конечным числом гладких контуров. В качестве нормали к S_δ в граничной точке будем брать нормаль к поверхности S в этой точке.

Далее, будем считать, что выполнены следующие условия:

а) Если P_1 и P_2 - две точки поверхности S_δ, n_1, n_2 - направления нормалей к поверхности S_δ в этих точках, а R - расстояние между точками P_1 и P_2, то

$$|n_1-n_2|<A\cdot R^\lambda \quad (0<\lambda\leq 1),$$

где A и λ - постоянные числа, зависящие, вообще говоря, от δ.

в) Вокруг каждой точки P поверхности S_δ можно описать такую сферу (её называют сферой Ляпунова) радиуса d_δ, не зависящего от P, что прямые, параллельные нормали к S_δ в точке P пересекают часть S_δ, находящуюся внутри упомянутой сферы, не более чем один раз.

с) Телесный угол, под которым любая часть поверхности S видна из произвольной точки, ограничен.

Замкнутые поверхности, в каждой точке которых имеется касательная плоскость и которые удовлетворяют условиям а), в), с), называют поверхностями Ляпунова.

Мы распространим некоторые результаты классической теории потенциала, построенной для поверхностей Ляпунова, на описанный нами класс поверхностей, не являющихся таковыми.

Пусть P - произвольная точка пространства, N, P_0 - точки поверхности S, а n_N, n_0 - единичные векторы, направленные по внешней нормали к S в этих точках. Пусть, далее, функция $\mu(N)$ непрерывна на S, за исключением "угловых" точек и интегрируема, т.е.

$$\left|\iint_S \mu\, ds\right|<\infty .$$

Предполагая, что точка P не лежит на поверхности S, рассмотрим интегралы:

$$\varphi(P)=\frac{1}{2\pi}\iint_S \mu(N)\,\frac{1}{R(P,N)}\,dS_N\ , \qquad (\mathrm{I})$$

$$w(P)=\frac{1}{2\pi}\iint_S \mu(N)\,\frac{\partial \frac{1}{R(P,N)}}{\partial n_N}\,dS_N\ , \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\varphi(P)}{\partial n_0}=\frac{1}{2\pi}\iint_S \mu(N)\,\frac{\partial \frac{1}{R(P,N)}}{\partial n_0}\,dS_N\ , \qquad (3)$$

являющиеся соответственно потенциалами простого слоя, двойного слоя и нормальной производной потенциала простого слоя.

Все теоремы теории потенциала, относящиеся к поведению интегралов (I), (2), (3) в малой окрестности точки P_0, лежащей на S основаны на выполнении условий а) и в) лишь для части S, заключенной внутри некоторой сферы Ляпунова с центром в точке P_o, и свойствах функции $\mu(N)$ в окрестности точки P_o (обычно требуется непрерывность $\mu(N)$ в этой окрестности). Если P_o не совпадает с "угловой" точкой нашей поверхности, то в качестве вышеупомянутой сферы можно выбрать сферу, радиус которой равен наименьшему из чисел: $\frac{\delta}{2}$ и d_{δ}, где $\delta>0$ – число, при котором $P_o\in S_\delta$, а $d_{\delta/2}$ – радиус сфер Ляпунова для поверхности $S_{\delta/2}$.

Итак, при наших условиях на поверхность S и функцию $\mu(N)$ справедливы теоремы (см. [I]):

1^0. Интегралы (I), (2), (3) имеют смысл, если точку P заменить точкой P_o, лежащей на S и не совпадающей с "угловыми" точками.

2^0. Потенциал простого слоя (I) есть непрерывная функция в каждой точке пространства, кроме "угловых" точек поверхности S.

3^0. В каждой точке $P_o\in S_\delta$ существуют предельные значения $w_i(P_o), w_e(P_o)$ потенциала двойного слоя (2), когда точка P стремится к P_o, соответственно изнутри и извне S и справедливы формулы:

$$\begin{aligned} w_i(P_o)&=w(P_o)+\mu(P_o)\ ,\\ w_e(P_o)&=w(P_o)-\mu(P_o)\ , \end{aligned} \tag{4}$$

где $w(P_o)$ – прямое значение потенциала двойного слоя в точке P_o поверхности S.

4^0. В каждой точке $P_o\in S_\delta$ существуют предельные значения $\left(\frac{\partial\varphi(P_o)}{\partial n_o}\right)_i, \left(\frac{\partial\varphi(P_o)}{\partial n_o}\right)_e$ нормальной производной (3) потенциала простого слоя, когда точка P, оставаясь на нормали к S в точке P_o, стремится к P_o соответственно изнутри и извне S, причем имеют место формулы:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\varphi(P_o)}{\partial n_o}\right)_i &= \frac{\partial\varphi(P_o)}{\partial n_o}+\mu(P_o)\ ;\\ \left(\frac{\partial\varphi(P_o)}{\partial n_o}\right)_e &= \frac{\partial\varphi(P_o)}{\partial n_o}-\mu(P_o)\ ; \end{aligned} \tag{5}$$

здесь $\frac{\partial\varphi(P_o)}{\partial n_o}$ – прямое значение интеграла (3) на поверхности S.

Для дальнейшего нам понадобится еще одно свойство, имеющее уже глобальный характер:

5^0. При стремлении точки P к P_o по нормали к S нормальная производная (3) потенциала простого слоя стремится к своим предельным значениям (как изнутри S, так и извне S) равномерно по отношению к точке P_o, лежащей на S_δ ж) (δ – любое достаточно малое число).

Если считать, что, когда точка P стремится к P_o по нормали к S, разность

$$\omega(P)=\frac{\partial\varphi(P)}{\partial n_o}-w(P)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S\mu(N)\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_o}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_N}\right)dS_N \tag{6}$$

стремится к своим предельным значениям равномерно на S_δ, то свойство 5^0 можно доказать следующим образом. Потенциал двойного слоя $w(P)$, как это следует из 3^0, является непрерывной функцией вплоть до S за исключением "угловых" точек и, следовательно, к своим предельным значениям (4) на S_δ он стремится равномерно. Но тогда и нормальная производная $\frac{\partial\varphi(P)}{\partial n_o}$ стремится к своим предельным значениям (5) равномерно на S_δ.

Докажем наше предположение о функции $\omega(P)$. Когда S – поверхность Ляпунова, а $\mu(N)$ непрерывна, функция $\omega(P)$ обладает требуемым свойством (см. [I], стр. 588), причем доказательство его не опирается на замкнутость поверхности S. Поэтому, если представить $\omega(P)$ в виде: $\omega(P)=\omega_1(P)+\omega_2(P)$, где

$$\omega_1(P)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S-S_{\delta/2}}\mu(N)\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_o}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_N}\right)dS_N,\quad \omega_2(P)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_{\delta/2}}\mu(N)\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_o}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_N}\right)dS_N,$$

то можно ограничиться рассмотрением только первого слагаемого $\omega_1(P)$.

Функции $\iint\limits_{S-S_{\delta/2}}\mu(N)\mathcal{L}(P,N)\,dS_N$, где $\mathcal{L}(P,N)=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_N}, \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}, \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}, \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}$,

---

ж) В случае, когда S – поверхность Ляпунова, а $\mu(N)$ – непрерывная на ней функция, эта теорема справедлива и при $S_\delta=S$ (см. [I], стр. 587).

(x, y, z – координаты точки P) непрерывны в $\delta/4$ – замкнутой окрестности поверхности S_δ и в силу равномерной непрерывности стремятся к своим предельным значениям на S_δ равномерно. Это обстоятельство и тот факт, что

$$2\pi\omega_1(P) = \cos\widehat{n_0 x}\iint\limits_{S-S_{\delta/2}}\mu(N)\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}dS_N + \cos\widehat{n_0 y}\iint\limits_{S-S_{\delta/2}}\mu(N)\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}dS_N +$$

$$+\cos\widehat{n_0 z}\iint\limits_{S-S_\delta}\mu(N)\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}dS_N - \iint\limits_{S-S_{\delta/2}}\mu(N)\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial n_N}dS_N$$

(здесь $\cos\widehat{n_0 x}, \cos\widehat{n_0 y}, \cos\widehat{n_0 z}$ – составляющие вектора n_0 по осям x, y, z), позволяют утверждать, что функция $\omega_1(P)$ стремится к своим предельным значениям на S_δ равномерно.

Свойство 5^0 доказано.

Из 5^0, 4^0 и непрерывности $\mu(N)$ имеем:

6^0. Прямое значение $\frac{\partial\varphi(P_0)}{\partial n_0}$ нормальной производной потенциала простого слоя является непрерывной функцией на S за исключением "угловых" точек.

§ 2. Постановка краевой задачи. Интегральное уравнение

Пусть r, z, θ – цилиндрические координаты и поверхность S образована вращением вокруг оси z дуги L , заданной уравнением $r = f(z)$, $0 \leqslant z \leqslant 2$. Будем считать, что функция $f(z)$ дважды непрерывно дифференцируема и принимает значение нуль только на концах промежутка $[0,2]$, причем

$$0 < f'(0) < \infty, \quad -\infty < f'(2) < 0 .$$

Относительно построенной таким способом поверхности отметим следующее:

Поверхность S имеет две "угловые" точки A и B , расположенные на оси z (рис. I).

В силу гладкости $f(z)$ наша поверхность удовлетворяет условиям а), в) § I, при этом показатель λ в условии в) равен 1, а в качестве поверхностей S_δ мы берем часть S , заключенную между плоскостями $z = \delta$, $z = 2 - \delta$; и, наконец, для того чтобы выполнялось условие с) можно считать, например, что функция $f(z)$ кусочно-монотонна.

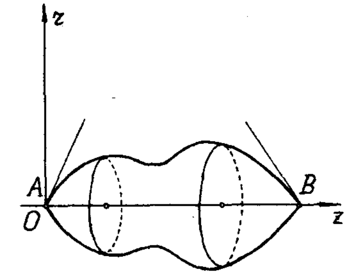

Рис.I

ЗАДАЧА I. (Внешняя задача Неймана для уравнения Лапласа). Найти вне S гармоническую, регулярную на бесконечности функцию φ , удовлетворяющую условию

$$\left(\frac{\partial\varphi(P_0)}{\partial n_0}\right)_e = F(P_0) \qquad (7)$$

в каждой точке поверхности S , не совпадающей с точками A и B . Здесь $\left(\frac{\partial\varphi(P_0)}{\partial n_0}\right)_e$ – предельное значение нормальной производной функции $\varphi(P)$ на S , когда точка P стремится к P_0 по нормали n_0 к поверхности S в точке P_0 . $F(P_0)$ – заданная функция, непрерывная в каждой точке поверхности S за исключением точек A и B .

Имея в виду приложения, ограничимся случаем, когда заданная на границе S функция F не зависит от координаты θ . (В дальнейшем будем рассматривать F как функцию от z :

$$F \equiv F(z); \quad 0 < z < 2).$$

Задача I в приведенной постановке, вообще говоря, неразрешима из-за того, что ничем не оговорено поведение $F(z)$ в окрестности "угловых" точек $z = 0$, $z = 2$. Поэтому будем полагать, что $F(z)$ удовлетворяет условию:

$$F(z)\cdot f(z)\sqrt{1 + f'^2(z)} \in C \quad , \qquad (8)$$

где C – пространство равномерно непрерывных в промежутке (0,2) функций.

ЗАДАЧА II. Для всякой функции F , удовлетворяющей условию (8), требуется найти решение задачи I, являющееся потенциалом простого слоя, распространенного по S с плотностью μ , не зависящей от θ и обладающей свойством (8).

Плотность μ , удовлетворяющая условиям задачи II, как функция точки N поверхности S удовлетворяет и условиям §I (непрерывность в каждой "неугловой" точке и интегрируемость на S); поэтому интегралы (I), (2), (3) с такой плотностью обладают всеми свойствами, перечисленными в § I. Воспользовавшись одним из них (второй из формул (5)), получим для μ интегральное уравнение

$$F=-\mu+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S}\mu\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_0}\,dS_N\,; \tag{9}$$

решение которого эквивалентно решению задачи П.

Используя осевую симметрию поверхности S и функции μ, сведем двумерное уравнение (9) к одномерному. (см. также первую статью настоящего сборника).

Потенциал простого слоя (I) в нашем случае имеет вид

$$\varphi(P)=\varphi(r,z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^2\int\limits_0^{2\pi}\frac{\mu(\zeta)\cdot f(\zeta)\cdot\sqrt{1+f'^2(\zeta)}}{\sqrt{r^2+f^2(\zeta)-2rf(\zeta)\cos\theta'+(z-\zeta)^2}}\,d\zeta\cdot d\theta'\,.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}\alpha&=r+f(\zeta)\,,\\ \gamma&=r-f(\zeta)\,,\\ \beta&=z-\zeta\,,\\ k&=2\cdot\sqrt{\frac{r\cdot f(\zeta)}{\alpha^2+\beta^2}}\,.\end{aligned} \tag{I0}$$

Путем элементарных преобразований находим

$$\varphi(r,z)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^2\mu(\zeta)\cdot f(\zeta)\sqrt{1+f'^2(\zeta)}\cdot\frac{K(k)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,d\zeta\,. \tag{II}$$

Здесь $K(k)$ - полный эллиптический интеграл I-го рода.

Предполагая, что точка (r,z,θ) не лежит на S, найдем производную от потенциала $\varphi(r,z)$ в направлении $\vec{l}(\cos\hat{lr},\cos\hat{lz},0)$. Будем иметь

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=-\frac{1}{\pi r}\int\limits_0^2\mu(\zeta)\cdot f(\zeta)\cdot\sqrt{1+f'^2(\zeta)}\,\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left[K(k)\cos\hat{lr}+E(k)\cdot\mathcal{G}\right]d\zeta, \tag{I2}$$

где

$$\mathcal{G}=\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\frac{\gamma}{\beta}\cos\hat{lr}+\cos\hat{lz}}{(\frac{\gamma}{\beta})^2+1}-\frac{\cos\hat{lr}-\frac{\gamma}{\beta}\cos\hat{lz}}{(\frac{\gamma}{\beta})^2+1}\,, \tag{I3}$$

$E(k)$ - полный эллиптический интеграл 2-го рода.

Используя формулу (I2), когда точка (r,z,θ) лежит на S, а $\vec{l}$ совпадает с направлением нормали n_0 в этой

точке, вместо (9) получим уравнение

$$F(z)=-\mu(z)-\frac{1}{\pi f(z)\sqrt{1+f'^2(z)}}\int\limits_0^2\mu(\zeta)\cdot f(\zeta)\cdot\sqrt{1+f'^2(\zeta)}\,\frac{K(k)-E(k)\cdot\mathcal{G}_0}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,d\zeta, \tag{I4}$$

$$0<z<2\,,\quad r=f(z)\,,$$

$$\mathcal{G}_0=\frac{f'(z)\cdot\frac{\gamma}{\beta}+1}{(\frac{\gamma}{\beta})^2+1}+\frac{\alpha}{(\frac{\gamma}{\beta})^2+1}\cdot\frac{f'(z)-\frac{\gamma}{\beta}}{\beta}\,. \tag{I5}$$

Положим

$$\begin{aligned}\mu(z)\cdot f(z)\cdot\sqrt{1+f'^2(z)}&=\nu(z)\,,\\ F(z)\cdot f(z)\cdot\sqrt{1+f'^2(z)}&=-\Phi(z)\,.\end{aligned} \tag{I6}$$

Тогда уравнение (I4) запишется в виде:

$$\Phi(z)=\nu(z)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^2\nu(\zeta)\cdot T(z,\zeta)\,d\zeta\,, \tag{I7}$$

$$0<z<2\,,\quad r=f(z)\,,$$

$$T=\frac{K(k)-E(k)\cdot\mathcal{G}_0}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,. \tag{I8}$$

С этим уравнением мы и будем в дальнейшем иметь дело.

§ 3. Исследование интегрального уравнения

В настоящем параграфе мы изучим уравнение (I7) в пространстве C равномерно непрерывных в промежутке (0,2) функций. Запишем уравнение (I7) в форме

$$(E+U)\,\nu=\Phi\,, \tag{I9}$$

где

$$U\nu\equiv\frac{1}{\pi}\int\limits_0^2 T(z,\zeta)\cdot\nu(\zeta)\,d\zeta\,. \tag{20}$$

Для функции $T(z,\zeta)$ вместо (I8) будем пользоваться выражением

$$T(z,\zeta)=\frac{4\cdot f(z)\cdot f(\zeta)}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)^3}}D(k)+\frac{2\cdot f(z)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,\frac{\left[\frac{\gamma}{\beta}-f'(z)\right]\frac{1}{\beta}}{(\frac{\gamma}{\beta})^2+1}E(k)\equiv T_1(z,\zeta)+T_2(z,\zeta). \tag{2I}$$

Здесь

$$D(k)=\frac{K(k)-E(k)}{k^2}\,. \tag{2I'}$$

а величины α, β, γ, k определяются по формулам (10) при $\tau = f(z)$.

Следуя [8], назовем ядро $\mathcal{K}(z,\zeta)$ непрерывным в целом в прямоугольнике $a \leqslant z \leqslant b$, $c \leqslant \zeta \leqslant d$, если для всякого $\eta > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что как только $|z_1 - z_2| < \delta$, то

$$\int_c^d |\mathcal{K}(z_1,\zeta) - \mathcal{K}(z_2,\zeta)|\, d\zeta < \eta .$$

Если ядро $\mathcal{K}(z,\zeta)$ непрерывно в целом в прямоугольнике $a \leqslant z \leqslant b$, $c \leqslant \zeta \leqslant d$, то имеют место следующие очевидные утверждения:

1) тем же свойством обладает и ядро $h(\zeta)\cdot\mathcal{K}(z,\zeta)$, где $h(\zeta)$ – абсолютно интегрируемая в $[c,d]$ функция.

2) Интеграл $\int_c^d \mathcal{K}(z,\zeta)\, d\zeta$ есть непрерывная в $[a,b]$ функция.

3) Оператор $Vh \equiv \int_c^d h(\zeta)\mathcal{K}(z,\zeta)\, d\zeta$ является вполне непрерывным оператором из $C[c,d]$ в $C[a,b]$. Символом $C[\alpha,\beta]$ мы обозначаем пространство непрерывных в $[\alpha,\beta]$ (или равномерно непрерывных в (α,β)) функций.

Далее, известно ([8] стр. 102), что если ядро $\mathcal{K}(z,\zeta)$ разрывно в прямоугольнике $a \leqslant z \leqslant b$, $c \leqslant \zeta \leqslant d$ только вдоль конечного числа линий, представимых уравнениями $\zeta = g_k(z)$, $k = 1,2,\dots,n$, с непрерывными функциями $g_k(z)$, и выполнено условие

$$\int_c^d |\mathcal{K}(z,\zeta)|^2 d\zeta < const, \quad z \in [a,b] \tag{22}$$

то это ядро непрерывно в целом в прямоугольнике $a \leqslant z \leqslant b$, $c \leqslant \zeta \leqslant d$.

Рассмотрим ядра $T_1(z,\zeta)$, $T_2(z,\zeta)$. Непосредственно видно, что они непрерывны в каждой точке (z,ζ) квадрата $(0 \leqslant z \leqslant 2,\ 0 \leqslant \zeta \leqslant 2)$, если $z \neq \zeta$.

Пользуясь формулой ([9] стр. 178)

$$D(k) = \ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} + O(1), \quad k \to 1$$

нетрудно показать, что

$$D(k) \leqslant const \cdot \ln \frac{4}{|z-\zeta|} . \tag{23}$$

Функция $\frac{4f(z)\cdot f(\zeta)}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)^3}}$ непрерывна во всяком прямоугольнике $(\delta_1 \leqslant z \leqslant \delta_2,\ \delta_3\ \ \zeta \leqslant \delta_4)$. где $\delta_1^2 + \delta_3^2 \neq 0,\ \delta_2^2 + \delta_4^2 \neq 0,\ 0 < \delta_i < 1,\ i = 1,2,3,4$

и в силу этого из оценки (23) заключаем, что $T_1(z,\zeta)$ в таком прямоугольнике является ядром со слабой особенностью и, следовательно, удовлетворяет в нем условию *) (22).

Для ядра $T_2(z,\zeta)$ условие (22) выполнено во всем квадрате $(0 \leqslant z \leqslant 2,\ 0 \leqslant \zeta \leqslant 2)$ так как это ядро ограничено. Действительно,

$$E(k) \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{2f(z)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \leqslant 2,$$

и, в силу дважды непрерывной дифференцируемости функции $f(z)$

$$\left| \frac{\left[\frac{\gamma}{\beta} - f'(z)\right]\frac{1}{\beta}}{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2 + 1} \right| = \left| \frac{f''(c_1)}{f'^2(c)+1} \right| \leqslant const.$$

Таким образом, имеют место следующие две леммы.

ЛЕММА 1. Ядро T_2 непрерывно в целом в квадрате $(0 \leqslant z \leqslant 2,\ 0 \leqslant \zeta \leqslant 2)$.

ЛЕММА 2. Ядро T_1 непрерывно в целом во всяком прямоугольнике

$$(\delta_1 \leqslant z \leqslant \delta_2,\ \delta_3 \leqslant \zeta \leqslant \delta_4);\ \delta_1^2 + \delta_3^2 \neq 0,\ \delta_2^2 + \delta_4^2 \neq 0;\ 0 < \delta_i < 1,\ i = 1,2,3,4.$$

Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Положим

$$U\nu \equiv U_0^\varepsilon \nu + U_1^\varepsilon \nu, \tag{25}$$

где

$$U_0^\varepsilon \nu \equiv \frac{1}{\pi}\int_\varepsilon^{2-\varepsilon} T_1(z,\zeta)\nu(\zeta)\, d\zeta + \frac{1}{\pi}\int_0^2 T_2(z,\zeta)\nu(\zeta)\, d\zeta, \tag{26}$$

$$U_1^\varepsilon \nu \equiv \frac{1}{\pi}\int_0^\varepsilon T_1(z,\zeta)\nu(\zeta)\, d\zeta + \frac{1}{\pi}\int_{2-\varepsilon}^2 T_1(z,\zeta)\nu(\zeta)\, d\zeta. \tag{27}$$

Из леммы 1, леммы 2 и свойства 3) непрерывных в целом ядер заключаем, что U_0^ε вполне непрерывный в $C[0,2]$ оператор. Рассмотрим в $C[0,2]$ оператор U_1^ε. Справедлива

ЛЕММА 3. Функция $\psi(z) = U_1^\varepsilon \nu$ имеет пределы при $z \to 0$, $z \to 2$, и они вычисля-

---

*) Из дальнейшего будет видно, что из-за особенностей функции $\frac{4f(z)\cdot f(\zeta)}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)^3}}$ в точках (0,0), (2,2) условие (22) для ядра $T_1(z,\zeta)$ во всем квадрате $0 < z < 2$, $0 < \zeta < 2$ не выполняется.

ются по формулам:

$$\lim_{z\to 0}\psi(z)=\nu(+0)\cdot\pi\cdot C_A,$$

$$\lim_{z\to 2}\psi(z)=\nu(2-0)\cdot\pi\cdot C_B, \tag{28}$$

где постоянные C_A, C_B определяются по формулам (37), (38).

Рассмотрим случай $z\to 0$. В прямоугольнике $(0<z<\varepsilon,\ 2-\varepsilon\leqslant\zeta\leqslant 2)$ ядро $T_1(z,\zeta)$ непрерывно в целом (лемма 2). Пользуясь свойствами 1), 2) непрерывных в целом ядер, получим:

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{2-\varepsilon}^{\varepsilon}T_1(z,\zeta)\nu(\zeta)d\zeta=\frac{1}{\pi}\int_{2-\varepsilon}^{\varepsilon}T_1(0,\zeta)\nu(\zeta)d\zeta=0\ . \tag{29}$$

Пусть $0<\alpha<\frac{1}{2}$, а $0<z\leqslant\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}},\ \varepsilon<1$. Разобьем первый интеграл в (27) на два слагаемых:

$$\int_0^{\varepsilon}T_1(z,\zeta)\nu(\zeta)d\zeta=\int_0^{z^{\alpha}}\nu(\zeta)\cdot T_1(z,\zeta)d\zeta+\int_{z^{\alpha}}^{\varepsilon}\nu(\zeta)\cdot T_1(z,\zeta)d\zeta\equiv \mathcal{J}_1(z)+\mathcal{J}_2(z). \tag{30}$$

В дальнейшем, чтобы не загромождать выкладок будем считать, что

$$f(\zeta)=f'(0)\zeta \quad \text{при} \quad 0\leqslant\zeta\leqslant\varepsilon\ . \tag{31}$$

Принимая во внимание (31) и монотонность функции $D(k)$, будем иметь:

$$|\mathcal{J}_2(z)|_{0\leqslant z\leqslant\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\leqslant\max|\nu|\cdot const\int_{z^{\alpha}}^{\varepsilon}\frac{\zeta\cdot z}{(\zeta+z)^3}D\Big(\frac{2\sqrt{\zeta\cdot z}}{\zeta+z}\Big)d\zeta\ . \tag{32}$$

Когда ζ изменяется от z^{α} до ε, функции $\frac{\zeta\cdot z}{(\zeta+z)^3}$, $\frac{2\sqrt{\zeta\cdot z}}{\zeta+z}$ достигают максимума при $\zeta=z^{\alpha}$. Поэтому, продолжив неравенство (32), получим:

$$|\mathcal{J}_2(z)|_{0<z\leqslant\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\leqslant const\cdot z^{1-2\alpha}\cdot D\Big(\frac{2z^{\frac{1-\alpha}{2}}}{1+z^{1-\alpha}}\Big)\xrightarrow[z\to 0]{}0\ . \tag{33}$$

К интегралу $\mathcal{J}_1(z)$ применим теорему о среднем

$$\mathcal{J}_1(z)=\nu(c)\int_0^{z^{\alpha}}T_1(z,\zeta)d\zeta\ ,\quad 0<c<z^{\alpha}. \tag{34}$$

Учитывая (31) и полагая $t=\frac{\zeta}{z}$, получаем

$$\int_0^{z^{\alpha}}T_1(z,\zeta)d\zeta=4f'^2(0)\int_0^{z^{\alpha-1}}\frac{t}{[f'^2(0)(1+t)^2+(t-1)^2]^{3/2}}\cdot D\Big(\frac{2\cdot f'(0)\sqrt{t}}{\sqrt{f'^2(0)(1+t)^2+(t-1)^2}}\Big)dt\ . \tag{35}$$

Из (34) и (35) имеем

$$\lim_{z\to 0}\mathcal{J}_1(z)=\nu(+0)\cdot\pi\cdot C_A\ , \tag{36}$$

где

$$C_A=\frac{4f'^2(0)}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{t}{\sqrt{[f'^2(0)(1+t)^2+(1-t)^2]^3}}\cdot D\Big(\frac{2\cdot f'(0)\sqrt{t}}{\sqrt{f'^2(0)(1+t)^2+(1-t)^2}}\Big)dt. \tag{37}$$

Объединяя (29), (33), (36), получаем первую из формул (28). Вторая формула в (28) доказывается аналогично, при этом

$$C_B=\frac{4f'^2(2)}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{t}{\sqrt{[f'^2(2)(1+t)^2+(1-t)^2]^3}}\cdot D\Big(\frac{-2\cdot f'(2)\sqrt{t}}{\sqrt{f'^2(2)(1+t)^2+(1-t)^2}}\Big)dt. \tag{38}$$

Лемма доказана.

Пусть $z_0\in(0,2)$. Тогда при некотором h также и $[z_0-h,z_0+h]\subset(0,2)$. По лемме 2 ядро $T_1(z,\zeta)$ непрерывно в целом в прямоугольниках $(z_0-h<z<z_0+h,\ 0<\zeta\leqslant\varepsilon),(z_0-h<z<z_0+h,2-\varepsilon\leqslant\zeta\leqslant\varepsilon)$, поэтому (см. свойства 1), 2) непрерывных в целом ядер) в каждой внутренней точке интервала (0,2) функция $\psi(z)=U_1^{\varepsilon}\nu$ непрерывна. По лемме 3 $\psi(z)$ имеет пределы при $z\to 0, z\to 2$ и, следовательно, она равномерно непрерывна в (0,2). Таким образом, оператор U_1^{ε} переводит $C[0,2]$ в $C[0,2]$.

Оценим норму оператора U_1^{ε} при достаточно малом ε. Как и при доказательстве леммы 3, для простоты полагаем, что

$$\underset{(0\leqslant z\leqslant\varepsilon_0)}{f(z)=f'(0)z}\ ,\quad \underset{(2-\varepsilon_0\leqslant z\leqslant 2)}{f(z)=f'(2)(z-2)}. \tag{39}$$

Пусть $0<\varepsilon<\frac{\varepsilon_0}{2}$. Тогда при $\varepsilon_0\leqslant z\leqslant 2-\varepsilon_0$ будем иметь

$$\Big|\int_0^{\varepsilon}T_1(z,\zeta)d\zeta+\int_{2-\varepsilon}^{2}T_1(z,\zeta)d\zeta\Big|\leqslant\max_{\substack{z\in[\varepsilon_0,2-\varepsilon_0]\\ \zeta\in[0,\frac{\varepsilon_0}{2}]\cup[2-\frac{\varepsilon_0}{2},2]}}T_1(z,\zeta)\times 2\varepsilon\ . \tag{40}$$

Если же $0\leqslant z\leqslant\varepsilon_0$, то оценивая $\int_0^{\varepsilon}T_1(z,\zeta)d\zeta$ так же, как интеграл $\mathcal{J}_1(z)$ в лемме 3, получаем

$$\Big|\int_0^{\varepsilon}T_1(z,\zeta)d\zeta+\int_{2-\varepsilon}^{2}T_1(z,\zeta)d\zeta\Big|\leqslant\max_{\substack{z\in[0,\varepsilon_0]\\ \zeta\in[2-\frac{\varepsilon_0}{2},2]}}T_1(z,\zeta)\times\varepsilon+C_A\ . \tag{41}$$

Аналогично, если $2-\varepsilon_0 \leqslant z < 2$, то

$$\left|\int_0^{\varepsilon} T_1(z,\zeta)d\zeta + \int_{2-\varepsilon}^{2} T_1(z,\zeta)d\zeta\right| \leqslant \max_{\left(\substack{z\in[2-\varepsilon_0,2] \\ \zeta\in[0,\frac{\varepsilon_0}{2}]}\right)} T_1(z,\zeta)\times\varepsilon + C_B \cdot \qquad (42)$$

Объединяя (40), (4I), (42), имеем при $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2}$:

$$\|U_1^{\varepsilon}\| = \max(C_A, C_B) + O(\varepsilon) . \qquad (43)$$

Таким образом, мы получили следующий результат:

ТЕОРЕМА I. Интегральный оператор U можно представить в виде суммы операторов U_0^{ε} и U_1^{ε} , где U_0^{ε} - вполне непрерывный в $C[0,2]$, а U_1^{ε} - ограниченный с нормой, определяемой по формуле (43).

Покажем, что оператор U_1^{ε} , а вместе с ним и U не являются вполне непрерывными в $C[0,2]$. Для этого рассмотрим ограниченную последовательность $\{\varphi_n(z)\}$ равномерно непрерывных в $(0,2)$ функций, изображенную на рис. 2, где $\varepsilon=\varepsilon_1>\varepsilon_2>\cdots\varepsilon_k>\cdots$, $\varepsilon_n \to 0$. Пусть $\psi_n(z) = U_1^{\varepsilon}\varphi_n$. Если U_1^{ε} - вполне непрерывный оператор, то некоторая подпоследовательность $\{\psi_{n_k}\}$ имеет предел ψ . По лемме (3) $\psi_{n_k}(+0)=C_A$, $\psi_{n_k}(2-0)=0$ значит, и $\psi(2-0)=0$, $\psi(+0)=C_A$. Из последнего равенст-

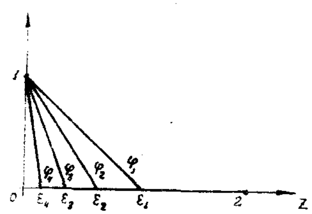

Рис.2

ва следует, что $\psi(z)\not\equiv 0$, т.е. найдется точка $z_0\in(0,2)$, в которой $\psi(z_0)\neq 0$. Но

$$|\psi_{n_k}(z_0)| = \left|\int_0^{\varepsilon_{n_k}} \varphi_{n_k}\cdot T_1(z_0,\zeta)d\zeta\right| \leqslant \max_{\zeta\in[0,\zeta_{n_{k_0}}]} T_1(z_0,\zeta)\cdot\varepsilon_{n_k}$$

для всех k , начиная с некоторого k_0 , которое выбирается из условия $\varepsilon_{n_{k_0}} < z_0$. Отсюда следует, что $\psi(z_0)=0$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

ТЕОРЕМА 2. При условии $\max(C_A,C_B)<1$ к уравнению (I9) применима альтернатива Фредгольма.

Пользуясь формулой (43) и условием теоремы, выберем $\varepsilon>0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\|U_1^{\varepsilon}\|<1$, и положим

$$E + U \equiv (E + U_1^{\varepsilon}) + U_0^{\varepsilon} .$$

Здесь U_0^{ε} - вполне непрерывный оператор, а $(E+U_1^{\varepsilon})$ - в силу неравенства $\|U_1^{\varepsilon}\|<1$ - обратимый оператор.

Известно (Радон), что если данный в C оператор можно представить в виде суммы двух операторов, один из которых обратимый, а другой - вполне непрерывный, то по отношению к этому оператору справедлива альтернатива Фредгольма.

Теорема доказана.

Обратимся теперь к исследованию однородного уравнения, соответствующего уравнению (I9). Предварительно докажем некоторые оценки, характеризующие поведение потенциала простого слоя (II) и его производных в окрестности угловых точек A и B

ЛЕММА 4. В достаточно малых окрестностях точек A и B потенциал простого слоя (II) имеет соответственно оценки:

$$|\varphi(r,z)| < const\,\left|\ln\sqrt{r^2+z^2}\right| ,$$
$$|\varphi(r,z)| < const\,\left|\ln\sqrt{r^2+(z-2)^2}\right| . \qquad (44)$$

Докажем первую из этих оценок (вторая доказывается аналогично). Пусть, по-прежнему, ε_0 - число, обладающее свойством (39), и пусть $0<h<\varepsilon_0$. С учетом (I6) имеем

$$\varphi(r,z) = \frac{2}{\pi}\int_0^2 \nu(\zeta)\,\frac{K(k)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,d\zeta . \qquad (45)$$

Так как $\nu(\zeta)$ ограничена, а функция $\frac{K(k)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ непрерывна по совокупности переменных r, z, ζ , когда $r^2+z^2\leqslant h^2;\ \varepsilon_0\leqslant\zeta\leqslant 2$, то

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_{\varepsilon_0}^2 \nu(\zeta)\frac{K(k)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}d\zeta\right| < const \quad \text{при } r^2+z^2\leqslant h^2. \qquad (46)$$

Чтобы оценить остальную часть интеграла (45) в окрестности точки $(0,0)$, воспользуемся формулой (2I).

Будем иметь

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\varepsilon_0}\nu(\zeta)\frac{K(k)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}d\zeta=\frac{8}{\pi}\int_0^{\varepsilon_0}\nu(\zeta)\frac{r\cdot f(\zeta)}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)^3}}\cdot D(k)d\zeta+ \\ +\frac{2}{\pi}\int_0^{\varepsilon_0}\nu(\zeta)\frac{E(k)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cdot d\zeta\equiv J_1(r,z)+J_2(r,z)\ . \qquad (46)'$$

Принимая во внимание (39) и монотонность функции $D(k)$, получаем

$$|J_1(r,z)|\leqslant const\int_0^{\varepsilon_0}\frac{\zeta\cdot r}{(f'(0)\zeta+r)^3}D\Big(\frac{2\sqrt{f'(0)\zeta\cdot r}}{f'(0)\zeta+r}\Big)d\zeta\leqslant \qquad (47) \\ \leqslant const\int_0^{\infty}\frac{t}{(1+f'(0)\cdot t)^3}\cdot D\Big(\frac{2\sqrt{f'(0)\cdot t}}{f'(0)t+1}\Big)dt=const;$$

$$|J_2(r,z)|\leqslant const\int_0^{\varepsilon_0}\frac{d\zeta}{\sqrt{(r+f'(0)\zeta)^2+(z-\zeta)^2}}=const\int_0^{t_0}\frac{dt}{\sqrt{\rho^2-2\rho t\cos(\varphi+\alpha)+t^2}}, \qquad (48)$$

где $\rho=\sqrt{r^2+z^2}$, $\varphi=arctg\frac{z}{r}+\frac{\pi}{2}$, $\alpha=arctg f'(0)$, $t=\frac{\zeta}{\cos\alpha}$, $t_0=\frac{\varepsilon_0}{\cos\alpha}$.

В силу неравенств $\alpha\leqslant\varphi+\alpha\leqslant\pi+\alpha$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ имеем

$$\int_0^{t_0}\frac{dt}{\sqrt{\rho^2-2\rho t\cos(\varphi+\alpha)+t^2}}\leqslant\int_0^{t_0}\frac{dt}{\sqrt{\rho^2-2\rho t\cos\alpha+t^2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-\cos\alpha}}\int_0^{t_0}\frac{dt}{\sqrt{\rho^2+t^2}}\leqslant \qquad (49) \\ \leqslant const_1+const_2\,|\ln\rho|\ .$$

Собирая полученные оценки ((46), (47), (48), (49)) вместе, будем иметь (при достаточно малых ρ):

$$|\varphi(r,z)|\leqslant const\,|\ln\rho|\ .$$

Что и требовалось.

ЛЕММА 5. Пусть $r=r_0+\ell\cdot\cos\widehat{n_0 r}$, $z=z_0+\ell\cos\widehat{n_0 z}$, $\ell>0$; r_0,z_0 – координаты точки, лежащей на кривой L, а $\cos\widehat{n_0 r}$, $\cos\widehat{n_0 z}$ – направляющие косинусы внешней нормали к L в точке (r_0,z_0). Тогда $r\frac{\partial\varphi(z,z)}{\partial n_0}$, как функция переменных ℓ,z_0 ограничена в прямоугольниках $(0<\ell\leqslant\text{æ},\ 0\leqslant z_0\leqslant\text{æ})$, $(0<\ell\leqslant\text{æ},\ 2-\text{æ}\leqslant z_0\leqslant 2)$, где æ – некоторое положительное число.

Ограничимся случаем прямоугольника $(0<\ell\leqslant\text{æ},\ 0<z_0\leqslant\text{æ})$.

Имеем (см. (I2), (2I), (I6))

$$r\cdot\frac{\partial\varphi(r,z)}{\partial n_0}=-\frac{4}{\pi}\int_0^2\nu(\zeta)\frac{r\cdot f(\zeta)}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)^3}}\cdot D(k)\cdot\cos\widehat{n_0 r}\,d\zeta- \qquad (50) \\ -\frac{2}{\pi}\int_0^2\nu(\zeta)\frac{r}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,\frac{\gamma\cos\widehat{n_0 r}+\beta\cos\widehat{n_0 z}}{\gamma^2+\beta^2}E(k)d\zeta\ .$$

Как и при доказательстве леммы 4, разобьем каждый интеграл в (50) на два: от 0 до ε_0 и от ε_0 до 2. Каждый из интегралов по промежутку $[\varepsilon_0,2]$ ограничен в некоторой h – окрестности точки $(0,0)$ переменных r,z. Это доказывается так же, как и неравенство (46).

Первый из интегралов по промежутку $[0,\varepsilon_0]$ с точностью до ограниченного множителя $-2\cos\widehat{n_0 r}$ совпадает с интегралом J_1 в формуле (46)' и в силу (47) ограничен в любой окрестности точки $(0,0)$ переменных r,z.

Рассмотрим интеграл

$$J(\ell,z_0)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\varepsilon}\nu(\zeta)\frac{r}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,\frac{\gamma\cdot\cos\widehat{n_0 r}+\beta\cdot\cos\widehat{n_0 z}}{\gamma^2+\beta^2}E(k)d\zeta.$$

Пусть $0<z_0\leqslant\text{æ}<\varepsilon_0$. Из (I0) и (39) имеем

$$\gamma=f(z_0)-f(\zeta)+\ell\cos\widehat{n_0 r}\equiv\gamma_0+\ell\cos\widehat{n_0 r}\ ,$$

$$\beta=z_0-\zeta+\ell\cos n_0 z\qquad\equiv\beta_0+\ell\cos\widehat{n_0 z}\ ,$$

$$\gamma_0=f'(0)\beta_0\qquad ,$$

$$\cos\widehat{n_0 r}=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2(0)}}\qquad ,$$

$$\cos\widehat{n_0 z}=-\frac{f'(0)}{\sqrt{1+f'^2(0)}}\qquad ,$$

$$\frac{\gamma\cdot\cos\widehat{n_0 r}+\beta\cos\widehat{n_0 z}}{\gamma^2+\beta^2}=\frac{\ell}{(f'^2(0)+1)\beta_0^2+\ell^2}\ ,$$

Далее,

$$|J(\ell,z_0)|\leqslant const\int_0^{\varepsilon_0}\frac{\ell}{(f'^2(0)+1)\beta_0^2+\ell^2}d\zeta=const\cdot arctg\frac{\beta_0\sqrt{1+f'^2(0)}}{\ell}\Bigg|_{\varepsilon_0}^{0}\leqslant const$$

при любом $\ell\neq 0$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Частная производная $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$

потенциала простого слоя (II) при $z<0$, $z>2$ имеет соответственно оценки

$$\left|r\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right| \leqslant const\,\bigl|\ln|z|\bigr|,\quad \left|r\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right| \leqslant const\,\bigl|\ln|z-2|\bigr|.$$

Из (I2) имеем

$$r\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{2}{\pi}\int_0^2 \nu(\zeta)\frac{r}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cdot\frac{\beta}{\gamma^2+\beta^2}E(k)\,d\zeta .$$

Далее,

$$\left|r\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right| < const\left|\int_0^2\frac{d\zeta}{\beta}\right| = const\cdot\bigl|\ln|z-2|-\ln|z|\bigr|,$$

откуда и получаются нужные неравенства.

ТЕОРЕМА 3. Для бесконечной области Ω_e, находящейся вне S, справедлива формула Грина

$$\iiint_{\Omega_e}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]d\Omega = \iint_S \varphi\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_0}\right)_e dS, \tag{51}$$

где φ - потенциал простого слоя (II) с плотностью μ, удовлетворяющей условиям задачи П, а $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_0}\right)_e$ - предельное значение на S его нормальной производной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. От каждой точки кривой L по направлению внешней нормали отложим отрезки длины ℓ. При достаточно малых ℓ (в силу гладкости кривой L) геометрическое место концов этих отрезков образует кривую L^e, которая сама себя не пересекает и имеет непрерывно меняющуюся касательную. Каждой точке P_0 на L отвечает определенная точка P на L^ℓ, которая лежит на нормали к L в точке P_0, и это соответствие взаимно однозначно; при этом нормаль n_0 к L в точке P_0 является нормалью n_p к кривой L^ℓ в точке P.

Дополним построенную кривую перпендикулярами $A'A''$, $B'B''$, опущенными из ее концов на ось z (рис. 3). Поверхность, образованную вращением этой кривой около оси z, обозначим через $\widetilde{S}$. Она состоит из трех гладких кусков: поверхности S^ℓ, образованной вращением дуги L^e, и двух кругов, образованных вращением перпендикуляров $A'A''$, $B'B''$.

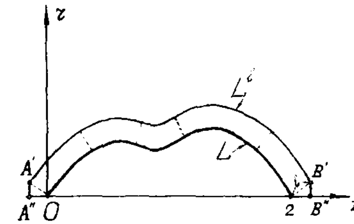

Рис.3

Для бесконечной области $\widetilde{\Omega}_e$, находящейся вне кусочно-гладкой поверхности $\widetilde{S}$, , формула (51) справедлива. Имеем

$$\iiint_{\widetilde{\Omega}_e}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]d\widetilde{\Omega} = \iint_{\widetilde{S}}\varphi(P)\frac{\partial\varphi(P)}{\partial n_p}d\widetilde{S} =$$
$$= \iint_{S^e}\varphi(P)\frac{\partial\varphi(P)}{\partial n_0}dS^e - 2\pi\int_{(A'A'')}\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}r\,ds + 2\pi\int_{(B'B'')}\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}r\cdot ds. \tag{52}$$

Оценим второй интеграл в правой части (52). Так как в точках перпендикуляра $A'A''$ $\frac{\ell f'(0)}{\sqrt{1+f'^2(0)}}\leqslant\sqrt{r^2+\ell^2}<\ell$, то по лемме 4 при достаточно малых ℓ будем иметь

$$\left|\varphi(r,z)\right| < const\,|\ln\ell|.$$
$$(r,z)\in A'A''$$

Из леммы 6 следует (при достаточно малых ℓ), что

$$\left|r\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right| \leqslant const\,|\ln\ell|.$$
$$-\ell<z<0$$

Поэтому, когда ℓ достаточно мало, можем написать

$$\left|\int_{(A'A'')}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z}r\cdot ds\right| \leqslant const\,|\ln\ell|^2 = const\cdot\ell\cdot(\ln\ell)^2,$$

откуда видно, что рассматриваемый интеграл стремится к нулю, когда $\ell\to 0$. Точно так же можно показать, что при $\ell\to 0$ интеграл по отрезку $B'B''$ тоже стремится к нулю.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\mathcal{J}(\ell) = \iint_{S^e}\varphi(P)\frac{\partial\varphi(P)}{\partial n_0}dS^e. \tag{53}$$

Имеем

$$\mathcal{J}(\ell)=2\pi\int\limits_{L^{\ell}}\varphi(r,z)\frac{\partial\varphi(r,z)}{\partial n_0}r\,ds=2\pi\int\limits_0^2\varphi(r,z)\frac{\partial\varphi(r,z)}{\partial n_0}r\cdot F(z_0\ell)\,dz_0, \qquad (54)$$

где

$$r=r_0+\ell\cos\widehat{n_0 r},$$
$$z=z_0+\ell\cos\widehat{n_0 z},$$
$$r_0=f(z_0),$$
$$F(z_0\ell)=\sqrt{r'^2_{z_0}+z'^2_{z_0}},$$

при этом $F(z_0,\ell)$ равномерно относительно z_0 стремится к пределу $\sqrt{1+f'^2(z_0)}$, когда $\ell\to 0$.

Из свойств 2^0, 5^0 § I следует, что при $\ell\to 0$ функция $\varphi(r,z)\frac{\partial\varphi(r,z)}{\partial n_0}\cdot r$ стремится к своей предельной функции $\varphi(r_0,z)\left(\frac{\partial\varphi(r_0,z_0)}{\partial n_0}\right)_\ell r$ равномерно относительно z_0 в любом промежутке $0<\delta\leqslant z_0\leqslant 2-\delta$. А так как для z_0, достаточно близких к точкам $z_0=0$, $z_0=2$ и малых ℓ справедливы оценки

$$\left|r\frac{\partial\varphi(r,z)}{\partial n}\right|\leqslant const \qquad \text{(лемма 5)},$$

$$\begin{cases}|\varphi(r,z)|\leqslant const\cdot|\ln z_0|, & \text{когда } z_0 \text{ близко к 0} \\ & \text{(лемма 4)}, \\ |\varphi(r,z)|\leqslant const\cdot|\ln(2-z_0)|, & \text{когда } z_0 \text{ близко к 2}\end{cases}$$

$$|F(r_0,\ell)|<const,$$

не зависящие от ℓ, то последний в формуле (54) интеграл сходится равномерно относительно достаточно малых ℓ и, следовательно, при $\ell\to 0$ возможен предельный переход под знаком этого интеграла. Устремляя в (52) ℓ к нулю и пользуясь свойствами рассмотренных интегралов, получаем в пределе формулу (51).

ТЕОРЕМА 4. **Однородное уравнение, соответствующее уравнению (I9), имеет в $C[0,2]$ только нулевое решение.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\nu(z)\in C[0,2]$ и является решением однородного уравнения

$$\nu(z)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^2\nu(\zeta)T(z,\zeta)\,d\zeta=0. \qquad (55)$$

Рассмотрим потенциал простого слоя φ с плотностью

$\mu(z)=\frac{\nu(z)}{f(z)\sqrt{1+f'^2(z)}}$. Из способа составления уравнения (I9), в силу (55), непосредственно следует, что предельные значения нормальной производной $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_0}\right)_e$ на S равны нулю. Из формулы Грина (5I) и регулярности потенциала простого слоя на бесконечности, как обычно, делаем вывод, что $\varphi\equiv 0$ в Ω_e. По непрерывности (I^0 § I) $\varphi=0$ и на $S-(A+B)$.

Отметим, ссылаясь на [I0], что класс функций, непрерывных везде в замкнутой области $\bar{\Omega}_i$ (Ω_i – внутренняя область, ограниченная поверхностью S), кроме "угловых" точек A и B, в которых она имеет особенности вида (44), является классом единственности задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Поэтому наш потенциал равен нулю и в Ω_i. Тогда из формул (5) имеем

$$0=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_0}\right)_i-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_0}\right)_e=\mu(z).$$

Значит, и $\nu(z)=0$.

Что и требовалось доказать.

Сформулируем основные результаты этого параграфа.

I. Если $max(C_A,C_B)<1$, то уравнение (I3) в пространстве равномерно непрерывных в $(0,2)$ функций имеет единственное решение при любой правой части $\Phi(z)$ из того же пространства. Условие $max(C_A,C_B)<1$ накладывает ограничения на углы кривой L с осью z (они не должны быть очень малы). Отметим, что можно построить пространство функций, в котором оператор U будет вполне непрерывным. Тогда ограничение на углы кривой L с осью z снимается.

2. Если $\nu(z)$ – решение уравнения (I4), то, используя формулы (28), получаем

$$\lim_{z\to 0}\nu(z)=\frac{1}{1+C_A}\lim_{z\to 0}\Phi(z),$$
$$\lim_{z\to 2}\nu(z)=\frac{1}{1+C_B}\cdot\lim_{z\to 2}\Phi(z). \qquad (56)$$

§ 4. Расчёт потенциального обтекания тела вращения

Рассмотрим задачу о расчёте скоростей и давлений на поверхности произвольного тела вращения, обтекаемого набегающим параллельно его оси потоком идеальной несжимаемой жидкости. Математически аналогичные задачи возникают при расчете осесимметричных магнитостатических полей.

Известно, что эта задача сводится к нахождению функции тока ψ из уравнения

$$\Delta\psi=0$$

и условий

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_S=0\ ,\ \frac{\partial\psi}{\partial z}\Big|_\infty=V_\infty ,$$

где n – направление внешней нормали к поверхности S, ограничивающей тело вращения;

z – ось симметрии;

V_∞ – скорость набегающего потока на бесконечности, которую в дальнейшем будем считать равной единице.

После того как найдена функция ψ, скорость v на поверхности тела вычисляется по формуле

$$v=\frac{\partial\psi}{\partial \ell}\Big|_S\ ,$$

где ℓ – направление касательной к контуру L меридионального сечения поверхности S. Если ввести новую функцию φ по формуле

$$\varphi=\psi-z\ ,$$

то для неё получим внешнюю задачу Неймана

$$\Delta\varphi=0\ ,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_S=\frac{\partial z}{\partial n}\Big|_S$$

с нулевым условием на бесконечности.

Далее, используемая нами полиномиальная аппроксимация кривой L, ординаты которой задаются таблично, как правило, приводит (особенно в интересующем нас случае сильно вытянутых вдоль оси симметрии тел) к тому, что аппроксимирующая кривая составляет с осью z углы, отличные от $\frac{\pi}{2}$.

Принимая во внимание вышесказанное, мы приходим к разобранной нами в предыдущих параграфах задаче I, в которой функцию $F(z)$ мы должны считать равной

$$F(z)=\frac{\partial z}{\partial n}\Big|_S=\frac{f'(z)}{\sqrt{1+f'^2(z)}}\ .$$

Интегральное уравнение задачи запишется в виде

$$f'(z)\cdot f(z)=\nu(z)+\frac{1}{\pi}\int_0^2\nu(\zeta)T(z,\zeta)d\zeta\ . \qquad (57)$$

При этом, в силу формул (56), имеем

$$\nu(+0)=\nu(2-0)=0\ .$$

Для численного решения этого уравнения используется следующий метод.

Промежуток интегрирования $[0,2]$ разобьём с шагом H на n равных частей точками $\zeta_i=iH\ (i=0,1,\dots,n)$ и обозначим через ν_i значение функции $\nu(z)$ в точке $z_i=\zeta_{i-1}+\frac{H}{2}\ (i=1,\dots,n)$ являющейся серединой промежутка $[\zeta_{i-1},\zeta_i]$. Заменим на каждом промежутке $[\zeta_{i-1},\zeta_i]$ функцию $\nu(z)$ параболой, проходящей через точки $(\zeta_{i-1},B_{i-1}),(z_i,\nu_i),(\zeta_i\ B_i)$, где $B_0=B_n=0$, а $B_i\ (i\neq 0,n)$ равняется полусумме проинтерполированных в точку ζ_i по $\nu_{i-1},\nu_i,\nu_{i+1}$ и по $\nu_i,\nu_{i+1},\nu_{i+2}$ значений $\nu(z)$, причем под $\nu_0\ (\nu_{n+1})$ мы понимаем $\nu(+0)=0\ (\nu(2-0)=0)$.

Положим

$$\int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i}\left(\frac{\zeta-z_i}{H}\right)^s T(z,\zeta)d\zeta=Q_i^{(s)}(z)\ ,\ s=0,1,2\ . \qquad (58)$$

Тогда, заменив в уравнении (57) неизвестную функцию $\nu(z)$ на её приближённое представление $\widetilde{\nu}(z)$ по описанному выше способу, будем иметь

$$\pi f'(z)\cdot f(z)=\pi\widetilde{\nu}(z)+\sum_{i=1}^{n}\nu_i\left[Q_i^{(0)}(z)+\sum_{j=i-2}^{i+2}\sigma_j^i Q_j^{(1)}(z)+\sum_{j=i-2}^{i+2}\varkappa_j^i Q_j^{(2)}(z)\right], \qquad (59)$$

где значения величин σ_j^i, $\varkappa_j^i$ берутся из таблицы I.

Полагая в уравнении (59) последовательно $z=z_1,z_2,\dots,z_n$ $\left(z_k=\frac{2k+1}{2}H\right)$, получаем для определения неизвестных $\nu_i\ (i=1,2,\dots,n)$ следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$\pi f(z_k)\cdot f(z_k)=\sum_{i=1}^{n}\nu_i\left(\pi\delta_{ik}+Q_{ik}^{(0)}+\sum_{j=i-2}^{i+2}\left(\sigma_j^i Q_{jk}^{(1)}+\varkappa_j^i Q_{jk}^{(2)}\right)\right), \qquad (60)$$

где

$$\delta_{ik}=\begin{cases}1 & i=k\\ 0 & i\neq k\end{cases}\ ;\ Q_{jk}^{(s)}=Q_j^{(s)}(z_k)\ ,\ s=0,1,2\ .$$

Т а б л и ц а I

$i \backslash j$	σ_j^i: $i-2$	$i-1$	i	$i+1$	$i+2$	$\varkappa_j^i$: $i-2$	$i-1$	i	$i+1$	$i+2$
I	0	0	II/I6	-I2/I6	I/I6	0	0	-2I/8	I0/8	-I/8
2	0	I3/24	I/48	-5/8	I/I6	0	I3/I2	-43/24	I	-I/8
$i \neq 1, 2, n-1, n$	-I/I6	5/8	0	-5/8	I/I6	-I/8	I	-7/4	I	-I/8
$n-1$	-I/I6	5/8	-I/48	-I3/24	0	-I/8		-43/24	I3/I2	0
n	-I/I6	I2/I6	-II/I6	0	0	-I/8	I0/8	-2I/8	0	0

Если положить в (60) $\sigma_j^i = \varkappa_j^i = 0$, то мы получим известную схему Боголюбова-Крылова (см. [I7]), которая состоит в том, что на каждом из промежутков $[\zeta_{i-1}, \zeta_i]$ $(i=1,\ldots,n)$ функция ν считается постоянной и равной своему значению ν_i в средней точке этого промежутка. Однако применение указанной схемы является, на наш взгляд, недостаточным. Дело в том, что скорость на поверхности тела (нахождение которой является конечной целью расчётов), будучи касательной производной от потенциала простого слоя, представляет собой интеграл в смысле главного значения по Коши. Поэтому повышение требований к точности окончательного результата заставляет нас увеличивать степень близости не только самого приближённого решения уравнения (57) к точному, но и степень близости его производной.

На наш взгляд, предлагаемый в работе метод аппроксимации в большей степени удовлетворяет последнему требованию, чем схема Боголюбова-Крылова. Само собой разумеется, что высказанные соображения имеют силу лишь в том случае, когда решение уравнения (57) имеет достаточное число производных. Можно доказать (здесь мы этим заниматься не будем), что, увеличивая гладкость функции $f(z)$, можно добиться существования у решения $\nu(z)$ уравнения (57) любого числа производных в открытом промежутке (0,2).

Подробности, касающиеся вычисления величин $Q_{ik}^{(s)}$, ядра $T(z,\zeta)$ и скоростей на поверхности тела, содержатся в работе [II]. Там же имеется и программа для ЭВМ.

Приведем некоторые результаты вычислений.

На рис. 4, 5, 6 изображены графики невязок в решении интегрального уравнения (57) соответственно при n =5, n = I0, n=20 для $f(z)=\frac{z(2-z)}{5}$. На рис. 7 изображены сплошными линиями кривые распределения скоростей и давлений (полученные при n =40) для изображённой на этом же рисунке кривой $f(z)$;кружками обозначены точки, полученные в результате продувки соответствующей модели в аэродинамической трубе; перечёркнутыми кружками ($\varnothing$) обозначены точки, полученные на пространственной установке ЭГДА. Сопоставление расчетных и экспериментальных данных показывает их удовлетворительное совпадение.

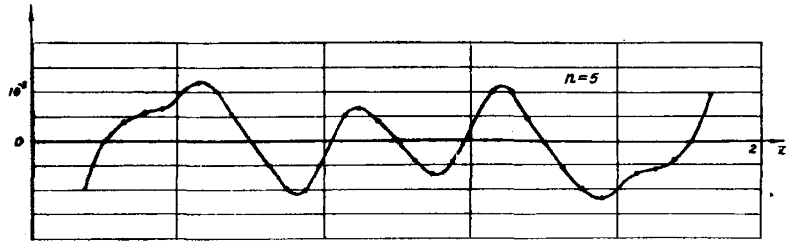

Рис. 4

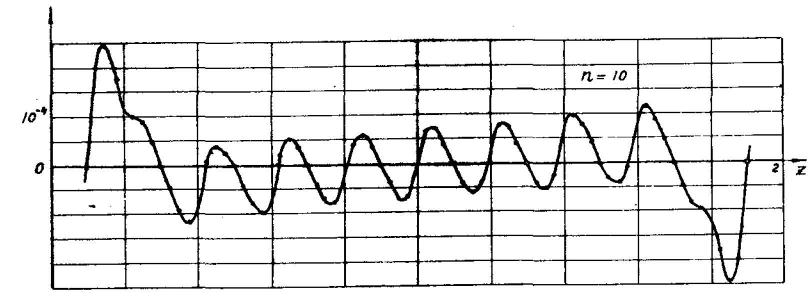

Рис.5

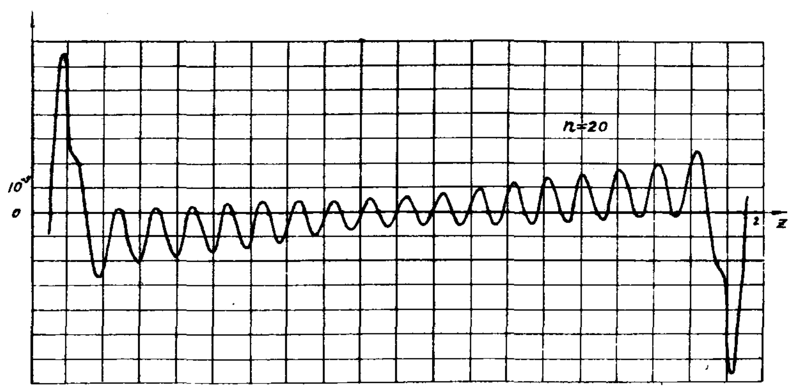

Рис.6

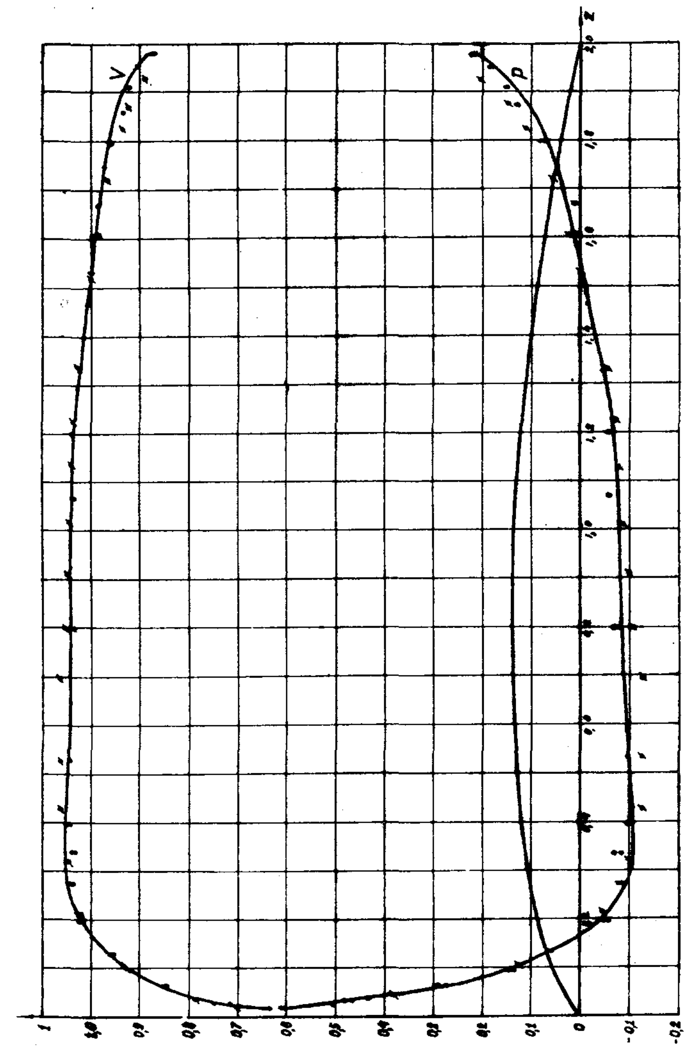

Рис.7