

ЗАДАЧА ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН  
В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

В.А. Цецохо

§ I. Постановка задачи. Теорема единственности

Пусть  $r, z, \theta$  - цилиндрические координаты и ось  $z$  является общей осью вращения для двух замкнутых непересекающихся поверхностей:  $S_1$  и охватывающей её поверхности  $S_2$ . На рис. I изображены меридиональные сечения  $L_1$  и  $L_2$  этих поверхностей.

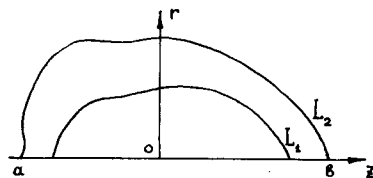


Рис. I

Обозначим через  $\Omega_1$  область, ограниченную поверхностью  $S_1$ , через  $\Omega_2$  - область, заключённую между поверхностями  $S_2$  и  $S_1$ , и через  $\Omega_3$  - бесконечную область, находящуюся вне  $S_2$ .

Области  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  заполнены однородными изотропными средами, электромагнитные постоянные которых пусть будут  $\epsilon_s, \mu_s$ ,  $\sigma_s, s = 1, 2, 3$ . Далее, зависимость комплексных векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  (соответственно, электрического и магнитного) от времени будем считать периодической типа  $e^{i\omega t}$ .

В этих предположениях однородные уравнения Максвелла в каждой из областей  $\Omega_s$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E}_s &= i\mu_s \omega \vec{H}_s, \\ \text{rot } \vec{H}_s &= (\epsilon_s - i\omega\sigma_s) \vec{E}_s, \end{aligned} \quad (I,1)$$

а на поверхностях  $S_j$  ( $j=1,2$ ) для предельных значений касательных составляющих  $E_{st}, H_{st}$  и нормальных составляющих  $E_{sn}, H_{sn}$  векторов  $\vec{E}_s, \vec{H}_s$  выполняются условия:

$$E_{jt} - E_{(j+1)t} = 0, \quad H_{jt} - H_{(j+1)t} = 0, \quad j=1,2; \quad (I,2)$$

$$\nu_j E_{jn} - \nu_{j+1} E_{(j+1)n} = 0, \quad \mu_j H_{jn} - \mu_{j+1} H_{(j+1)n}, \quad j=1,2. \quad (I,3)$$

Здесь

$$\nu_s = \sigma_s - i\omega\epsilon_s, \quad s=1,2,3.$$

Пусть в области  $\Omega_2$  (проводимость  $\sigma_2$  среды в  $\Omega_2$  считаем равной нулю) расположен замкнутый линейный проводник, по которому распространяется ток

$$\vec{I}(a, z, \theta) = e^{-i\omega t} \vec{I}_3(a, z, \theta) \quad (a = \text{const}, z_0 = \text{const}, 0 \leq \theta < 2\pi), \quad (I,4)$$

$I = \text{const}$ ; через  $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$  мы обозначаем орты, перпендикулярные в точке  $(z, r, \theta)$  соответственно поверхностям  $r=r_0, z=z_0, \theta=\theta_0$  и образующие левую систему. Рассмотрим задачу (назовём её задачей I) об излучении этим током электромагнитных волн в область  $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3$ .

Обозначим через  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  векторы поля, возбуждённого кольцевым током (I,4), в предположении, что всё пространство заполнено однородной средой с электромагнитными постоянными  $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2 = 0$ . При этом в области  $\Omega_2$  полное поле  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$  будем искать в виде

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_2 + \vec{E}_0, \quad \vec{H}_2 = \vec{H}_2 + \vec{H}_0. \quad (I,5)$$

Тогда решение поставленной задачи сведётся к определению векторов  $\vec{E}_s, \vec{H}_s$  ( $s=1,2,3$ ) из системы (I,1) при выполнении на поверхностях  $S_j$  ( $j=1,2$ ) неоднородных граничных условий

$$E_{jt} - E_{(j+1)t} = (-1)^{j+1} E_{0t}, \quad H_{jt} - H_{(j+1)t} = (-1)^{j+1} H_{0t}, \quad j=1,2; \quad (I,2')$$

$$\nu_j E_{jn} - \nu_{j+1} E_{(j+1)n} = (-1)^{j+1} \nu_2 E_{0n}, \quad \mu_j H_{jn} - \mu_{j+1} H_{(j+1)n} = (-1)^{j+1} \mu_2 H_{0n}, \quad j=1,2. \quad (I,3')$$

Исключим из уравнений системы (I,I) функции  $\vec{H}_s$ , тогда для  $\vec{E}_s$  получим уравнения

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E}_s + \kappa_s^2 \vec{E}_s &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{E}_s &= 0, \end{aligned} \quad s=1,2,3, \quad (I,6)$$

где

$$\kappa_s^2 = \omega^2 \mu_s \epsilon_s + i\omega \mu_s \sigma_s. \quad (I,7)$$

В соответствии с видом источника (I,4) естественно искать функции  $\vec{E}_s$  в виде

$$\vec{E}_s = V_s(r,z)\vec{e}_s, \quad V_s(a,z) = 0, \quad s=1,2,3. \quad (I,8)$$

(Здесь и в дальнейшем множитель  $e^{-i\omega t}$  опускается). Подставляя (I,8) в (I,6), нетрудно убедиться, что условие  $\operatorname{div} \vec{E}_s = 0$  выполняется автоматически, а функции

$$U_s(r,z,\theta) = V_s(r,z)e^{i\theta}, \quad s=1,2,3, \quad (I,9)$$

должны удовлетворять уравнениям

$$\Delta U_s + \kappa_s^2 U_s = 0; \quad (I,10)$$

при этом граничные условия на поверхностях  $S_j$  ( $j=1,2$ ) имеют вид:

$$U_j - U_{j+1} = (-1)^{j+1} U_0, \quad j=1,2; \quad (I,11)$$

$$\mu_{j+1} \frac{\partial(rU_j)}{\partial n_j} - \mu_j \frac{\partial(rU_{j+1})}{\partial n_j} = (-1)^{j+1} \mu_j \frac{\partial(rU_0)}{\partial n_j}, \quad j=1,2. \quad (I,12)$$

Здесь  $n_j$  - направление внешней нормали к поверхности  $S_j$ ,

$$U_0(r,z,\theta) = V_0(r,z)e^{i\theta}.$$

Как обычно, решение  $U_1, U_2, U_3$  уравнений (I,10) будем называть регулярным, если в замкнутых областях  $\bar{\Omega}_s$   $U_s \in C^{(1)}$ , а в  $\Omega_s$   $U_s \in C^{(2)}$ , причём в бесконечной области  $\Omega_s$  функция  $U_s$  удовлетворяет условиям излучения

$$U_s = e^{\pm i\kappa_s R} O\left(\frac{1}{R}\right), \quad \operatorname{Im} \kappa_s \geq 0,$$

$$R \left( \frac{\partial U_s}{\partial R} \mp i\kappa_s U_s \right) = e^{\pm i\kappa_s R} O(1), \quad \operatorname{Im} \kappa_s \geq 0, \quad (I,13)$$

которые должны выполняться при любом выборе начала радиус-вектора  $\vec{R}$  точки  $(r,z,\theta)$  и равномерно относительно его направления.

**Задача А.** Найти регулярное решение  $U_1, U_2, U_3$  ви-

да (I,9) уравнений (I,10), удовлетворяющее граничным условиям (I,11), (I,12).

Докажем теорему:

**ТЕОРЕМА I.** В случаях а)  $\kappa_s \neq 0$ ,  $\operatorname{Im} \kappa_1 \neq 0$ ,

в)  $\kappa_s \neq 0$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$

задача А имеет единственное решение.

Пусть  $U_1, U_2, U_3$  - регулярное решение вида (I,9) уравнений (I,10) с однородными граничными условиями (I,11), (I,12). Тогда нормальная составляющая вектора  $\vec{D}$ , определяемого формулами

$$\vec{D} = \left[ \vec{E}_s \times \frac{\operatorname{rot} \vec{E}_s}{\mu_s} \right] \text{ в } \Omega_s, \quad s=1,2,3, \quad (I,14)$$

будет непрерывна при переходе через поверхности  $S_1, S_2$  (см. [I2] стр. 66). Пусть  $\Omega_R$  - шар радиуса  $R$  с центром в начале, содержащий поверхности  $S_1, S_2$ , а  $\Sigma_R$  - граница этого шара. Применим к функции  $\operatorname{div} \vec{D}$  в области  $\Omega_R$  формулу Остроградского

$$\iiint_{\Omega_R} \operatorname{div} \vec{D} d\Omega = \iint_{\Sigma_R} D_n ds. \quad (I,15)$$

Из (I,14) и (I,8) имеем:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \left\{ \frac{1}{\mu_s} \left[ |\operatorname{rot} V_s \vec{e}_s|^2 + \kappa_s^2 |V_s|^2 \right] \right\} \delta \Omega_s, \quad s=1,2,3, \quad (I,16)$$

$$D_n = V_s \frac{1}{r} \frac{\partial(r\vec{V}_s)}{\partial R} = V_s \frac{\partial \vec{V}_s}{\partial R} + \frac{1}{R} |V_s|^2. \quad (I,17)$$

Используя условия излучения, можем написать

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_R} D_n ds &= \iint_{\Sigma_R} \frac{1}{R} |V_s|^2 ds + \iint_{\Sigma_R} V_s \frac{e^{-i\kappa_s R}}{R} \overline{O(\alpha)} ds - i\kappa_s \iint_{\Sigma_R} |V_s|^2 ds \equiv \\ &\equiv O(\alpha) - i\kappa_s \iint_{\Sigma_R} |V_s|^2 ds. \end{aligned} \quad (I,18)$$

Отделяя в равенстве (I,15) мнимую и вещественную части, с учетом формул (I,16), (I,18) и того, что  $|V| = |U|$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Im} \kappa_1^2}{\mu_1} \iint_{\Omega_1} |V_1|^2 d\Omega + \frac{\operatorname{Im} \kappa_2^2}{\mu_2} \iint_{\Omega_2} |V_2|^2 d\Omega + \frac{\operatorname{Im} \kappa_3^2}{\mu_3} \iint_{\Omega_3 \cap \Omega_R} |V_3|^2 d\Omega + \\ + \operatorname{Re} \kappa_3 \iint_{\Sigma_R} |V_3|^2 ds \rightarrow 0, \quad \text{при } R \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (I,19)$$

или (так как  $\text{Im } \kappa_s^2, \text{Re } \kappa_s^2, \text{Im } \kappa_s, \text{Re } \kappa_s > 0; |V_s| = |U_s|$ )

$$\text{Im } \kappa_s^2 \iiint_{\Omega_s} |U_s|^2 d\Omega = 0, \quad s = 1, 2, 3. \quad (I,20)$$

$$\text{Re } \kappa_s \iint_{\Sigma_R} |U_s|^2 ds \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad (I,21)$$

С л у ч а й а). В силу условия  $\text{Im } \kappa_1 \neq 0$  из (I,20) получаем  $U_1 = 0$ . Если  $\text{Im } \kappa_3 \neq 0$ , то из той же формулы следует, что  $U_3 = 0$ . Если же  $\text{Im } \kappa_3 = 0$ , то  $\text{Re } \kappa_3 \neq 0$  и мы имеем

$$\iint_{\Sigma_R} |U_3|^2 ds \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Как известно (см. [I2] стр. 37), регулярное вне некоторой замкнутой поверхности решение уравнения  $\Delta U + \kappa^2 U = 0$ , удовлетворяющее условию  $\iint_{\Sigma_R} |U|^2 ds \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ , есть тождественный нуль. Что же касается функции  $U_2$ , то она является в области  $\Omega_2$  регулярным решением уравнения  $\Delta U_2 + \kappa_2^2 U_2 = 0$  с граничными условиями

$$U_2 \Big|_{S_j} = \frac{\partial U_2}{\partial n_j} \Big|_{S_j} = 0, \quad j = 1, 2,$$

и, в силу формулы Грина (см. [I] стр. 693)

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \frac{e^{i\kappa R}}{R} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial e^{i\kappa R}}{\partial n} \right] dS,$$

выражающей регулярное решение уравнения Гельмгольца через значение этого решения и его нормальной производной на границе,  $U_2$  тождественно равна нулю.

С л у ч а й в). Как и в случае а),  $U_3 = 0$ . Введём функцию  $W(r, z)$  по формуле:

$$W(r, z) = \begin{cases} rV_1, & \text{если } (r, z, \theta) \in \Omega_1 \\ rV_2, & \text{если } (r, z, \theta) \in \Omega_2 \end{cases}$$

Для неё в области  $\omega_2$ , ограниченной кривой  $L_2$  и отрезком [a, b] оси  $z$  (см. рис. I), имеем задачу (см. [I3]):

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} = 0, \quad (I,22)$$

$$W \Big|_{L_2} = 0, \quad W \Big|_{[a,b]} = 0,$$

$$W \Big|_{L_1} = W \Big|_{L_1}, \quad \mu_1 \frac{\partial W}{\partial n_1} \Big|_{L_1} = \mu_2 \frac{\partial W}{\partial n_1} \Big|_{L_1}.$$

Здесь  $n_1$  - направление нормали к кривой  $L_1$ , имеющее неот-

рицательную составляющую по оси  $z$ . Знаком "+" обозначены предельные значения рассматриваемых величин на кривой  $L_1$  с той её стороны, куда направлена нормаль, знаком "-" - с противоположной.

Предположим, что  $W \neq 0$  в  $\omega_2$ . Тогда в некоторой внутренней точке  $P$  области  $\omega_2$  функция  $|W|$  достигает своего максимального значения. Пусть, для определённости, это будет положительный максимум функции  $W$ . В силу принципа максимума для уравнения (I,22)  $P \in L_1$ .

Построим два круга  $\omega_+$  и  $\omega_-$ , принадлежащих области  $\omega_2$  и касающихся в точке  $P$  кривой  $L_1$  с разных сторон. Считая  $L_1$  достаточно гладко кривой, мы можем добиться того, чтобы эти круги не имели с  $L_1$  общих точек, кроме  $P$ . Для построенных таким способом кругов и решения  $W$  уравнения (I,22), выполняются условия теоремы Лиро (см. [28] стр. 14), на основании которой

$$\begin{aligned} W(P_+) - W(P) &< -\Delta_+ \cdot \overline{P_+ P}, \\ W(P) - W(P_-) &> \Delta_- \cdot \overline{P P_-}. \end{aligned} \quad (I,23)$$

Здесь,  $P_+, P_-$  - любые точки, принадлежащие соответственно  $\omega_+$  и  $\omega_-$ , лежащие на нормали к кривой  $L_1$  в точке  $P$ ;  $\Delta_+, \Delta_-$  - некоторые положительные константы; а  $\overline{P_+ P}$  ( $\overline{P P_-}$ ) - расстояние между точками  $P_+$  и  $P$  ( $P$  и  $P_-$ ).

В силу граничного условия нормальные производные функции  $W$  в точке  $P$  имеют одинаковые знаки по обе стороны кривой  $L_1$ , что противоречит неравенствам (I,23). Следовательно, функция  $W$ , а вместе с ней и функции  $U_1$  и  $U_2$ , тождественно равны нулю.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Последним изложенным здесь приёмом теорема может быть доказана и для случая  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0$ .

## § 2. Интегральные уравнения задачи

Будем считать, что  $S_j$  ( $j = 1, 2$ ) - достаточно гладкие поверхности Лапунова, заданные в цилиндрических координатах  $r, z, \theta$  уравнениями:

$$\begin{aligned} r &= \varphi_j(s_j), \\ z &= \psi_j(s_j), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2,1)$$

$$-\ell_j \leq s_j \leq \ell_j,$$

где  $s_j$  - длина дуги кривой  $L_j$ . (Напомним, что кривая  $L_j$  есть меридиональное сечение поверхности  $S_j$ ).

Через  $P_j$  обозначим точку на поверхности  $S_j$  с координатами  $r_j = \varphi_j(s_j)$ ,  $z_j = \psi_j(s_j)$ ,  $\theta_j$ , а через  $N_j$  - точку с координатами  $r_j = \varphi_j(t_j)$ ,  $z_j = \psi_j(t_j)$ ,  $\tau_j$ . Эти же обозначения ( $P_j, N_j$ ) оставим для соответствующих им точек меридиональных сечений  $L_j$ .

Пусть  $p_j(N_j)$ ,  $q_j(N_j)$  - функции, определённые на кривых  $L_j$  ( $j = 1, 2$ ), принадлежат на них классу  $H(o, c)$  и обращаются в нуль на концах этих кривых. Тогда функции  $p_j(N_j)e^{i\tau_j}$ ,  $q_j(N_j)e^{i\tau_j}$  принадлежат классу  $H(o, c)$  на  $S_j$ . Положим

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad U_1(r, z, \theta) &= \iint_{S_1} p_1(N_1) e^{i\tau_1} \frac{e^{ik_1 R_1}}{R_1} dS_1, \quad (r, z, \theta) \in \Omega_1, \\ \text{б)} \quad U_2(r, z, \theta) &= \iint_{S_1} p_1(N_1) e^{i\tau_1} \frac{e^{ik_2 R_1}}{R_1} dS_1 + \iint_{S_2} q_2(N_2) e^{i\tau_2} \frac{e^{ik_2 R_2}}{R_2} dS_2, \quad (r, z, \theta) \in \Omega_2, \quad (2,2) \\ \text{в)} \quad U_3(r, z, \theta) &= \iint_{S_2} p_2(N_2) e^{i\tau_2} \frac{e^{ik_3 R_2}}{R_2} dS_2, \quad (r, z, \theta) \in \Omega_3, \end{aligned}$$

где

$$|m k_s \geq 0, \quad s = 1, 2, 3; \quad (2,3)$$

$R_j = \sqrt{\rho_j^2 + r^2 - 2\rho_j r \cos(\zeta_j - \theta)} + (\zeta_j - z)^2$  - расстояние от точки  $N_j$  поверхности  $S_j$  ( $j = 1, 2$ ) до произвольной точки  $(r, z, \theta)$ . Непосредственно видно, что функции  $U_s$  ( $s = 1, 2, 3$ ), определённые формулами (2,2), дают решение вида (I,9) уравнений (I,10), причём  $U_s \in C^\infty$  в  $\Omega_s$  ( $s = 1, 2, 3$ ). Из свойств потенциала простого слоя с плотностью, принадлежащей классу  $H(o, c)$ , следует, что функции  $U_1, U_2, U_3$  имеют непрерывные вплоть до границ своих областей определения частные производные первого порядка. И, наконец, в силу (2,3) функция  $U_3$  удовлетворяет на бесконечности условиям излучения. Таким образом, формулы (2,2) дают регулярное решение вида (I,9) уравнений (I,10).

Введём обозначения

$$\begin{aligned} p_j(N_j) \rho_j &\equiv p_j(t_j) \cdot \varphi_j(t_j) = \nu_j(t_j), \\ q_j(N_j) \rho_j &\equiv q_j(t_j) \cdot \varphi_j(t_j) = \lambda_j(t_j). \end{aligned} \quad (2,4)$$

Из (2,2) имеем

$$\begin{aligned} V_1(r, z) &= U_1 e^{-i\theta} = \int_{-e_1}^{e_1} \nu_1(t_1) T_1(r, z, t_1) dt_1, \\ V_2(r, z) &= U_2 e^{-i\theta} = \int_{-e_1}^{e_1} \lambda_1(t_1) T_2(r, z, t_1) dt_1 + \int_{-e_2}^{e_2} \lambda_2(t_2) T_2(r, z, t_2) dt_2, \end{aligned} \quad (2,5)$$

$$V_3(r, z) = U_3 e^{-i\theta} = \int_{-e_2}^{e_2} \nu_2(t_2) T_3(r, z, t_2) dt_2,$$

где

$$T_s(r, z, t_j) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos X \cdot e^{ik_j R_j}}{R_j} dX, \quad s = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2;$$

$$R_j = \sqrt{\rho_j^2 + r^2 - 2\rho_j r \cos X + (z - \zeta_j)^2}, \quad j = 1, 2.$$

Подставляя (2,5) в граничные условия (I,II), (I,II2), получим для неизвестных функций  $\nu_j(t_j)$ ,  $\lambda_j(t_j)$ , ( $j = 1, 2$ ) следующую систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \mu_2(2\pi\nu_1 + \int_{-e_1}^{e_1} \nu_1 Q_1(s_1, t_1) dt_1) + \mu_1(2\pi\lambda_1 - \int_{-e_1}^{e_1} \lambda_1 Q_2(s_1, t_1) dt_1) - \mu_1 \int_{-e_2}^{e_2} \lambda_2 Q_2(s_1, t_2) dt_2 &= \mu_1 W_0(s_1), \\ \int_{-e_1}^{e_1} \nu_1 T_1(s_1, t_1) dt_1 - \int_{-e_1}^{e_1} \lambda_1 T_2(s_1, t_1) dt_1 - \int_{-e_2}^{e_2} \lambda_2 T_2(s_1, t_2) dt_2 &= V_0(s_1), \quad (2,8) \\ - \int_{-e_1}^{e_1} \lambda_1 T_1(s_2, t_1) dt_1 - \int_{-e_2}^{e_2} \lambda_2 T_2(s_2, t_2) dt_2 + \int_{-e_2}^{e_2} \nu_2 T_3(s_2, t_2) dt_2 &= V_0(s_2), \\ - \mu_3 \int_{-e_1}^{e_1} \lambda_1 Q_2(s_2, t_1) dt_1 - \mu_3(2\pi\lambda_2 + \int_{-e_2}^{e_2} \lambda_2 Q_2(s_2, t_2) dt_2) + \mu_2(2\pi\nu_2 + \int_{-e_2}^{e_2} \nu_2 Q_3(s_2, t_2) dt_2) &= \mu_3 W_0(s_2). \end{aligned}$$

Здесь

$$T_s(s_m, t_j) = T_s(r, z, t_j) \Big|_{(r, z) \in L_m}, \quad (2,9)$$

$$Q_s(s_m, t_j) = \left[ \frac{\partial r}{\partial n_m} T_s(r, z, t_j), r \frac{\partial T_s(r, z, t_j)}{\partial n_m} \right] \Big|_{(r, z) \in L_m}, \quad (2,10)$$

$$V_0(s_j) = V_0(r, z) \Big|_{(r, z) \in L_j}, \quad W_0(s_j) = \frac{\partial (r V_0(r, z))}{\partial n_j} \Big|_{(r, z) \in L_j}; \quad (2,11)$$

$n_m(r_j)$  - направление нормали к кривой  $L_m(L_j)$  в точке  $(r_m, z_m)$   $((r_j, z_j))$ .

**ТЕОРЕМА П.** Если  $-k_3^2$  не является собственным значением задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в области, ограниченной поверхностью  $S_2$ , а  $-k_2^2$  - в области, ограниченной поверхностью  $S_1$ , то решение системы (2,8) в классе функций  $v_j, \lambda_j$  ( $j=1,2$ ), обладающих тем свойством, что функции  $v_j/\varphi_j, \lambda_j/\varphi_j \in H(\infty, c)$  на кривых  $L_j$  ( $j=1,2$ ) и обращаются в нуль на их концах, единственно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть функции  $v_j, \lambda_j$  ( $j=1,2$ ) из указанного класса являются решением однородной системы, соответствующей системе (2,8). Тогда по формулам (2,2), в которых  $\rho_j = \frac{v_j}{\varphi_j}$ ,  $q_j = \frac{\lambda_j}{\varphi_j}$  ( $j=1,2$ ), мы получим регулярное решение  $U_1, U_2, U_3$  вида (1,9) уравнений (1,10) с граничными условиями (1,11), (1,12); и в силу теоремы I  $U_1 \equiv 0, U_2 \equiv 0, U_3 \equiv 0$ . Итак, потенциал простого слоя (2,2) а) равен нулю в  $\Omega_1$ . Но непрерывности он равен нулю и на  $S_1$ , а так как этот потенциал является решением внешней задачи Дирихле для уравнения  $\Delta U + k_1^2 U = 0$  с граничным условием  $U|_{S_1} = 0$  и в силу (2,3) удовлетворяет условиям излучения на бесконечности, то он равен нулю и вне  $S_1$ . Используя теорему о скачке нормальной производной потенциала простого слоя, убеждаемся, что плотность  $\rho_1$  (а значит, и  $v_1$ ) равна нулю.

Аналогично доказывается, что и  $\lambda_2 = 0$ .

Докажем теперь, что  $v_2 = 0$ . Потенциал (2,2) с), представляющий в  $\Omega_2$  функцию  $U_3 \equiv 0$ , является внутри  $S_2$  решением задачи Дирихле для уравнения  $\Delta U + k_3^2 U = 0$  с граничным условием  $U|_{S_2} = 0$ . Так как, по предположению,  $-k_3^2$  не является собственным числом этой задачи, то функция (2,2) с) равняется тождественно нулю внутри  $S_2$ . Обращаясь, как и выше, к формуле скачка нормальной производной потенциала простого слоя, получим, что  $\rho_2$  (а, следовательно, и  $v_2$ ) равно нулю.

Равенство  $v_1 = 0$  доказывается аналогично.

### § 3. Формулы для $T_s, Q_s$ и правых частей системы (2,8)

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \alpha_j &= r + \rho_j, & \alpha_{mj} &= r_m + \rho_j, \\ \beta_j &= r - \rho_j, & \beta_{mj} &= r_m - \rho_j, \\ \gamma_j &= z - \zeta_j, & \gamma_{mj} &= z_m - \zeta_j, \\ \alpha_j &= \frac{4r\rho_j}{\alpha_j^2 + \beta_j^2}, & \alpha_{mj} &= \frac{4r_m\rho_j}{\alpha_{mj}^2 + \beta_{mj}^2}, \\ \beta_j &= 1 - \alpha_j^2, & \beta_{mj} &= 1 - \alpha_{mj}^2, \end{aligned} \quad (3,1)$$

$$\Delta_j = \sqrt{(\alpha_j^2 + \beta_j^2) \sin^2 X + (\gamma_j^2 + \beta_j^2) \cos^2 X}, \quad \Delta_{mj} = \sqrt{(\alpha_{mj}^2 + \beta_{mj}^2) \sin^2 X + (\gamma_{mj}^2 + \beta_{mj}^2) \cos^2 X}.$$

Напомним, что точка  $(\rho_j, \zeta_j) [(r_m, z_m)]$  принадлежит кривой  $L_j (L_m)$ ,  $(r, z)$  - произвольная точка меридиональной плоскости  $\Theta = 0$ . Представим (2,6) в виде

$$T_s(r, z, t_j) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos X}{R_j} dX + \int_0^{2\pi} \frac{\cos X (e^{i k_s R_j} - 1)}{R_j} dX \equiv T(r, z, t_j) + T_s^*(r, z, t_j). \quad (3,2)$$

После несложных преобразований, для функции  $T(r, z, t_j)$  получим выражение

$$T(r, z, t_j) = \frac{16 r \rho_j}{(\alpha_j^2 + \beta_j^2)^{3/2}} C(\alpha_j), \quad (3,3)$$

где  $C(\alpha_j)$  - полный эллиптический интеграл

$$C(\alpha_j) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos \varphi \cdot \sin \varphi)^2}{(1 - \alpha_j^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi.$$

Второе слагаемое в (3,2) запишем в более удобном для вычислений виде

$$T_s^* = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i k_s \Delta_j} - 1}{\Delta_j} \cos 2X \cdot dX. \quad (3,4)$$

Вычислим теперь производную от функции  $T_s(r, z, t_j)$  (как функции переменных  $r, z$ ) в направлении  $\hat{e}(\cos \hat{e}r, \cos \hat{e}z)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_s}{\partial e} &= - \int_0^{2\pi} \frac{\cos X}{R_j} \left[ \rho_j (1 - \cos X) \cos \hat{e}r + (\gamma_j \cos \hat{e}r + \beta_j \cos \hat{e}z) \right] dX + \\ &+ \int_0^{2\pi} \frac{(i k_s R_j - 1) e^{i k_s R_j} + 1}{R_j^2} \cos X \cdot \cos \hat{e}R_j dX \equiv \frac{\partial T(r, z, t_j)}{\partial e} + \frac{\partial T_s^*(r, z, t_j)}{\partial e}. \end{aligned} \quad (3,5)$$

Здесь

$$\cos \hat{\ell} R_j = \frac{r - \beta_j \cos \chi}{R_j} \cos \hat{\ell} r + \frac{\beta_j}{R_j} \cos \hat{\ell} z. \quad (3,6)$$

Первое слагаемое в правой части (3,5) приводится к виду

$$\frac{\partial T(r, z, t_j)}{\partial e} = \frac{8\beta_j}{(\alpha_j^2 + \beta_j^2)^{3/2}} \left[ D(\alpha_j) - 2C(\alpha_j) \right] \cos \hat{\ell} r + \frac{4}{\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}} \left[ b_j^2 D(\alpha_j) - B(\alpha_j) \right] g_j, \quad (3,7)$$

где

$$g_j = \frac{\beta_j \cos \hat{\ell} r + \beta_j \cos \hat{\ell} z}{\alpha_j^2 + \beta_j^2}, \quad (3,8)$$

а  $D(\alpha_j), B(\alpha_j)$  — полные эллиптические интегралы

$$D(\alpha_j) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \alpha_j^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi, \quad B(\alpha_j) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - \alpha_j^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi.$$

Аналогично (3,4), для  $\frac{\partial T_s^+(r, z, t_j)}{\partial e}$  будем пользоваться формулой

$$\frac{\partial T_s^+(r, z, t_j)}{\partial e} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(i\kappa_s \Delta_j - 1) e^{i\kappa_s \Delta_j} + 1}{\Delta_j^2} \cos 2\chi \cos \hat{\ell} \Delta_j d\chi, \quad (3,9)$$

$$\cos \hat{\ell} \Delta_j = \frac{r - \beta_j \cos 2\chi}{\Delta_j} \cos \hat{\ell} r + \frac{\beta_j}{\Delta_j} \cos \hat{\ell} z. \quad (3,10)$$

Считая, что в формулах (3,3), (3,4), (3,7), (3,9) точка  $(r, z)$  совпадает с точкой  $(r_m, z_m)$ , лежащей на кривой  $L_m$ , а орт  $\vec{\ell}$  совпадает с направлением  $\vec{n}_m$  нормали к кривой  $L_m$  в точке  $(r_m, z_m)$ , на основании (2,9), (2,10) для ядер  $T_s^+(s_m, t_j)$ ,  $Q_s(s_m, t_j)$  получим следующие выражения:

$$T_s^+(s_m, t_j) = T(s_m, t_j) + T_s^*(s_m, t_j),$$

$$T(s_m, t_j) = \frac{16 r_m \beta_j}{(\alpha_{mj}^2 + \beta_{mj}^2)^{3/2}} C(\alpha_{mj}),$$

$$T_s^*(s_m, t_j) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i\kappa_s \Delta_{mj}} - 1}{\Delta_{mj}} \cos 2\chi d\chi,$$

$$Q_s(s_m, t_j) = \Psi_m' T_s(s_m, t_j) + N_s(s_m, t_j);$$

$$N_s(s_m, t_j) = N(s_m, t_j) + N_s^*(s_m, t_j),$$

$$N(s_m, t_j) = \frac{8 r_m \beta_j}{(\alpha_{mj}^2 + \beta_{mj}^2)^{3/2}} \left[ D(\alpha_{mj}) - 2C(\alpha_{mj}) \right] \Psi_m'(s_m) +$$

$$+ \frac{4 r_m}{\sqrt{\alpha_{mj}^2 + \beta_{mj}^2}} \left[ b_{mj} D(\alpha_{mj}) - B(\alpha_{mj}) \right] g_{mj},$$

$$N_s^*(s_m, t_j) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(i\kappa_s \Delta_{mj} - 1) e^{i\kappa_s \Delta_{mj}} + 1}{\Delta_{mj}^2} \cos 2\chi \cos n_m \Delta_{mj} d\chi,$$

$$g_{mj} = g_j \Big|_{\substack{(r, z) \in L_m \\ \vec{\ell} = \vec{n}_m}}, \quad \cos n_m \Delta_{mj} = \cos \hat{\ell} \Delta_j \Big|_{\substack{(r, z) \in L_m \\ \vec{\ell} = \vec{n}_m}}.$$

Электрическое поле  $\vec{E}_0$  источника (I,4) в однородной среде с электромагнитными постоянными  $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2 = 0$  находится как решение уравнения

$$\Delta \vec{E}_0 + \kappa_2^2 \vec{E}_0 = - (i\omega \mu_2) [\vec{i}_3 \cdot \delta(r-a, z-z_0)],$$

( $\delta(r-a, z-z_0)$  — дельта-функция Дирака)

удовлетворяющее условиям излучения.

Это решение имеет вид:

$$\vec{E}_0 = V_0(r, z) \vec{i}_3,$$

$$V_0(r, z) = \frac{i\omega \mu_2 a I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\kappa_2 R}}{R} \cos \varphi d\varphi, \quad (3,19)$$

$$R = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi + (z-z_0)^2}.$$

Из сопоставления формулы (3,19) с (2,6) видим, что

$$V_0(s_m) = \text{const } T_2(s_m), \quad (3,20)$$

$$W_0(s_m) = \text{const } Q_2(s_m),$$

$$\text{const} = \frac{i\omega \mu_2 a I}{4\pi}, \quad (3,21)$$

где функции  $T_2(s_m), Q_2(s_m)$  получаются соответственно из ядер  $T_2(s_m, t_j), Q_2(s_m, t_j)$ , если положить в последних  $\beta_j = a, \hat{\ell}_j = \vec{z}_0$ .

§ 4. Алгоритм численного решения системы (2,8)

Метод приближённого решения системы интегральных уравнений (2,8) состоит в следующем. Разбиваем промежутки  $[-\ell_1, \ell_1]$  и  $[-\ell_2, \ell_2]$  соответственно на  $n_1, n_2$  частей точками  $-\ell_1 = t_1^{(0)} < t_1^{(1)} < t_1^{(2)} < \dots < t_1^{(n_1)} = \ell_1, -\ell_2 = t_2^{(0)} < t_2^{(1)} < t_2^{(2)} < \dots < t_2^{(n_2)} = \ell_2$ .

Обозначим через  $v_j^{(p)}, \lambda_j^{(p)}$  значения функций  $v_j, \lambda_j$  в точках  $t_j^{(p-\frac{1}{2})}$ , являющихся серединами промежутков  $[t_j^{(p-1)}, t_j^{(p)}]$   $p=1, 2, \dots, n_j; j=1, 2$ . Длину  $p$ -го промежутка обозначим через  $\Delta_j^{(p)} (\Delta_j^{(p)} = t_j^{(p)} - t_j^{(p-1)})$ . В составленной нами программе используется один из трёх, описываемых ниже способов аппроксимации неизвестных функций  $v_j, \lambda_j$ .

Первый способ состоит в том, что на каждом из промежутков  $[t_j^{(p-1)}, t_j^{(p)}]$  значения функций  $v_j, \lambda_j$  полагаются равными их значениям  $v_j^{(p)}, \lambda_j^{(p)}$  в средней точке этого промежутка (рис. 2).

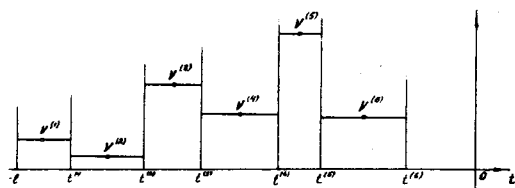


Рис. 2

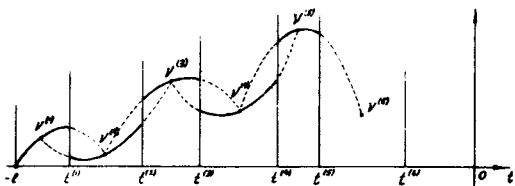


Рис. 3

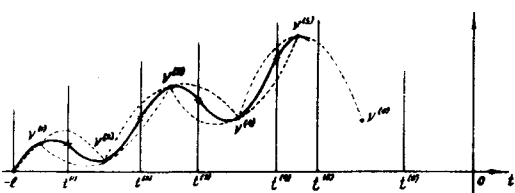


Рис. 4

Второй способ состоит в том, что на каждом из промежутков  $[t_j^{(p-1)}, t_j^{(p)}]$  (кроме первого и последнего) функции  $v_j, \lambda_j$  интерполируются по их значениям в точках  $t_j^{(p-\frac{1}{2})}, t_j^{(p-\frac{1}{2})}, t_j^{(p-\frac{1}{2})}$  (рис. 3). На первом и последнем промежутке наши функции интерполируются по их значениям в точках  $-\ell_j, t_j^{(1/2)}, t_j^{(1/2)}, t_j^{(n_1-1/2)}, t_j^{(n_1-1/2)}, \ell_j$ . Напомним, что  $v_j(\pm \ell_j) = \lambda_j(\pm \ell_j) = 0$ .

Третий способ состоит в использовании пятиточечной дуго-параболической интерполяции, описанной в работе [2\*] для случая, когда промежуток, где ищется функция, разбит на равные части. Чтобы не писать громоздких формул, опишем этот способ с помощью чертежа.

На рис. 4 пунктирными линиями обозначены куски парабол, проходящих через каждые три подряд идущие точки, отмеченные кружками. При этом каждую из прямых, проведённых через точки деления  $t^{(p)}$  (кроме точек  $\pm \ell$ ) параллельно оси ординат, пересекают две "пунктирные" параболы. Одну из них, на которой две точки, отмеченные кружком, лежат левее этой прямой назовём левой параболой, другую - правой. Ординаты точек, отмеченных крестиками, вычисляются по формуле

$$\frac{\Delta_n a_n + \Delta_n a_n}{\Delta_n + \Delta_n}$$

где  $a_n, a_n$  - ординаты точек пересечения прямой  $t = t^{(p)}$  соответственно с левой и правой параболой, а  $\Delta_n, \Delta_n$  - длины промежутков  $[t_j^{(p-1)}, t_j^{(p)}], [t_j^{(p)}, t_j^{(p+1)}]$ , примыкающих к точке деления  $t^{(p)}$  соответственно слева и справа. И, наконец, сплошная линия изображает аппроксимирующую функцию, которая состоит из кусков парабол, проведенных на каждом из промежутков  $[t^{(p-1)}, t^{(p)}]$  (кроме первого и последнего) через точку, отмеченную кружком и две соседние с ней точки, отмеченные крестиками. На первом (последнем) промежутке парабола проводится через две первые (последние) отмеченные кружками и одну ближайшую к ним точку, отмеченную крестиком. Под расстоянием между точками мы в данном случае понимаем модуль разности их абсцисс.

Заменим в левых частях системы (2,8) функции  $v_j, \lambda_j$  их приближенным представлением по одному из описанных выше способов и приведем подобные члены при  $v_j^{(p)}, \lambda_j^{(p)}$ ; затем, полагая в первых двух из получившихся уравнений  $S_1 = S_1^{(1)}, S_1^{(2)}, \dots, S_1^{(n_1)}$ , где  $S_1^{(p)} = t_1^{(p-\frac{1}{2})}$ , а в двух последних  $S_2 = S_2^{(1)}, S_2^{(2)}, \dots, S_2^{(n_2)}$ , где  $S_2^{(p)} = t_2^{(p-\frac{1}{2})}$ , получим для определения  $2(n_1+n_2)$  неизвестных  $v_j^{(p)}, \lambda_j^{(p)}$  ( $p=1, 2, \dots, n_j; j=1, 2$ ) систему линейных алгебраических уравнений  $2(n_1+n_2)$ -го порядка (с комплексными коэффициентами).

Пусть  $x$  и  $y$   $2(n_1 + n_2)$  - мерные вектора

$$x = (\nu_1^{(1)}, \nu_1^{(2)}, \dots, \nu_1^{(n_1)}; \lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_1^{(n_1)}; \nu_2^{(1)}, \nu_2^{(2)}, \dots, \nu_2^{(n_2)}; \lambda_2^{(1)}, \lambda_2^{(2)}, \dots, \lambda_2^{(n_2)}), \quad (4,1)$$

$$y = (\beta_1^{(1)}, \beta_1^{(2)}, \dots, \beta_1^{(n_1)}; \alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_1^{(n_1)}; \alpha_2^{(1)}, \alpha_2^{(2)}, \dots, \alpha_2^{(n_2)}; \beta_2^{(1)}, \beta_2^{(2)}, \dots, \beta_2^{(n_2)}), \quad (4,2)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_m^{(q)} &= \nu_0(s_m^{(q)}) \quad (q=1,2,\dots,n_m) \quad (m=1,2), \\ \beta_1^{(q)} &= \mu_1 W_0(s_1^{(q)}) \quad (q=1,2,\dots,n_1), \\ \beta_2^{(q)} &= \mu_2 W_0(s_2^{(q)}) \quad (q=1,2,\dots,n_2). \end{aligned} \quad (4,3)$$

Полученную выше систему запишем в виде

$$Ux = y. \quad (4,4)$$

В связи с известными трудностями, возникающими при обращении на вычислительных машинах матриц высокого порядка, мы ограничимся случаями, когда поверхности  $S_1$  и  $S_2$  симметричны относительно плоскости  $z=0$ , а источник (см. формулу (1,4)) расположен в плоскости симметрии  $z=0$ . Тогда, как нетрудно убедиться, ядра в уравнениях (2,8) симметричны относительно центров прямоугольников, в которых они определены, а правые части этих уравнений - чётные функции. Поэтому и функции

$\nu_j, \lambda_j$  - чётные. Это обстоятельство, если выбирать точки деления  $t_j^{(p)}$  симметрично относительно нуля, позволяет снизить число неизвестных вдвое. Итак, в дальнейшем точки деления промежутков  $[-\ell_j, \ell_j]$  ( $j=1,2$ ) будем обозначать через  $\pm t_j^{(p)}$ ,

$p=1,2,\dots,n_j$ ;  $j=1,2$ , причем  $0 < t_j^{(1)} < t_j^{(2)} < \dots < t_j^{(n_j)} = \ell_j$ ,  $j=1,2$ , а через  $\nu_j^{(1)}, \nu_j^{(2)}, \dots, \nu_j^{(n_j)}; \lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(2)}, \dots, \lambda_j^{(n_j)}$  - значения неизвестных функций  $\nu_j, \lambda_j$  в точках  $0 = t_j^{(1-\frac{1}{2})}, t_j^{(2-\frac{1}{2})}, \dots, t_j^{(n_j-\frac{1}{2})}$ , являющихся соответственно серединами промежутков  $[-t_j^{(1)}, t_j^{(1)}], [t_j^{(1)}, t_j^{(2)}], \dots, [t_j^{(n_j-1)}, t_j^{(n_j)}]$ .

Переменные  $s_m$  ( $m=1,2$ ) принимают значения  $s_m^{(q)} = t_j^{(q-\frac{1}{2})}$ ,  $q=1,2,\dots,n_m$ ;  $m=1,2$ . Символам  $\nu_j^{(p)}, \lambda_j^{(p)}, s_m^{(q)}$ , входящим в формулы (4,1), (4,2), (4,3), будем придавать в дальнейшем только что описанное значение, а систему уравнений относительно неизвестных  $\nu_j^{(p)}, \lambda_j^{(p)}$  будем по-прежнему записывать формулой (4,4).

Коэффициенты матрицы  $U$  являются определенными (зависящими от способа аппроксимации неизвестных функций и выбора точек  $t_j^{(p)}$ ) линейными комбинациями вида:

$$\int_{t_j^{(p-1)}}^{t_j^{(p)}} [P(s_m^{(q)}, t_j) + P(s_m^{(q)}, -t_j)] dt_j; \quad (4,5)$$

$$\int_{t_j^{(p-1)}}^{t_j^{(p)}} \left( \frac{t_j - t_j^{(p-\frac{1}{2})}}{\Delta_j^{(p)}} \right) [P(s_m^{(q)}, t_j) + P(s_m^{(q)}, -t_j)] dt_j; \quad \begin{matrix} p=2,3,\dots,n_j; \\ j=1,2; \\ q=1,2,\dots,n_m; \\ m=1,2; \end{matrix} \quad (4,6)$$

$$\int_{t_j^{(p-1)}}^{t_j^{(p)}} \left( \frac{t_j - t_j^{(p-\frac{1}{2})}}{\Delta_j^{(p)}} \right)^2 [P(s_m^{(q)}, t_j) + P(s_m^{(q)}, -t_j)] dt_j; \quad (4,7)$$

при  $p=1$  нижний предел в написанных формулах следует заменить нулём, символ  $P$  принимает значения  $T_s, Q_s$  ( $s=1,2,3$ ), которыми обозначаются ядра системы (2,8).

Интегралы (4,5), (4,6), (4,7) вычисляются по формуле трапеций с фиксированным числом узлов (число узлов подбирается экспериментально). В случае, когда  $s_m^{(q)} \in [t_m^{(q-1)}, t_m^{(q)}]$  интегралы вида (4,5) являются несобственными (подынтегральные функции имеют логарифмические особенности см. [2]). Это затруднение обходится обычным приёмом выделения особенности.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} x_0 &= \text{Re } x, \quad x_1 = \text{Im } x, \\ y_0 &= \text{Re } y, \quad y_1 = \text{Im } y, \\ U_0 &= \text{Re } U, \quad U_1 = \text{Im } U. \end{aligned} \quad (4,8)$$

После того как вычислены матрицы  $U_0, U_1$  и векторы  $y_0, y_1$ , вектор  $x_1$  находится как решение уравнения

$$(U_0 + U_1 U_0^{-1} U_1) x_1 = y_1 - (U_1 U_0^{-1}) y_0, \quad (4,9)$$

а  $x_0$  - по формуле

$$x_0 = U_0^{-1} y_0 + (U_0^{-1} U_1) x_1. \quad (4,10)$$

## § 5. Некоторые численные результаты

Критерием того, что предложенный метод приводит к правильным результатам, мы будем считать достаточно хорошее согласование свойств приближённого решения с некоторыми априорными свойствами функций  $\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2$  при некоторых сочетаниях сред, а также "близость" приближённых решений при увеличении числа  $n_1 + n_2$  точек деления.



Опишем сначала априорные свойства функций  $\nu_j, \lambda_j$  при некоторых сочетаниях сред.

Наряду с системой (2,8) мы будем решать аналогичную ей систему, соответствующую задаче об излучении тем же источником тока (I,4) электромагнитных волн в случае, когда имеется лишь одна поверхность  $S_2$  раздела двух однородных изотропных сред, причём среда, заключённая внутри  $S_2$ , имеет электромагнитные постоянные  $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2 = 0$ , а среда, заполняющая пространство вне  $S_2$  —  $\epsilon_3, \mu_3, \sigma_3$ . Эта система имеет вид:

$$\begin{aligned} - \int_{-e_2}^{e_2} \lambda_2 T_2(s_2, t_2) dt_2 + \int_{-e_2}^{e_2} \lambda_3 T_3(s_2, t_2) dt_2 &= V_0(s_2), \\ -\mu_3 \left( 2\pi \lambda_2 + \int_{-e_2}^{e_2} \lambda_2 Q_2(s_2, t_2) dt_2 \right) + \mu_3 \left( -2\pi \lambda_3 + \int_{-e_2}^{e_2} \lambda_3 Q_3(s_2, t_2) dt_2 \right) &= \mu_3 W_0(s_2), \end{aligned} \quad (5,1)$$

где все входящие сюда функции имеют то же значение, что и в системе (2,8). При этом полное электрическое поле  $\vec{E}_2$  внутри  $S_2$  даётся формулой

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_2 + \vec{E}_0 = (V_2 + V_0) \vec{e}_2,$$

а вне  $S_2$  — формулой

$$\vec{E}_3 = V_3 \cdot \vec{e}_3,$$

где

$$V_2(r, z) = \int_{-e_2}^{e_2} \lambda_2 T_2(r, z, t_2) dt_2.$$

Функции  $V_3(r, z), V_0(r, z)$  вычисляются по тем же формулам, что и раньше (см. (2,5), (3,19)).

Отметим, что матрица приближённой системы линейных алгебраических уравнений, соответствующая системе (5,1) и составленная по приведенному в работе способу, является минором матрицы  $U$ , чем мы и пользуемся при одновременном решении систем (2,8) и (5,1).

Назовем сформулированную только что задачу задачей II (в отличие от задачи I, поставленной в § I). Когда это будет необходимо, величинам, относящимся к задаче I (задаче II), будем приписывать символ I (II); например,  $I \lambda_2, I V_3$ , и т.д. ( $II \lambda_2, II \lambda_3$ , и т.д.).

Рассмотрим два случая.

а). Среды в областях  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  одинаковые. Тогда добавочное поле  $I \vec{E}_2$ , а вместе с ним и функция  $I V_2(r, z)$  должны

равняться нулю. Следовательно, (см. доказательство теоремы II § 2) функции  $I \lambda_1, I \lambda_2$  тоже должны быть равными нулю. Решая соответствующую этому случаю задачу II, мы должны получить

$$\begin{aligned} II V_2(r, z) &= \int_{-e_2}^{e_2} II \lambda_2 \cdot T_2(r, z, t_2) dt_2 = 0 \text{ в } \bar{\Omega}_1 + \Omega_2, \\ I V_3(r, z) - II V_3(r, z) &= \int_{-e_2}^{e_2} (I \nu_2 - II \nu_2) T_2(r, z, t_2) dt_2 = 0 \text{ в } \Omega_3. \end{aligned}$$

Рассуждениями, аналогичными доказательству теоремы II § 2, нетрудно показать, что тогда

$$II \lambda_2 = 0, \quad II \nu_2 = I \nu_2.$$

в) Одинаковыми являются среды в  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Тогда по-прежнему

$$II V_3(r, z) \equiv I V_3(r, z), \text{ когда } (r, z, \theta) \in \Omega_3,$$

а функции  $II V_2(r, z)$  и  $I V_2(r, z)$  должны совпадать в  $\Omega_2$ , откуда заключаем, что

$$II \nu_2 = I \nu_2, \quad II \lambda_2 = I \lambda_2, \quad I \lambda_1 = 0. \quad (5,2)$$

Переходим к численным примерам.

Поверхности  $S_1$  и  $S_2$  — эллипсоиды вращения соответственно с полуосями  $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}$  и  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ . (Кривые  $L_1, L_2$  заданы соответственно формулами

$$\begin{cases} r_1 = \frac{1}{8} \cos t_1, & r_2 = \frac{1}{4} \cos t_2; \\ z_1 = \frac{1}{4} \sin t_1, & z_2 = \frac{1}{2} \sin t_2; \\ -\frac{\pi}{2} \leq t_1 \leq \frac{\pi}{2}, & -\frac{\pi}{2} \leq t_2 \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (5,3)$$

(Здесь параметр  $t_j$  не является длиной дуги кривой  $L_j$ ; но это обстоятельство не изменит ни одну из написанных формул, если считать, что левые части равенств (2,4) умножены на

$$\sqrt{r_j^{12} + z_j^{12}}).$$

Радиус  $a$  источника (I,4) равен  $\frac{3}{16}$ . Коэффициент  $\frac{\omega \mu_2 a^2}{4\pi}$  в формуле (3,19) считаем равным единице. Точки деления  $-t_j^{(a)}, t_j^{(a)}, t_j^{(a)}, \dots, t_j^{(a)}$ ;  $j = 1, 2$  образуют геометрическую прогрессию со знаменателем  $\alpha > 1$ . Целесообразность такого распределения точек деления оправдывается видом получаемых решений (см. рис. 5).

Случай а) рассмотрен нами при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned} \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0, \\ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0, \end{aligned} \quad (5,4)$$

здесь  $\mu$  - магнитная проницаемость свободного пространства. В таблице I приведены значения мнимых частей величины  $\Gamma \lambda_j^{(p)}$ ,  $\Gamma \nu_j^{(p)}$  и  $\Pi \lambda_j^{(p)}$ ,  $\Pi \nu_j^{(p)}$ , являющихся соответственно решениями системы (4,4) и аналогичной ей системы для задачи П. Системы составлены при  $n_1 = n_2 = 10$ ,  $\alpha = \frac{3}{2}$  с использованием третьего способа аппроксимации неизвестных функций. Вещественные части упомянутых величин в силу условия (5,4) получаются равными нулю. Как видно из этой таблицы, приближенное решение обладает свойствами случая а), если всякое число, не превышающее по абсолютной величине 0,005, считать нулём. При этом все величины (за исключением  $\Gamma \nu_j^{(p)}$ ,  $\Gamma \nu_2^{(p)}$ ,  $\Pi \nu_2^{(p)}$ ), не являющиеся в приведенном смысле нулями, имеют значащую цифру по крайней мере в первом разряде после запятой.

На рис. 5 изображены графики мнимых частей приближенных решений  $\tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2$ , полученных при  $n_1 = n_2 = 10$  (точки, отмеченные крестиками) и при  $n_1 = n_2 = 6$  (точки, отмеченные кружками,  $d = \frac{3}{2}$ ). Для сравнения, на рис. 7 мы приводим графики тех же решений, но полученных при  $d = 1$  (равномерный шаг).

На рис. 6 изображены графики функции  $\text{Im} \tilde{\lambda}_2$  (которая теоретически должна быть нулём), полученные при первом способе аппроксимации неизвестных функций (пунктирная линия) и при третьем способе (сплошная линия). Из этих графиков видно, что третий способ даёт картину более близкую к истине, чем первый.

Случай в) рассмотрен нами в тех же условиях, что и случай а), за исключением одного:  $\kappa_3^2 = 9i$ .

В таблице II приведены мнимые части решений  $\Gamma \lambda_j^{(p)}$ ,  $\Pi \lambda_j^{(p)}$ ,  $\Gamma \nu_j^{(p)}$ ,  $\Pi \nu_j^{(p)}$ , в таблице III - вещественные части этих решений. Из рассмотрения этих таблиц видно, что априорные свойства (5,2) случая в) выражены вполне отчётливо.

На рис. 8 приведены соответственно кривые  $\text{Im} \tilde{\nu}_1, \text{Im} \tilde{\lambda}_2, \text{Im} \tilde{\nu}_2$  и  $\text{Re} \tilde{\nu}_1, \text{Re} \tilde{\lambda}_2, \text{Re} \tilde{\nu}_2$ , полученные при  $n_1 = n_2 = 10$ ,  $d = \frac{3}{2}$  (точки отмечены крестиками) и при  $n_1 = n_2 = 6$ ,  $d = \frac{3}{2}$  (точки отмечены кружками).

Приведем результаты следующего расчета. Поверхности  $S_1$  и  $S_2$  даны формулами (5,1).  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ ,  $\kappa_3^2 = 9i$ ,  $\mu_2 = \mu_3 = \mu_0$ ,  $\frac{\omega \mu_2 a I}{4\pi} = 1$ . Радиус источника  $a$  принимает значения

$$a = a_1, a_2, a_3, a_4;$$

где

$$a_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}; a_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{32}; a_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{64}; a_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{128},$$

$$\mu_1 = \mu_0, 1000 \mu_0.$$

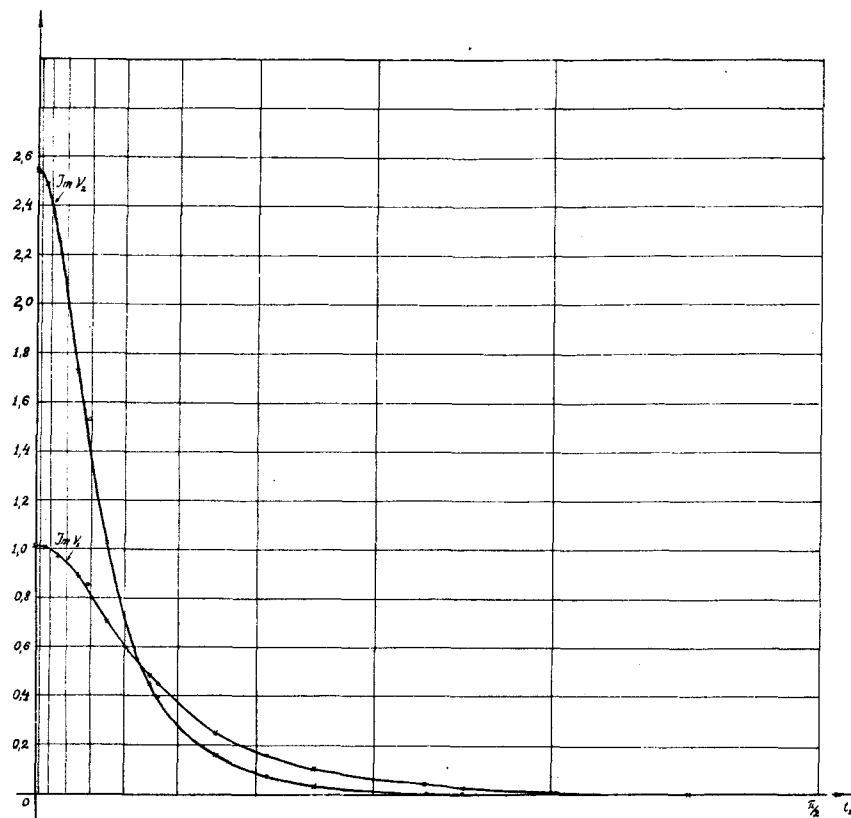


Рис. 5

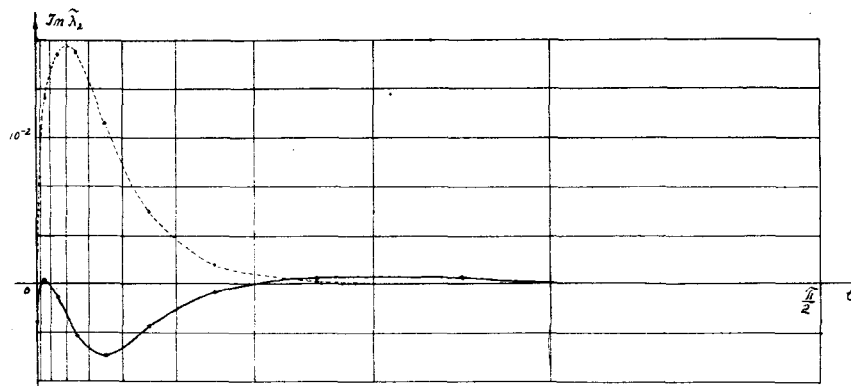


Рис. 6

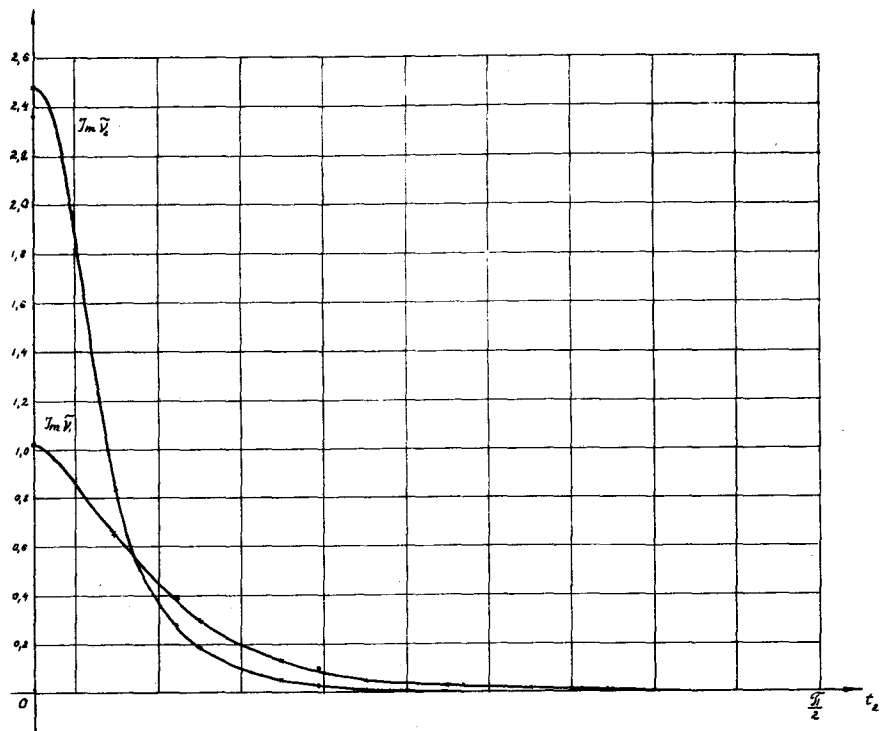


Рис. 7

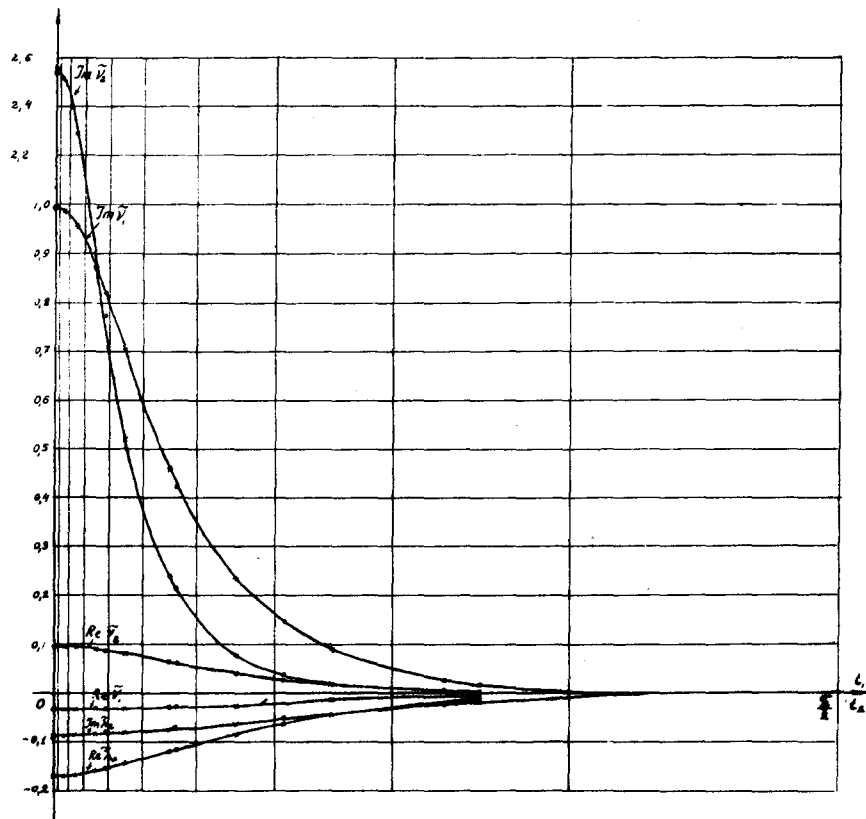


Рис. 8

Таблица I

$\rho$ \ Re	$I \nu_1^{(p)}$	$I \lambda_1^{(p)}$	$I \lambda_2^{(p)}$	$II \lambda_2^{(p)}$	$I \nu_2^{(p)}$	$II \nu_2^{(p)}$	$II \lambda_2^{(p)} - I \nu_2^{(p)}$
I	1,0124	0,0031	0,0030	0,0027	2,5339	2,5345	0,0006
2	1,0101	-0,0006	0,0025	-0,0022	2,4933	2,4939	0,0006
3	0,9781	0,0007	0,0010	0,0008	2,2550	2,2550	0,0006
4	0,8931	0,0005	0,0030	0,0032	1,7264	1,7270	0,0006
5	0,7217	0,0003	0,0053	0,0050	1,0261	1,0268	0,0007
6	0,4801	-0,0006	0,0029	0,0029	0,4585	0,4594	0,0009
7	0,2527	-0,0017	0,0003	0,0003	0,1508	0,1518	0,0010
8	0,1045	-0,0017	-0,0006	-0,0006	0,0329	0,0333	0,0004
9	0,0316	-0,0014	-0,0006	-0,0006	0,0038	0,0039	0,0001
10	0,0031	-0,0004	-0,0002	-0,0002	0,0001	0,0001	0,0000

Таблица II

$\rho$ \ $J_m$	$I \nu_1^{(p)}$	$I \lambda_1^{(p)}$	$I \lambda_2^{(p)}$	$II \lambda_2^{(p)}$	$II \lambda_2^{(p)} - I \lambda_2^{(p)}$	$I \nu_2^{(p)}$	$II \nu_2^{(p)}$	$II \nu_2^{(p)} - I \nu_2^{(p)}$
I	0,9918	0,0030	-0,0799	-0,0800	-0,0001	2,5509	2,5516	0,0007
2	0,9894	-0,0006	-0,0900	-0,0901	-0,0001	2,5106	2,5112	0,0006
3	0,9575	0,0006	-0,0866	-0,0867	-0,0001	2,2714	2,2721	0,0007
4	0,8726	0,0005	-0,0836	-0,0837	-0,0001	1,7431	1,7438	0,0007
5	0,7015	0,0002	-0,0800	-0,0802	-0,0002	1,0420	1,0427	0,0007
6	0,4607	-0,0007	-0,0770	-0,0771	-0,0001	0,4727	0,4736	0,0009
7	0,2352	-0,0017	-0,0682	-0,0683	-0,0001	0,1619	0,1628	0,0009
8	0,0907	-0,0017	-0,0494	-0,0495	-0,0001	0,0393	0,0398	0,0005
9	0,0238	-0,0013	-0,0240	-0,0241	-0,0001	0,0063	0,0064	0,0001
10	0,0020	-0,0003	-0,0030	-0,0030	-0,0000	0,0006	0,0006	0,0000

Таблица II

Re p	$I \varphi_1^{(p)}$	$I \lambda_1^{(p)}$	$I \lambda_2^{(p)}$	$\Pi \lambda_2^{(p)}$	$\Pi \lambda_2^{(p)} - I \lambda_2^{(p)}$	$I \varphi_2^{(p)}$	$\Pi \varphi_2^{(p)}$	$\Pi \varphi_2^{(p)} - I \varphi_2^{(p)}$
1	-0,0326	-0,0001	-0,1667	-0,1668	0,0001	0,0958	0,0959	0,0001
2	-0,0327	+0,0000	-0,1672	-0,1673	0,0001	0,0964	0,0964	0,0000
3	-0,0325	-0,0000	-0,1649	-0,1650	0,0001	0,0944	0,0945	0,0001
4	-0,0322	-0,0000	-0,1591	-0,1593	0,0002	0,0899	0,0900	0,0001
5	-0,0315	-0,0000	-0,1464	-0,1465	0,0001	0,0801	0,0802	0,0001
6	-0,0297	-0,0000	-0,1229	-0,1231	0,0002	0,0633	0,0633	0,0000
7	-0,0260	-0,0000	-0,0881	-0,0883	0,0002	0,0407	0,0407	0,0000
8	-0,0192	+0,0000	-0,0480	-0,0481	0,0001	0,0184	0,0184	0,0000
9	-0,0097	0,0002	-0,0161	-0,0161	0,0000	0,0049	0,0049	0,0000
10	-0,0012	0,0002	-0,0014	-0,0014	0,0000	0,0005	0,0005	0,0000

В каждом из составленных по этим данным вариантов подсчитывается нормальная составляющая среднего (по времени) значения вектора Пойтинга

$$S^* = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \vec{E}_3 \times \vec{H}_3 \right]$$

в точках поверхности  $S_2$ .

Результаты этих расчетов представлены на рис. 9, где кривая, обозначенная символом  $(i)_j$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ;  $j = 0, 1$ ), относится к варианту, в котором  $\alpha = \alpha_i$ ,  $\mu_1 = \mu_0$ , если  $j = 0$ , и  $\mu_1 = 1000 \mu_0$ , если  $j = 1$ . Размерности всех физических величин даны в системе MKS.

Коэффициент "усиления" равен корню квадратному из отношения излучаемых мощностей при  $\mu_1 = 1000 \mu_0$  и  $\mu_1 = \mu_0$ , в зависимости от радиуса  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) источника, принимает соответственно значения

$$q_1 = 2,5, \quad q_2 = 4,3, \quad q_3 = 4,8, \quad q_4 = 4,9.$$

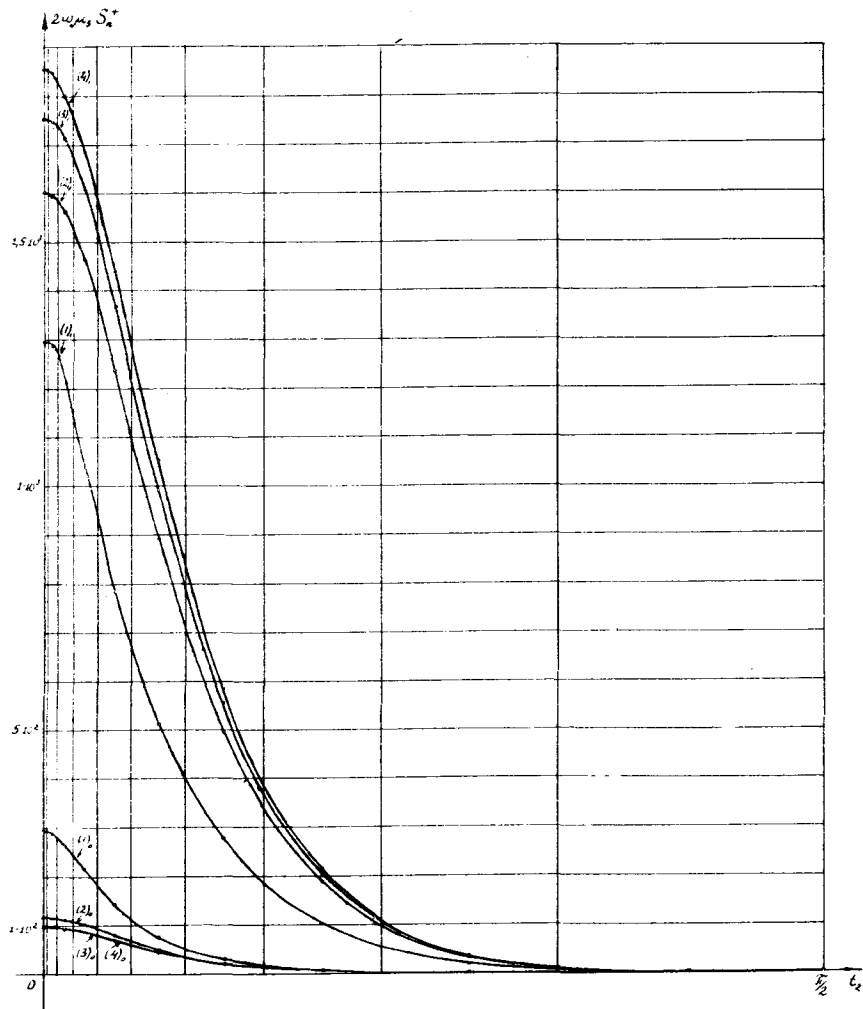


FIG. 9