ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Сборник трудов
1964 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 13

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ РАСЧЕТЫ МНОГОТАКТНЫХ СХЕМ

С.В. Макаров

Введение

В данной статье рассматривается та же "основная задача", что и в работах [1],[2],[3].[x] Дана многотактная схема (МС) со случайными входами (стохастический автомат), имеющая n входов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и один выход - z. В частности, может быть $n=0$ (автономный детерминированный автомат). Элементы МС $a_1, a_2, \ldots, a_m$ суть одновыходные переключательные элементы (ПЭ), реализующие булевы функции. В схеме содержатся также задержки на один такт. Входы схемы иногда будем рассматривать как входные элементы (ВЭ). Каждое звено схемы может находиться только в одном из двух состояний: "0" или "1". Вектор входов в момент t не зависит от предыдущих моментов времени. (В силу сделанных предположений, последовательность состояний МС можно интерпретировать как однородную цепь Маркова [4]). <u>Требуется найти вероятность единицы на выходе схемы при заданном потоке импульсов на ее входах</u>. (Аналогичная задача ставится для выхода любого элемента схемы).

В работе [2] дан матричный метод решения основной задачи, суть которого состоит в следующем. Пусть P_{ij} есть веро-

---

x) В работах [1],[2] "основная задача" называется "задачей № 1".

ятность перехода МС из i -го состояния в j -ое за один такт. N - число состояний схемы. Вычисляем матрицу переходов

$$\pi = \left\| \begin{matrix} \mathcal{P}_{11} & \dots & \mathcal{P}_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{P}_{N1} & \dots & \mathcal{P}_{NN} \end{matrix} \right\| \qquad (I)$$

Затем, в предположении, что π - регулярна, находим предельные вероятности p_j пребывания схемы в j -ом состоянии (j = I,2,... N), для чего надо решить систему линейных уравнений N -го порядка:

$$p_j = \sum_{i=1}^{N} p_i \mathcal{P}_{ij} \quad . \qquad (2)$$

Если $\mathcal{P}(Z=1/j)$ есть вероятность единицы на выходе схемы в j -ом состоянии, то искомая вероятность $\mathcal{P}(Z=1)$ дается формулой:

$$\mathcal{P}(Z=1) = \sum_{j=1}^{N} p_j \mathcal{P}(Z=1/j) \quad . \qquad (3)$$

Матричный метод применим лишь тогда, когда π - регулярна. Важнейший недостаток его состоит в том, что порядок N системы (3) возрастает в общем случае, как 2^n, где n - число задержек схемы. Построение матрицы переходов при большом числе состояний представляет собой весьма громоздкую процедуру, не говоря уже о решении системы (3). В то же время, интересуясь величиной $\mathcal{P}(Z=1)$, мы получаем при матричном методе много дополнительной информации ($\mathcal{P}_{ij}$, p_j), не представляющей для основной задачи самостоятельной ценности. Возникает вопрос: нельзя ли дать более непосредственный способ нахождения $\mathcal{P}(Z=1)$, без построения матрицы переходов? Оказывается, такая возможность имеется и осуществляется, например, в методе моментов [3]. В § I излагается краткое содержание работы [3] с небольшими изменениями и дополнениями. В § 2 дан еще один способ решения основной задачи - <u>метод итерации</u> и производится сравнение трех названных методов по трудоемкости и области применимости. В § 3 с помощью построений, употребляемых при методе итерации, изучается вопрос об устойчивости стохастических автоматов по отношению к редким сбоям и доказывается, что автоматы с регулярной матрицей переходов ("эргодические автоматы") обладают свойством асимптотической самокорректировки.

§ I. Метод моментов

Не теряя общности, предположим, что в МС не существует пути, соединяющего какие-либо две задержки и не проходящего при этом через ПЭ. Если это не так, то мы можем между любыми двумя задержками вставить дополнительный элемент с функцией $x = x$, после чего вышеприведенное предположение окажется выполненным. Ниже под словом "элемент" будем подразумевать либо ПЭ, либо ВЭ, но не задержку.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть дана МС G и $\mathcal{H}$ есть некоторое подмножество элементов G, обладающее свойствами:

I. В схеме G любой замкнутый контур проходит хотя бы через один элемент из $\mathcal{H}$.

2. Если a_i, a_j - элементы G и путь $a_i a_j$ проходит более чем через одну задержку, то $a_i a_j$ обязательно проходит хотя бы через один элемент из $\mathcal{H}$.

3. При удалении из $\mathcal{H}$ любого элемента оставшееся подмножество перестает удовлетворять требованиям I и 2.

Тогда $\mathcal{H}$ есть опорная система элементов (ОСЭ).

ЛЕММА I. *Для любой МС существует хотя бы одна ОСЭ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как множество всех элементов схемы G тривиальным образом обладает свойствами I и 2, то, удаляя из G последовательно по одному элементу и проверяя каждый раз оставшееся подмножество на выполнение условий I и 2 (а в случае невыполнения хоть одного из них возвращая элемент в подмножество), мы неминуемо придем к некоторому множеству элементов, обладающему всеми свойствами I,2,3.

Лемма доказана.

Легко убедиться, что число элементов в ОСЭ не превосходит числа задержек схемы G.

Минимальную по количеству элементов ОСЭ обозначим МОС. Пусть ее компоненты суть $b_1, b_2, \dots, b_K$. Буквами f_i, φ_i, ψ_i будем обозначать булевы функции.

Выражая каждый элемент через непосредственно предшествующие и используя арифметические формы представления булевых функций [5], получим исходную арифметическую систему уравнений схемы G :

$$a_i(t)=f_i[X_1(t),\dots,X_n(t),X_1(t-1),\dots,X_n(t-1),a_1(t),\dots,a_m(t),a(t-1),\dots a_m(t-1)] \quad (4)$$
$$(i=1,2,\dots,m)$$

В силу сделанного выше предположения в правой части (4) отсутствуют аргументы времени, отличные от t и $t-1$.

Замену некоторого элемента a_j, входящего в правую часть (4), на его выражение того же вида будем называть подстановкой.

ЛЕММА 2. С помощью конечного числа подстановок каждый элемент a_i, не принадлежащий МОС, может быть выражен явно через компоненты МОС:

$$a_i(t)=f_i[X_1(t),\dots,X_n(t),X_1(t-1),\dots,X_n(t-1),b_1(t),\dots,b_k(t),b_1(t-1),\dots,b_k(t-1)]. \quad (5)$$

При этом в правой части (5) нет элементов, не принадлежащих МОС.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{E}'$ множество элементов, непосредственно управляющих элементом a_i. Выделим в $\mathcal{E}'$ компоненты МОС и входы (если таковые найдутся), а для каждого из оставшихся элементов построим множества непосредственно управляющих элементов и возьмем их объединение $\mathcal{E}''$. В множестве $\mathcal{E}''$ выделим компоненты МОС и входы. Если $\mathcal{E}''$ содержит элементы, не являющиеся ни компонентами МОС, ни входами, то далее поступаем аналогично, получая последовательность множеств:

$$\mathcal{E}', \mathcal{E}'', \mathcal{E}''', \dots \quad (6)$$

Так как в G не существует циклов, не проходящих через элементы МОС, то процесс построения множеств (6) конечен. Ни один из элементов (b_i и ВЭ), выделенных при таком построении, не может иметь какой-либо другой аргумент, кроме t и $t-1$, так как это противоречило бы определению МОС.

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Каждый элемент $b_i \in$ МОС $(i=1,2,\dots,k)$ посредством конечного числа подстановок может быть выражен только через ВЭ и элементы МОС, причем таким образом, что все элементы b_i,

входящие в правую часть соответствующего выражения, будут иметь аргумент времени $t-1$:

$$b_i(t)=\varphi_i[X_1(t),\dots,X_n(t),X_1(t-1),\dots,X_n(t-1),b_1(t-1),\dots,b_k(t-1)], \quad (7)$$
$$(i=1,2,\dots,k)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму I, элемент $b_i(t)$ представляем сначала в виде (5); при этом в правой части может находиться $b_i(t-1)$, но не $b_i(t)$, так как это противоречило бы правильной организации схемы. Для всех элементов b_j, входящих в правую часть полученного выражения с аргументом t, находим аналогичное представление в виде (5) и подставляем его в исходное выражение для $b_i(t)$. Повторяя эту процедуру несколько раз, мы неминуемо придем к формуле вида (7). При этом, вследствие свойств МОС, в правой части (7) не может появиться аргументов времени, отличных от t и $t-1$.

Систему уравнений (7) назовем опорной системой уравнений (ОСУ) для МС G.

Из лемм 2 и 3 немедленно следует

ЛЕММА 4. Каждый элемент $a_i \in G$ может быть выражен в виде (8).

$$a_i(t)=\psi_i[X_1(t),\dots,X_n(t),X_1(t-1),\dots X_n(t-1),b_1(t-1),\dots b_k(t-1)] \quad (8)$$
$$(i=1,2,\dots,k)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При доказательстве лемм 2 и 3 нигде не использовалось свойство минимальности МОС. Поэтому леммы 2,3,4 сохранят свою силу, если множество $(b_1, b_2,\dots,b_k)$ есть просто ОСЭ (не обязательно МОС).

Произведение

$$\mu_k(t)=X_{j_1}(t)\dots X_{j_{e_1}}(t)\,b_{i_1}\dots b_{i_{e_2}}(t),\ k=e_1+e_2$$

(все сомножители различны) назовем синхронным термом k-го порядка, отнесенным к моменту времени t.

Из свойств арифметических булевых форм [5] следует, что правые части ОСУ (7) можно записать как алгебраические суммы синхронных термов различных порядков, отнесенных к $t-1$.

Перемножая левые и правые части некоторых уравнений из ОС (7) и, в случае необходимости, домножая получаемые выражения на некоторые входные переменные, мы можем выразить любой синхронный терм k-го порядка, отнесенный к t, через термы разных порядков, отнесенные к $t-1$. Так как для фиксированной МОС число всех возможных термов конечно, то, выражая указанным способом термы, отнесенные к t , через термы, отнесенные к $t-1$, мы можем построить линейную синхронную систему уравнений относительно термов (ЛСТ), в которой, если отождествить термы, отличающиеся только аргументами времени (t или $t-1$), число неизвестных равно числу уравнений, причем в левых частях уравнений находятся только термы, отнесенные к t , а в правых частях - только термы, отнесенные к $t-1$, а также арифметические булевы формы от входных переменных с аргументами времени t .

Так как булевы переменные и все арифметические формы от них, в том числе и термы любого порядка, могут принимать только два значения - "0" или "I", то математическое ожидание терма есть вероятность обращения этого терма в единицу. А поскольку выход любого элемента схемы является частным случаем терма, то задача об отыскании математических ожиданий термов есть обобщение основной задачи.

Математическое ожидание терма K -ого порядка назовем моментом K -ого порядка, а переход от терма к соответствующему моменту назовем сглаживанием.

Математическое ожидание будем отмечать чертой сверху. Введем гипотезу о стационарности, а именно: каков бы ни был момент $\overline{\mu_K(t)}$, мы примем, что

$$\overline{\mu_K(t)} = \overline{\mu_K(t-1)} . \qquad (9)$$

При малых t соотношение (5), вообще говоря, не выполняется хотя бы потому, что начальное состояние схемы, задаваемое произвольно, может оказаться невозвратным. Однако при больших t соотношение (8) в наиболее интересных для приложений случаях выполняется практически точно, ибо при решении основной задачи нет никаких оснований предпочитать один отдельно взятый момент времени другому. Таким образом, принимая (9), мы изучаем схему G в установившемся стационарном режиме работы.

Применяя операцию сглаживания и используя (9), мы перейдем от ЛСТ к линейной системе уравнений относительно моментов (ЛСМ).

ЛСМ есть линейная алгебраическая система уравнений, порядок которой равен числу неизвестных. Коэффициенты системы суть математические ожидания арифметических булевых форм с одним и тем же аргументом времени t , и, следовательно, могут

быть найдены путем решения основной задачи для однотактных схем (см. [I], [5]).

Порядок ЛСМ ограничен сверху количеством всех возможных моментов, равным $\sum_{i=1}^{K} C_K^i = 2^K$.

Решая ЛСМ, мы находим вероятности единиц на выходе элементов из МОС. Если требуется решить основную задачу для элемента a_i , не входящего в МОС, то мы присоединим a_i к МОС и получим, таким образом, некоторую ОСЭ (не минимальную), для которой, в силу замечания к леммам 2,3,4 (стр. 7), могут быть выполнены от начала до конца все построения метода моментов вплоть до построения и решения соответствующей ЛСМ.

§ 2. Метод итерации. Сравнительная оценка методов

Пусть дана МС G. Выпишем для нее ОСУ (7), введя для правой части специальное обозначение $b_i(t)|_0$:

$$b_i(t) = b_i(t)|_0 = f_i\left[X_1(t), \ldots X_n(t), X_1(t-1), \ldots X_n(t-1), b_1(t-1), \ldots b_k(t-1)\right] \qquad (I0)$$
$$(i=1,2,\ldots,K)$$

Назовем $b_i(t)|_0$ "нулевой итерацией".

Сделав подстановку $b_i(t)$ в правую часть (I0), получим:

$$b_i(t) = f_i\left[X_1(t), \ldots X_n(t), X_1(t-1) \ldots X_n(t-1), X_1(t-2) \ldots X_n(t-2), b_1(t-2) \ldots b_k(t-2)\right] \qquad (II)$$
$$(i=1,\ldots,K)$$

Здесь f_i —, вообще говоря, новые функции, но мы для них особых обозначений не вводим. После τ подстановок получим:

$$b_i(t) = b_i(t)|_\tau = f_i\left[X_1(t) \ldots X_n(t-\tau-1), b_1(t-\tau-1), \ldots b_k(t-\tau-1)\right] \qquad (I2)$$
$$(i=1,\ldots,K)$$

$b_i(t)|_\tau$ есть обозначение правой части (I2) (" τ -ая итерация").

Примем момент $t-\tau-1$ за начальный. Тогда $\{b_1(t-\tau-1), \ldots, b_K(t-\tau-1)\}$ - начальное состояние G.

Математическое ожидание $\overline{b_i(t)|_\tau}$ есть, очевидно, вероятность единицы на выходе b_i после τ тактов работы схемы.

По формуле полной вероятности [6] имеем:

$$\overline{b_i(t)|_\tau} = \mathcal{P}(b_i(t)|_\tau = 1) = \sum_{j=1}^{N} P_{\tau|j} \, \mathcal{P}(b_i = 1/j) \qquad (I3)$$

(см. аналогичную формулу (3)). $\mathcal{P}(b_i = 1/j)$ есть вероятность события $b_i=1$ при нахождении $\mathfrak{S}$ в j -ом состоянии; $P_{z|j}$ есть вероятность j -го состояния через z тактов после начального момента времени. N есть число состояний $\mathfrak{S}$.

Рассмотрим предельные вероятности:

$$P_j = \lim_{z \to \infty} P_{z|j} \quad . \tag{I4}$$

Как известно [4], для марковской цепи с регулярной матрицей переходов предельные вероятности (I4) существуют и (на что обратим особое внимание) не зависят от начального состояния.

Напомним, что стохастическая матрица называется регулярной, если одно из ее собственных чисел равно единице (простой корень характеристического уравнения), а все остальные собственные числа по модулю меньше единицы [4].

Допустим, что матрица переходов схемы $\mathfrak{S}$ регулярна. Тогда

$$\overline{b_i(t)|_z} = \sum_{j=1}^{N} P_{z|j}\,\mathcal{P}(b_i=1/j) \xrightarrow[z\to\infty]{} \sum_{j=1}^{N} P_j\,\mathcal{P}(b_i=1/j) = \mathcal{P}(b_i=1) = \overline{b_i(t)} \tag{I5}$$

Отсюда следует, что последовательность математических ожиданий итераций

$$\overline{b_i(t)|_0}\,,\ \overline{b_i(t)|_1}\,,\ldots,\ \overline{b_i(t)|_z}\,,\ldots \tag{I6}$$

при $z \to \infty$ сходится к пределу, не зависящему от начального состояния $\{b_1(t-z-1),\ldots,b_K(t-z-1)\}$. Следовательно,для любого $\alpha > 0$ существует такое $\tilde{z}(\alpha)$, что, как только $z > \tilde{z}(\alpha)$,

$$\left|\,\overline{b_i(t)|_z} - \overline{b_i(t)}\,\right| < \alpha \tag{I7}$$

при любом начальном состоянии $\{b_1(t-z-1),\ldots,b_K(t-z-1)\}$. Поэтому перед применением операции сглаживания мы можем в правой части (I2) принять в качестве вектора $\{b_1(t-z-1),\ldots,b_K(t-z-1)\}$ любой набор нулей и единиц,в частности $(\underbrace{0,0,\ldots\ldots,0}_{K\ \text{раз}})$, и, если z достаточно велико, мы получим решение $\overline{b_i(t)}$ со сколь угодно малой погрешностью. В этом и состоит сущность метода итерации.

Пусть $\mathfrak{A}(t)$ есть произвольный синхронный терм, отнесенный к t (в частности, $\mathfrak{A}(t)$ может быть выходом любого элемента схемы). Поскольку он формально выражается в виде :

$$\mathfrak{A}(t) = f[X_1(t),\ldots,X_n(t),X_1(t-1),\ldots,X_n(t-1),b_1(t-1),\ldots,b_K(t-1)] \tag{I8}$$

(см. способ образования ЛСТ, § I), то, подставляя в правую часть (I8) последовательно $b_i(t-1), b_i(t-2),\ldots, b_i(t-z)$ $(i=1,\ldots,K)$, определяемые из ОСУ (I0), мы получим z -ую итерацию терма $\mathfrak{A}(t)$:

$$\mathfrak{A}(t)|_z = f[X_1(t),\ldots,X_n(t),X_1(t-1),\ldots,X_n(t-z-1),b_1(t-z-1),\ldots,b_K(t-z-1)] \tag{I9}$$

Так как

$$\overline{\mathfrak{A}(t)|_z} = \sum_{j=1}^{N} P_{z|j}\,\mathcal{P}(\mathfrak{A}(t)=1/j) \xrightarrow[z\to\infty]{} \sum_{j=1}^{N} P_j\,\mathcal{P}(\mathfrak{A}(t)=1/j) = \overline{\mathfrak{A}(t)}\,, \tag{20}$$

то, повторив с очевидными изменениями рассуждения, сделанные относительно $\overline{b_i(t)|_z}$, мы убедимся, что метод итерации применим для вычисления математического ожидания любого синхронного терма (в предположении регулярности матрицы переходов).

Рассмотрим ЛСТ, содержащую в левой части компоненты МОС и, быть может, термы второго и высших порядков (см. § I).Считая исходную ЛСТ "нулевой итерацией ЛСТ" (ЛСТ$|_0$) и подставляя в правые части последовательно $b_i(t-1), b_i(t-2),\ldots, b_i(t-z)$, получаем последовательность итераций ЛСТ:

$$\text{ЛСТ}|_0\,,\ \text{ЛСТ}|_1\,,\ldots,\text{ЛСТ}|_z\,,\ldots \tag{2I}$$

Применив к каждой системе из (2I) операцию сглаживания, мы получим последовательность систем уравнений относительно моментов·

$$\text{ЛСМ}|_0\,,\ \text{ЛСМ}|_1\,,\ldots,\text{ЛСМ}|_z\,,\ldots \tag{22}$$

Легко показать, что все системы из (22) содержат одинаковые неизвестные и полностью эквивалентны.

Так как все математические ожидания итераций любого терма сходятся к единственному пределу, последовательность систем (22) сходится к системе, имеющей единственное решение. Следовательно, в силу эквивалентности систем (22), ЛСМ$|_z$ имеет единственное решение при любом z . Поэтому исходная ЛСМ имеет единственное решение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Стохастический автомат (МС со случайными входами) называется эргодическим, если его матрица переходов регулярна.

Суммируя все сказанное, получаем вывод:

<u>При решении основной задачи для эргодических автоматов наряду с матричным методом применимы метод итерации и метод моментов и все три метода дают единственное решение</u>.

Поскольку существуют методы синтеза стохастического автомата, имеющего любую наперед заданную матрицу переходов, причем не обязательно регулярную (см., например, [7]), можно построить примеры неэргодических автоматов, для которых матричный метод и метод итерации не применимы. Однако метод моментов для некоторых неэргодических автоматов остается в силе.

Приведем простейший пример

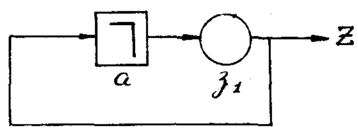


Рис. I.

На рис. I $\urcorner$ - инвертор; $з_1$ - задержка на один такт. ОСУ состоит из одного уравнения: $a(t)=1-a(t-1)$. Сглаживаем: $\bar{a}=1-\bar{a}$. Таким образом, $\bar{a}=\frac{1}{2}$ (что видно и непосредственно). В то же время, принимая $з_1=0$ за первое состояние схемы, $з_1=1$ за второе состояние, имеем матрицу переходов:

$$\pi=\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \qquad (23)$$

Характеристический полином: $\lambda^2-1=0$; $\lambda=\pm 1$. Следовательно, (23) не регулярна и матричный метод не применим, равно как и метод итерации.

Таким образом, из трех изученных методов наибольшую область применимости имеет метод моментов.

Поскольку ЛСМ может быть построена для любой схемы, то метод моментов применим тогда и только тогда, когда ЛСМ имеет единственное решение, т.е. когда ранг ЛСМ равен числу неизвестных. Если же ранг ЛСМ меньше числа неизвестных, то система ЛСМ становится неопределенной и метод моментов теряет силу.

<u>Пример</u>:

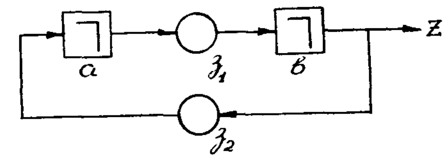


Рис. 2.

$з_1$ и $з_2$ - задержки.

ОСУ: $\begin{cases} a(t)=1-в(t-1) \\ в(t)=1-a(t-1) \end{cases}$

ЛСМ: $\begin{cases} \bar{a}=1-\bar{в} \\ \bar{в}=1-\bar{a} \end{cases}$

Здесь ЛСМ фактически вырождается в одно уравнение с двумя неизвестными: метод моментов неприменим. Более подробный анализ схемы показывает, что, в зависимости от начального состояния схемы, могут иметь место следующие решения:

I) начальное состояние $(з_1=0,\ з_2=0)$ $\bar{a}=\frac{1}{2}$, $\bar{в}=\frac{1}{2}$,

2) -"- $(з_1=0,\ з_2=1)$ $\bar{a}=0$, $\bar{в}=1$,

3) -"- $(з_1=1,\ з_2=0)$ $\bar{a}=1$, $\bar{в}=0$,

4) -"- $(з_1=1,\ з_2=1)$ $\bar{a}=\frac{1}{2}$, $\bar{в}=\frac{1}{2}$.

Матрица переходов для схемы рис. 2 нерегулярна:

$$\pi=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Ее спектр: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$, $\lambda_4=-1$.

Важное преимущество метода моментов - отсутствие необходимости вычислять матрицу переходов.

Максимальный порядок ЛСМ не превосходит 2^n, где n - число неизвестных в ОСУ. Во многих частных случаях порядок ЛСМ значительно ниже верхней оценки, но, вообще говоря, он может быть довольно высоким, и в этом – главный недостаток метода.

Метод итерации удобен тем, что при его использовании число уравнений не возрастает (остается равным числу неизвестных в ОСУ). Но, в зависимости от структуры матрицы переходов, сходимость может быть медленной.

Для схем с большой памятью автор рекомендует применять комбинацию метода моментов с методом итерации, что позволяет, отбрасывая мало влияющие члены, ограничиваться системой невысокого порядка.

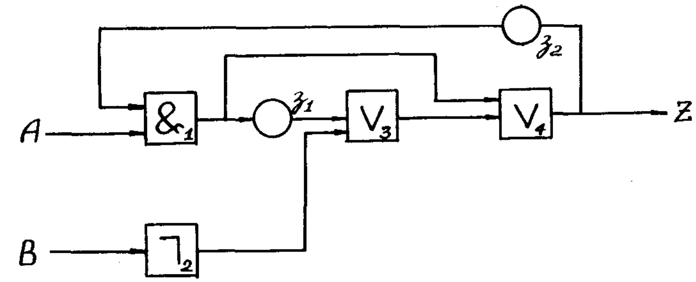
ЗАМЕЧАНИЕ. Ничто принципиально не мешает применять метод итерации и метод моментов, отправляясь не от ОСУ, а непосредственно от исходной арифметической системы уравнений схемы (4). Выгода использования МОС и ОСУ состоит, в основном, в минимизации получаемой системы ЛСМ.

§ 3. Об устойчивости стохастических автоматов по отношению к редким сбоям

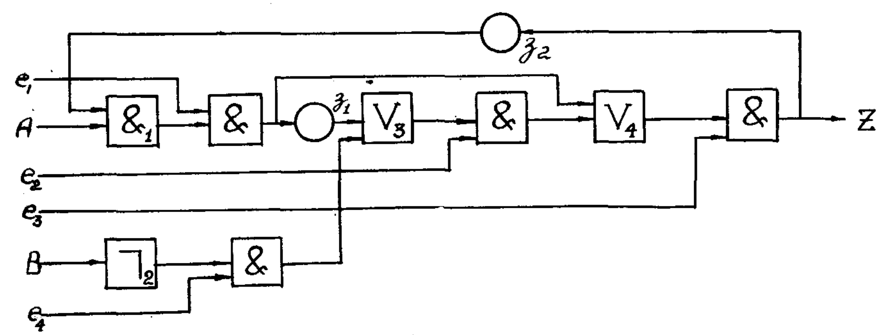
Изложенные методы можно применять для вычисления вероятности $P(E)$ ошибки на выходе МС при заданных вероятностях сбоев в отдельных элементах (см. [I], [2]). Наиболее интересны случаи, когда редкие сбои в элементах приводят к малой $P(E)$. Покажем, что этим свойством обладают все автоматы с регулярной матрицей переходов.

Рассмотрим эргодическую МС $\mathfrak{S}$ с n входами $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Предположим, что элементы $a_i \in \mathfrak{S}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ неидеальны. Для определенности будем считать, что на выходе a_i возможна ошибка вида $1 \to 0$ ("Сбой первого рода" по терминологии работы [I], или появление ложного нуля) с малой вероятностью. Для изучения поведения схемы в таких условиях построим, исходя из $\mathfrak{S}$, вспомогательную идеальную схему $\mathfrak{S}'$, называемую <u>имитацией неидеальной схемы $\mathfrak{S}$</u>. Переход от $\mathfrak{S}$ к $\mathfrak{S}'$ осуществляется следующим образом. На выходе элемента a_i до разветвлений выходного канала (если они имеются) ставим конъюнкцию с двумя входами. Один из входов дополнительной конъюнкции есть выход a_i, а другой есть новый независимый вход схемы e_i, на который подается единица с вероятностью $\varepsilon_i = 1 - \delta_i$ (δ_i есть малая величина). Одноименные входы схем $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ тождественны. Состояния схем $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ в момент $t = 0$ будем полагать одинаковыми.

<u>Пример</u>:



а



б

Рис.3

z_1 и z_2 – задержки; & – конъюнкция; $\vee$ – дизъюнкция.

Схема рис. 3б есть имитация неидеальной схемы рис. 3а. Из независимости входов e_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ следует, что мы не накладываем никаких ограничений на количество одновременных сбоев в $\mathfrak{S}$ (помимо ограничений, определяемых самой структурой схемы $\mathfrak{S}$).

Выпишем систему уравнений схемы $\mathfrak{S}$ в арифметической форме ([5]):

$$a_i(t) = f_i\left[X_1(t), \ldots, X_n(t), X_1(t-1), \ldots, X_n(t-1), a_1(t), \ldots, a_m(t), a_1(t-1), \ldots, a_m(t-1)\right] \quad (24)$$
$$(i = 1, \ldots, m)$$

Из способа построения $\mathfrak{S}'$ (имитации $\mathfrak{S}$) следует, что система уравнений схемы $\mathfrak{S}'$ может быть получена из (24) заменой a_i на $e_i a_i'$ $(i = 1, \ldots, m)$, (a_i и a_i' – одинаковые логические элементы, но $a_i \in \mathcal{G}$, $a_i' \in \mathcal{G}'$).

$$a_i'(t)=f_i[x_1(t),\dots,x_n(t),x_1(t-1),\dots,x_n(t-1),$$
$$e_1(t)a_1'(t),\dots,e_m(t)a_m'(t),e_1(t-1)a_1'(t-1),\dots,e_m(t-1)a_m'(t-1)] \tag{25}$$
$$(i=1,\dots,m)$$

Фиксируем некоторый элемент $a(t) \in \mathcal{G}$ и соответствующий ему элемент $a'(t) \in \mathcal{G}'$. Логическое условие появления одинаковых сигналов на выходах $a(t)$ и $a'(t)$ в момент t есть

$$Q(t)=a(t)a'(t)+(1-a(t))(1-a'(t))=$$
$$=1-a(t)-a'(t)+2a(t)a'(t), \tag{26}$$

откуда следует, что вероятность совпадения $a(t)=a'(t)$ есть

$$\mathcal{P}(Q(t)=1)=\overline{Q(t)}=1-\bar{a}-\bar{a}'+2\overline{aa'}\,. \tag{27}$$

Если $\mathcal{P}(E)$ - вероятность ошибки на выходе $\mathcal{G}'$, то, очевидно, $\mathcal{P}(E)=1-\overline{Q(t)}$.

Из лемм 2 и 3 (§ I) следует, что существует некоторая последовательность подстановок вида (24), переводящая систему (24) в систему

$$a_i(t)=f_i[x_1(t),\dots x_n(t),x_1(t-1),\dots x_n(t-1),b_1(t-1),\dots b_k(t-1)] \tag{28}$$
$$(i=1,2,\dots,m)$$

(b_j - суть компоненты МОС схемы $\mathcal{G}$).

Если каждой подстановке вида (24) поставить в соответствие подстановку вида (25) применительно к системе (25), то, как только (24) перейдет в (28), система (25) перейдет в (29):

$$a_i'(t)=\psi_i[x_1(t),\dots,x_n(t),x_1(t-1),\dots,x_n(t-1),$$
$$e_1(t),\dots,e_m(t),e_1(t-1),\dots,e_m(t-1),b_1'(t-1),\dots,b_k'(t-1)] \tag{29}$$
$$(i=1,\dots,m)$$

(b_i и b_i' - одинаковые элементы, но $b_i \in \mathcal{G}$, $b_i' \in \mathcal{G}'$).
Так как a_i' - любой элемент из $\mathcal{G}'$, то, в частности,

$$b_i'(t)=\psi_i[x_1(t),\dots,x_n(t),e_1(t),\dots,e_m(t),e_1(t-1),\dots,e_m(t-1)$$
$$b_1'(t-1),\dots,b_k'(t-1)] \tag{30}$$
$$(i=1,\dots,k)$$

Из (29) и (30) вытекает, что если $\{b_i(t)\}$ $(i=1,\dots,k)$ есть ОСЭ схемы $\mathcal{G}$, то $\{b_i'(t)\}$ $(i=1,\dots,k)$ есть ОСЭ схемы $\mathcal{G}'$ (см. § I).

Образуем r-ые итерации термов $a(t)$ и $a'(t)$:

$$a(t)|_r=f[x_1(t),\dots,x_n(t-r-1),b_1(t-r-1),\dots,b_k(t-r-1)]\,, \tag{31}$$

$$a'(t)|_r=\psi[x_1(t),\dots,x_n(t-r-1),e_1(t),\dots,e_m(t),\dots,e_m(t-r-1),$$
$$b_1(t-r-1),\dots,b_k(t-r-1)]\,. \tag{32}$$

Отметим, что при $e_i \equiv 1$ $(i=1,\dots,m)$ при любом r выполняется $a(t)|_r=a'(t)|_r$, ибо в этом случае $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}'$ тождественны.

Используя свойства арифметических форм булевых функций ([5]), представим $a(t)|_r$ в виде алгебраической суммы элементарных конъюнктивных членов (термов) $\mathfrak{A}_i$ различных порядков (среди которых могут быть и термы нулевого порядка - константы):

$$a(t)|_r=\sum_{i=1}^{\mathcal{M}}\mathfrak{A}_i\{x_1(t),\dots,x_n(t-r-1),b_1(t-r-1),\dots,b_k(t-r-1)\} \tag{33}$$

$\mathcal{M}$ есть количество термов - слагаемых в (33). Из способа образования выражения (29) следует, что $a'(t)|_r$ может быть представлено в виде:

$$a'(t)|_r=\sum_{i=1}^{\mathcal{M}}\mathcal{E}_i\{e_1(t),\dots,e_m(t),\dots,e_m(t-r-1)\}\mathfrak{A}_i\{x_1(t),\dots,x_n(t-r-1),$$
$$b_1(t-r-1),\dots,b_k(t-r-1)\} \tag{34}$$

$\mathcal{E}_i$ - суть элементарные конъюнкции, составленные из аргументов $e_1(t),\dots,e_m(t),\dots,e_m(t-r-1)$.

Поскольку во всех предыдущих преобразованиях все e_i участвовали только в качестве множителей при a_i, ни один терм $\mathcal{E}_i$ не может тождественно равняться нулю.

Перейдем к математическим ожиданиям итераций:

$$\overline{a(t)|_r}=\sum_{i=1}^{\mathcal{M}}\overline{\mathfrak{A}_i}\ , \tag{35}$$

$$\overline{a'(t)|_r}=\sum_{i=1}^{\mathcal{M}}\overline{\mathcal{E}_i}\,\overline{\mathfrak{A}_i}\,. \tag{36}$$

При выводе (36) учтена независимость входов e_i $(i=1,\dots,m)$.

Пусть теперь $\overline{e_i}=\varepsilon_i\to 1$, $(\delta_i=1-\varepsilon_i\to 0)$, $(i=1,\dots,m)$ т.е. имеют место "бесконечно редкие сбои".

Тогда

$$\overline{\varepsilon_j}\to 1 \qquad (j=1,\dots,\mathcal{M})$$

$$\text{при} \quad \varepsilon_i\to 1 \qquad (i=1,\dots,m). \tag{37}$$

Из эргодичности G и из (37) следует:

$$\lim_{\tau\to\infty}\overline{a(t)}\Big|_\tau=\lim_{\tau\to\infty}\overline{a'(t)}\Big|_\tau=\overline{a(t)}=\overline{a'(t)} \tag{38}$$

$$\varepsilon_i\to 1 \quad (i=1,\dots,m).$$

Аналогично получаем:

$$\lim_{\tau\to\infty}\overline{a(t)\big|_\tau a'(t)}\Big|_\tau=\lim_{\tau\to\infty}\overline{a(t)}\Big|_\tau=\lim_{\tau\to\infty}\overline{a'(t)}\Big|_\tau=\overline{a(t)} \tag{39}$$

$$\varepsilon_i\to 1 \quad (i=1,\dots,m) \qquad\qquad \varepsilon_i\to 1\,(i=1,\dots,m)$$

Из (38) и (39) следует, что

$$\overline{Q(t)}=1-\overline{a}-\overline{a'}+2\,\overline{aa'}=1 \ . \tag{40}$$

Равенство (40) имеет физический смысл устойчивости схемы G по отношению к бесконечно редким сбоям ("асимптотическая самокорректировка"). Из (38), (39), (40) следует, что для любого элемента $a\in G$ и для сколь угодно малого $\beta>0$ существует такая малая вероятность α, что, как только $\delta_i<\alpha$ $(i=1,\dots,m)$, мы имеем:

$$\left|\overline{Q(t)}\right| > 1-\beta \ . \tag{41}$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА. Эргодический автомат асимптотически устойчив по отношению к редким сбоям.

Для неэргодических автоматов теорема неверна: даже единственный сбой в схеме иногда может запоминаться на сколь угодно длинный период и при последующей идеальной работе схемы давать большую вероятность ошибки на выходе.

ПРИМЕР. Неэргодический автомат (рис. I) вырабатывает в зависимости от начального состояния одну из двух последовательностей:

I) OIOIOIOIOI ...

2) IOIOIOIOIO ...

После единственной ошибки вида $1\to 0$ автомат выдает "противоположную" последовательность и вероятность ошибки на выходе равна единице.

Если сбой не единичный, но бесконечно редкий ($\delta\to 0$, $\varepsilon\to 1$), то каждый четный сбой аннулирует эффект нечетного сбоя и вероятность ошибки становится меньше единицы. По методу моментов получаем:

$a(t)=1-a(t-1)$ (уравнение схемы G);

$a'(t)=1-e(t-1)a'(t-1)$ (уравнение схемы G');

$$a(t)a'(t)=1-a(t-1)-e(t-1)a'(t-1)+e(t-1)a(t-1)a'(t-1);$$

$$\overline{a}=1-\overline{a},\ \overline{a}=\frac{1}{2};$$

$$\overline{a'}=1-\overline{e}\,\overline{a'},\ \overline{a'}=\frac{1}{1+\varepsilon};$$

$$\overline{aa'}=1-\overline{a}-\overline{e}\,\overline{a'}+\overline{e}\,\overline{aa'};$$

$$(1-\varepsilon)\overline{aa'}=1-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}=\frac{1-\varepsilon}{2(1+\varepsilon)};$$

$$\overline{aa'}=\frac{1}{2(1+\varepsilon)};$$

$$\overline{Q(t)}=1-\overline{a}-\overline{a'}+2\overline{aa'}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\mathcal{P}(E)=1-\overline{Q(t)}=\frac{1}{2}$.

Для имитации неидеальной схемы G мы использовали дополнительные независимые входы e_i, причем

$$\mathcal{P}(e_i=0)=\delta_i=1-\varepsilon_i \ . \tag{42}$$

Но в качестве характеристики сбоев в элементе a_i естественнее брать вероятность ошибки первого рода $(1\to 0)$, введенную в [I], т.е. условную вероятность

$$\tau(a_i)=\mathcal{P}(e_i=0/a_i'=1)=\delta_i\,\mathcal{P}(a_i'=1)=\delta_i\overline{a_i'} \ .$$

По доказанному, при малых δ_i $\quad \overline{a_i}\approx\overline{a_i'}$. (43)

Поэтому $\tau(a_i)=\delta_i\overline{a_i}=\delta_i\,\mathcal{P}(a_i=1)$ (44)

Формула (44) устанавливает связь между характеристиками $\tau(a_i)$

и δ_i. Величина $\mathcal{P}(a_i=1)$ может быть найдена, например, с помощью метода моментов.

Относительную важность элементов схемы G (с точки зрения надежности схемы в целом) можно определить так. Фиксируем элемент $a_i \in G$ и предположим, что в нем возможны случайные сбои с характеристикой δ_i. Остальные элементы схемы будем считать идеальными. По методу моментов (или комбинируя метод моментов с методом итерации) определим вероятность ошибки на выходе схемы (за счет сбоев только в элементе a_i):

$$\mathcal{P}_i(E)=\mathcal{P}(Q(t)=0 \Big/ \delta_i \neq 0, \text{ остальные элементы идеальны}) \qquad (45)$$

Вычислив (45) для каждого a_i $(i=1,\ldots,m)$, примем $\mathcal{P}_i(E)$ за относительную важность элемента a_i. Если требуется повысить надежность схемы, то в первую очередь следует резервировать элементы с наибольшими $\mathcal{P}_i(E)$ (см. аналогичный подход к надежности однотактных схем [I]).

ПРИМЕР:

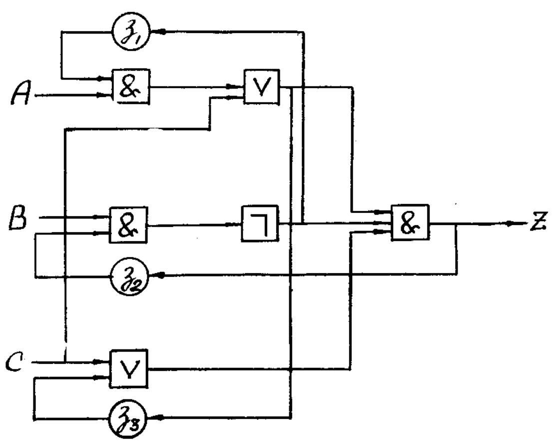


Рис. 4.

Результаты вычисления $\mathcal{P}_i(E)$ для элементов схемы рис. 4 сведены в таблицу. На пересечении строк и столбцов стоят величины $\mathcal{P}_i(E)$, вычисленные для соответствующих элементов a_i и характеристик сбоев δ_i.

Таблица

a_i \ δ_i	0,I	0,0I	0,00I
a	0,0I4	0,00I	0.000
b	0,027	0,003	0,000
d	0,07I	0,007	0,00I
e	0,070	0,007	0,000
f	0,082	0,009	0,00I
g	0,070	0,008	0,000

В заключение отметим, что доказанная теорема легко обобщается на случай редких неисправностей произвольных типов.

Приношу благодарность лаборантке Г.И.Печуркиной, выполнившей необходимые вычисления для последнего примера.

Л и т е р а т у р а

I. Макаров С.В. Вероятностные расчеты однотактных схем. Вычислительные системы. Сб. трудов. Новосибирск, 1962, вып. 4, 29-50 (Ин-т математики Сиб.отд. АН СССР).
2. Макаров С.В. О надежности многотактных схем с малой памятью. Вычислительные системы. Сб. трудов.Новосибирск, 1963, вып. 5, 3-9 (Ин-т математики Сиб.отд. АН СССР).
3. Макаров С.В. Метод моментов для вероятностных расчетов многотактных схем. Вычислительные системы. Сб. трудов. Новосибирск, 1963, вып. 7, 3-I2 (Ин-т математики Сиб. отд. АН СССР).
4. Романовский В.И. Дискретные цепи Маркова. М., 1949.
5. Мерекин Ю.В. Арифметические формы записи булевых выражений и их применение для расчета надежности схем. Вычислительные системы. Сб. трудов. Новосибирск, 1963, вып.7, I3-23 (Ин-т математики Сиб. отд. АН СССР).
6. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М., 1954.
7. Макаров С.В. О реализации стохастических матриц конечными автоматами. Вычислительные системы. Сб. трудов. Новосибирск, 1963, вып. 9, 65-70 (Ин-т математики Сиб.отд. АН СССР).