ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Сборник трудов
1964 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 13

# ОДИН МЕТОД РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ ОДНОТАКТНЫХ СХЕМ

В.Д. Малюгин

## Постановка задачи

Рассмотрим однотактную схему $F$ из $K$ функциональных элементов, реализующую булеву функцию $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. В качестве элементов $F'$ взяты элементы "И", "ИЛИ", " НЕ " (конъюнкция, дизъюнкция и отрицание) $x_i\ (i=1,\ldots,n)$ суть независимые входы схемы $F$; $x=(x_1,\ldots,x_n)$. Обозначим через $y_j=f_j(x)$ функцию, реализуемую $j$ -ым элементом $(j=1,\ldots K),(1\leq j\leq K)$. Предположим, что $j$ -ый элемент допускает сбои $\varepsilon_{j\beta}^{\sigma_j}, \varepsilon_{j\gamma}^{\sigma_j}$, представляющие собой безусловную выдачу соответственно 1 или 0 в рассматриваемый момент времени. Считаем заданным распределение вероятностей сигналов на входах схемы:

$$\mathcal{P}(x_i=\sigma_i)=\alpha_i^{\sigma_i}, \quad i=1,2,\ldots,n, \quad \sigma_i\in\{0,1\}$$

и распределение вероятностей сбоев элементов $F$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\varepsilon_{j\beta}=\sigma_j)&=\beta_j^{\sigma_j},\\ \mathcal{P}(\varepsilon_{j\gamma}=\sigma_j)&=\gamma_j^{\sigma_j}.\end{aligned} \quad j=1,2,\ldots,K,$$

В дальнейшем полагаем, что элементы одного типа "равнонадежны", т.е. имеют одинаковую вероятность сбоев. Тогда

$$\mathcal{P}(\varepsilon_{j\beta}=\sigma_j)=\beta_{0j}^{\sigma_j},$$
$$\mathcal{P}(\varepsilon_{j\gamma}=\sigma_j)=\gamma_{0j}^{\sigma_j},$$

где $\circ$ есть общий символ для элементов из набора$(\&, \vee, -)$. Предполагаем, что все $x_i$ и $\varepsilon_j$ независимы в совокупности. В случае идеально надежных элементов $F$ реализует $f(x)$ с вероятностью $p=1$. Сбой даже в одном элементе меняет функцию $f(x)$ на $f(\xi)$. Сбоем на выходе схемы $F$ считаем событие $\varepsilon$ несовпадения текущих значений функций $f(x)$ и $f(\xi)$, т.е. событие $f(\xi)=\overline{f}(x)$. Вероятность отсутствия сбоя на выходе схемы $F$ в момент времени $t$ назовем **н а д е ж н о с т ь ю**. Ставится задача определить надёжность схемы $F$, реализующей функцию $f(x)$, при заданных распределениях вероятностей входных сигналов $x_i$ и сбоев $\varepsilon_j$.

## § I. Идеальная эквивалентная схема

Схема, допускающая сбои, может быть сведена к надежной схеме с дополнительными входами для искажающих сигналов ([I]). Рассмотрим эквивлентную по надежности схему для элемента $y_j=f_j(x)$, в которой возможным сбоям соответствуют дополнительные входы $\varepsilon_{j\beta}$ и $\varepsilon_{j\gamma}$. Составим таблицу аргументов $y_j, \varepsilon_{j\beta}, \varepsilon_{j\gamma}$ (см. таблицу). Функция $\xi$ характеризует работу реального элемента, подверженного сбоям. Значения $\xi_j$ для первых шести наборов из восьми возможных определяются однозначно. Сигналы $\varepsilon_{j\beta}$ и $\varepsilon_{j\gamma}$ считаем независимыми и поэтому допускаем их совместное появление. Доопределяем таблицу

| | $\varepsilon_{j\gamma}$ | $\varepsilon_{j\beta}$ | $y_j$ | $\xi_j$ |
|---|---|---|---|---|
| I | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | I | I |
| 3 | 0 | I | 0 | I |
| 4 | 0 | I | I | I |
| 5 | I | 0 | 0 | 0 |
| 6 | I | 0 | I | 0 |
| 7 | I | I | 0 | 0 |
| 8 | I | I | I | 0 |



на наборах 7,8. Для двух наборов $(y_j, \varepsilon_{j\beta}, \varepsilon_{j\gamma})$ возможны четыре набора значений функции $\xi_j$. Из практических соображений выбираем для $\xi_j$ значения (0,0). Заметим, что вероятность совместного появления сбоев обычно мала и поэтому выбор значений $\xi_j$ на наборах аргументов 7,8 больше скажется на схеме представления $\xi_j$, чем на вероятностной ее характеристике. Из таблицы после некоторой минимизации находим:

$$\xi_j=(y_j \vee \varepsilon_{j\beta})\cdot\overline{\varepsilon}_{j\gamma}. \qquad (I)$$

Для удобства записи условимся в булевых функциях вместо аргументов $x_i^{\sigma_i}, \varepsilon_{j\beta}^{\sigma_j}, \varepsilon_{j\gamma}^{\sigma_j}$ ставить $\alpha_i^{\sigma_i}, \beta_j^{\sigma_j}, \gamma_j^{\sigma_j}$, соответственно. Это впредь не вызовет недоразумений, ибо $\alpha_i^{\sigma_i}, \beta_j^{\sigma_j}, \gamma_j^{\sigma_j}$ будут представлять вероятности лишь в формулах, имеющих обозначение, отличное от обозначений булевых функций. В этом случае формула (I) перепишется

$$\xi_j=[f_o(\alpha)\vee\beta_o]\cdot\overline{\gamma}_o, \qquad (2)$$

где $f_o(\alpha)$ есть $f_\&(\alpha)=\underset{i}{\&}\alpha_i$, $f_\vee(\alpha)=\underset{i}{\vee}\alpha_i$, $f_-(\alpha)=\overline{\alpha}_i$ для $i\leqslant n$.

Итак, схема $F$ реализует не функцию $f(x)=f(y_1,y_2,\dots y_k)=f(y)$, а функцию $f(\xi)=f(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_k)$, полученную из $f(y)$ заменой $y_j$ на $\xi_j$ из (2).

В общем случае $f(\xi)=f(\alpha,\beta,\gamma)$. Для идеально надежных элементов схема $F$ реализует функцию $f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$, совпадающую с функцией $f(x)$ с точностью до обозначения аргументов. Функция $f(\xi)$ принимает значения I и 0 с вероятностями:

$$\mathcal{P}\{f(\xi)=1\}=h^1(\xi)=h(\xi),$$

$$\mathcal{P}\{f(\xi)=0\}=h^0(\xi)=\overline{h}(\xi)=1-h(\xi).$$

В общем виде

$$\mathcal{P}\{f(\xi)=\sigma\}=h^\sigma(\xi).$$

Аналогично,

$$\mathcal{P}\{f(\alpha)=\sigma\}=h^\sigma(\alpha).$$

Введем следующее обозначение

$$\mathcal{P}\{f(\xi)=\sigma \mid f(\alpha)=\sigma\}=h^\sigma(\alpha^\sigma,\xi),$$

где $h^{\sigma}(\alpha,^{\sigma}\xi)$ есть вероятность того, что $f(\xi)$ принимает значение $\sigma$ при условии, что $f(\alpha)=\sigma$. Так как $f(\xi)$ должна реализовать $f(\alpha)$ на обоих значениях $\sigma$, то и надежность определяем на обоих значениях $\sigma$ по формуле полной вероятности

$$h(\bar{E})=h(\alpha)\cdot h(\alpha,\xi)+h^{o}(\alpha)\cdot h^{o}(\alpha,^{o}\xi)=\sum_{\sigma} h^{\sigma}(\alpha)h^{\sigma}(\alpha,^{\sigma}\xi). \quad (3)$$

## § 2. Некоторые вероятностные соотношения в булевой алгебре

Используя результаты работы [2], нетрудно сделать вывод о том, что от функции $f(\alpha)$, заданной в совершенной дизъюнктивной нормальной форме

$$f(\alpha)=\bigvee_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n}\alpha_1^{\sigma_1}\alpha_2^{\sigma_2}\cdots\alpha_n^{\sigma_n}, \quad (4)$$

можно совершить переход к вероятности

$$h(\alpha)=\sum_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n}\alpha_1^{\sigma_1}\alpha_2^{\sigma_2}\ldots\alpha_n^{\sigma_n}. \quad (5)$$

$\alpha_i^{\sigma_i}$ в (4) есть либо нуль, либо единица, а в (5) – вероятность этого аргумента быть нулем или единицей, причём удовлетворяются соотношения:

$$\alpha_i^{1}=\alpha_i=1-\alpha_i^{o},$$

$$\alpha_i^{o}=\bar{\alpha}_i=1-\alpha_i.$$

Впредь выражение, полученное из $f(\alpha)$ замещением всех логических аргументов на их вероятности при одновременном введении алгебраических знаков сложения и умножения, будем называть замещением булевой функции. Знак инверсии над любым членом в замещении эквивалентен замене данного члена на его дополнение до единицы. Преобразованную по правилам булевой алгебры функцию $f(\alpha)$ к виду $f^{*}(\alpha)$, такому, что замещение $f^{*}(\alpha)$ равно $h(\alpha)=h\{f(\alpha)=1\}$, назовем ф о р м о й п е р е х о д а к з а м е щ е н и ю или просто ф о р м о й.

Можно указать несколько форм перехода к замещению. Очевидно, формой перехода от $f(\alpha)$ к $h(\alpha)$ служит СДНФ. Более компактными формами будут сокращенная ДНФ [3] и ортогональная ДНФ [6]. Рассмотрим другие формы.



А. Пусть бесповторная функция представлена в дизъюнктивной форме

$$f(x)=\bigvee_{i}^{\ell} f_i(x). \quad (6)$$

Преобразование ее по правилу де Моргана дает

$$f(x)=\overline{\mathop{\&}_{i}^{\ell}\bar{f}_i(x)}. \quad (7)$$

Отсюда

$$h(x)=\overline{\prod_{i}^{\ell}\bar{h}_i(x)}. \quad (8)$$

Б. Пусть бесповторная функция представлена в конъюнктивной форме

$$f(x)=\mathop{\&}_{i}^{\ell} f_i(x). \quad (9)$$

Тогда

$$h(x)=\prod_{i}^{\ell} h_i(x). \quad (10)$$

Следствием из А и Б служит следующая

ЛЕММА I. Б е с п о в т о р н а я б у л е в а ф у н к ц и я, в ы р а ж е н н а я в б а з и с е к о н ъ ю н к ц и и и о т р и ц а н и я, я в л я е т с я ф о р м о й п е р е х о д а к з а м е щ е н и ю.

Данное представление есть обобщение результатов, изложенных в [5] для избыточных цепей. Указанную в лемме I форму перехода к замещению назовем о с н о в н о й. Следующую форму можно получить, преобразовав выражение (6) следующим образом:

$$f(x)=f_1(x)\vee\bar{f}_1(x)\cdot f_2(x)\vee\cdots\vee\bar{f}_1(x)\cdot\bar{f}_2(x)\cdots\bar{f}_{\ell-1}(x)\cdot f_\ell(x)=$$
$$=\bigvee_{i=1}^{\ell}\mathop{\&}_{K=1}^{i-1}\bar{f}_K(x)\cdot f_i(x). \quad (11)$$

Тогда

$$h(x)=\sum_{i}^{\ell}\prod_{K=1}^{i-1}\bar{h}_K(x)\cdot h_i(x). \quad (12)$$

Обобщая результаты (10) и (12), находим, что бесповторная булева функция после преобразования всех сумм с помощью выражения (12) является формой перехода к замещению. Назовем эту форму д о п о л н и т е л ь н о й.

ПРИМЕР I.

$$f(x)=(x_1x_2\vee x_3)\cdot x_4\vee x_5.$$

Основная форма

$$f(x)=\overline{\overline{\overline{\overline{x_1,x_2}\,\overline{x_3}}\,x_4}\,\overline{x_5}} \quad .$$

Отсюда

$$h(x)=\overline{\overline{\overline{\overline{x_1x_2}\,\overline{x_3}}\,x_4}\,\overline{x_5}}=1-\left\{1-\left[1-(1-x_1x_2)\overline{x_3}\right]x_4\right\}\overline{x}_5 .$$

Для дополнительной формы

$$f(x)=(x_3\vee\overline{x_3}\,x_1x_2)x_4\overline{x_5}\vee x_5 \ ,$$

имеем:

$$h(x)=(x_3+\overline{x_3}\,x_1x_2)x_4\overline{x_5}+x_5 \ .$$

Чтобы использовать указанные формы перехода к замещению для анализа любой $f(x)$, достаточно представить $f(x)$ в виде дизъюнкции взаимно ортогональных бесповторных функций. Это можно сделать, разложив $f(x)$ по некоторым из ее переменных.

$$f(x)=\bigvee_{\sigma_1\sigma_2\sigma_m} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots x_m^{\sigma_m}\cdot f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_m,x_{m+1},\ldots x_n), \qquad (m\leqslant n).$$

Из ортогональности термов $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots x_m^{\sigma_m}$ и бесповторности функций $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots x_m^{\sigma_m}\cdot f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_m,x_{m+1},\ldots x_n)$ следует:

$$h(x)=\sum_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_m} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots x_m^{\sigma_m}\,h(\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_m,x_{m+1},\ldots x_n).$$

Отметим одно свойство функции $h(\alpha)$ .

ЛЕММА 2. Ф у н к ц и я $h(\alpha)$ д л я э к в и в а л е н т н ы х с х е м п р и н и м а е т о д н о и т о ж е з н а ч е н и е.

Доказательство леммы 2 следует из неизменности $h(\alpha)$ для преобразования склеивания, поглощения и вынесения за скобки:

$$h(AB\vee A\overline{B})=h(A),$$

$$h(AB\vee A)=h(A),$$

$$h(AB\vee AC)=h\left[A(B\vee C)\right] .$$

Используя дизъюнктивное разложение и лемму 2, $f(x)$ можно свести к сумме ортогональных бесповторных функций более удобным методом. Для этого несколько изменим прием, описанный в работе [4].



Выделим в $f(x)$ аргумент $x_i$ , встречающийся наибольшее число раз, и разложим функцию по $x_i$ :

$$f(x)=\bigvee_{\sigma} x_i^{\sigma_i}\cdot f(x_1,\ldots\sigma_i,\ldots x_n).$$

Произведем возможную минимизацию функций $f(x_1,\ldots\sigma_i,\ldots x_n)$. Если полученные функции не свелись к бесповторным, то с одной или обеими из них поступаем, как с функцией $f(x)$ , т.е. разлагаем по аргументу $x_j$ , выбранному аналогичным способом, и вновь минимизируем. Процесс продолжаем до тех пор, пока не представим $f(x)$ в виде суммы бесповторных функций.

ПРИМЕР 2.

$$f(x)=\overline{x_2(x_1\vee x_3)\overline{x_1}x_3}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2} \ ,$$

$$f(x)=x_1\overline{x_2}\vee x_1(\overline{x_2x_3\vee x_3}\vee\overline{x_2})=x_1\,\overline{x_2}\vee\overline{x_1}(\overline{x_3}\vee\overline{x_2})=$$

$$=x_1\overline{x_2}\vee\overline{x_1}\,\overline{x_3x_2} .$$

## § 3. Условные вероятности и надежность

От функции $f^{\tau}(x)$ перейдем к $f^{\tau}(\xi)=f^{\tau}(\alpha,\beta,\gamma)$ и последнюю разложим по аргументам $\alpha_1,\ldots\alpha_n$ :

$$f^{\tau}(\xi)=\bigvee_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n}\alpha_1^{\sigma_1}\alpha_2^{\sigma_2}\ldots\alpha_n^{\sigma_n}\cdot f^{\tau}(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n,\beta,\gamma), \qquad (13)$$

где $\tau\in\{0,1\}$ .

Из ортогональности термов $\alpha_1^{\sigma_1}\alpha_2^{\sigma_2}\ldots\alpha_n^{\sigma_n}$ следует

$$h^{\tau}(\xi)=\sum_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n}\alpha_1^{\sigma_1}\alpha_2^{\sigma_2}\ldots\alpha_n^{\sigma_n}h^{\tau}(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n,\beta,\gamma),$$

где $h^{\tau}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_n,\beta,\gamma)$ есть условная вероятность того, что произойдет событие $f(\sigma,\beta,\gamma)=\tau$ при условии $\alpha_1^{\sigma_1}\alpha_2^{\sigma_2}\ldots\alpha_n^{\sigma_n}=\tau$.

Разобьем разложение (13) на две части, взяв за первую часть дизъюнкцию на тех наборах $\alpha_1\alpha_2,\ldots\alpha_n$ , на которых $f(\alpha)=1$ , и за вторую – дизъюнкцию на оставшихся наборах, т.е. для которых $f(\alpha)=0$

$$f^{\tau}(\xi)=\bigvee_{f(\alpha)=1}\alpha_1^{\sigma_1}\alpha_2^{\sigma_2}\ldots\alpha_n^{\sigma_n}\cdot f^{\tau}(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n,\beta,\gamma)+\bigvee_{f(\alpha)=0}\alpha_1^{\sigma_1}\alpha_2^{\sigma_2}\ldots\alpha_n^{\sigma_n}f^{\tau}(\sigma_1\sigma_2,\ldots\sigma_n\beta,\gamma).$$

Если рассматривать функции, равные тождественно константе, то в каждом из разложений окажется не менее одного конъюнктивного члена.

Аналогично, для $h^{\tau}(\xi)$ получим:

$$h(\xi)=\sum \alpha_1^{\sigma_1}\alpha_2^{\sigma_2}\dots\alpha_n^{\sigma_n}h^{\tau}(\sigma_1\sigma_2,\dots\sigma_n,\beta,\gamma)+\sum_{f(\alpha)=0}\alpha_1^{\sigma_1}\alpha_2^{\sigma_2}\dots\alpha_n^{\sigma_n}h^{\tau}(\sigma_1,\sigma_2,\dots\sigma_n\beta\gamma).$$

При $\tau=1$

$$h(\xi)=h(\alpha)\cdot h(\alpha,\xi)+h^{0}(\alpha^{0}\xi), \qquad (I4)$$

а при $\tau=0$
$$h^{0}(\xi)=h(\alpha)h^{0}(\alpha,\xi)+h^{0}(\alpha)h^{0}(\alpha^{0}\xi). \qquad (I5)$$

Просуммировав первую часть разложения (I4) и вторую часть разложения (I5), получим $h(\bar{E})$ :

$$h(\bar{E})=\sum_{f(\alpha)=1}\alpha_1^{\sigma_1}\alpha_2^{\sigma_2}\dots\alpha_n^{\sigma_n}h(\sigma_1\sigma_2,\dots\sigma_n,\beta,\gamma)+\sum_{f(\alpha)=0}\alpha_1^{\sigma_1}\alpha_2^{\sigma_2}\dots\alpha_n^{\sigma_n}h^{0}(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n\beta\gamma) \qquad (I6)$$

Впредь произведение $\prod_i \alpha_i^{\sigma_i}$ членов в $h(\alpha)$ , являющееся замещением конъюнкций ранга $\tau$ $\&_i \alpha_i^{\sigma_i}$ в $f(\alpha)$ , будем называть термом ранга $\tau$ . Количество термов, входящих в $h(\bar{E})$, можно уменьшить по крайней мере в 2 раза, воспользовавшись следующим свойством разложения $f(\alpha)$ . Если $f(\alpha)$ принимает значение 0 на $N_0$ наборах и значение I на $N_1$ наборах,то выберем $N_{\tau}=min(N_0,N_1)$ , на котором $f(\alpha)$ принимает значение $\tau$ , и формулу (I6), используя (I4) и (I5), преобразуем к виду

$$h(\bar{E})=\sum_{f(\alpha)=\tau}\alpha_1^{\sigma_1}\alpha_2^{\sigma_2}\dots\alpha_n^{\sigma_n}h^{\tau}(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n,\beta,\gamma). \qquad (I7)$$

Ясно, что $N_{\tau}\leqslant 2^{n-1}$ . Возможно дальнейшее упрощение формулы (I7) (если конкретизировать вид функции). Для этого необходимо получить в формуле (I7) более простое выражение для $h(\alpha)\cdot h^{\tau}(\alpha,\xi)$ , нежели

$$\sum_{f(\alpha)=\tau}\alpha_1^{\sigma_1}\alpha_2^{\sigma_2}\dots\alpha_n^{\sigma_n}h^{\tau}(\sigma_1\sigma_2,\dots\sigma_n\beta\gamma).$$

В дальнейшем всюду считаем, что $min(N_0 N_1)=N_1$ . Рассмотрим два случая:

I. $f(\alpha)$ – бесповторная функция,



2. $f(\alpha)=\bigvee_i^m f_i(\alpha)$ – бесповторная функция и такая, что

$$f_i(\alpha)\cdot f_j(\alpha)=0\ (i,j=1,2,\dots m;\ i\neq j).$$

Так как $h(\alpha)\cdot h(\alpha,\xi)=\sum_i^m h_i(\alpha)\cdot h(\alpha_i^{\sigma_i}\xi)$ , то второй случай сводится к первому.

ТЕОРЕМА. Для всякой бесповторной булевой функции $f(\alpha)$ справедливо равенство

$$h(\alpha)\cdot h(\alpha,\xi)=\sum_{i=1}^{\ell}h_i(\alpha)\cdot h(\alpha_i^{\sigma_i};\xi), \qquad (I8)$$

где $\sum_i^{\ell} h_i(\alpha)$ есть сумма новых термов со своими знаками, полученных после перемножения, после того как каждый терм с инверсией в $h(\alpha)$ заменен дополнением до I, а $h(\alpha_i^{\sigma_i}\xi)=h\{f(\xi)=1|h_i(\alpha)=1\}$ есть вероятность того, что $f(\xi)=1$ при условии, что соответствующий новый терм $h_i(\alpha)=1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f(\alpha)$ использует лишь конъюнкции и инверсии, то достаточно показать справедливость теоремы для произведения различных термов, когда

а) над термами нет инверсий,

б) над термами есть инверсии.

Пусть $f(\alpha)=f_1(\alpha)\cdot f_2(\alpha)\dots f_s(\alpha)$.

Тогда $h(\alpha)=h_1(\alpha)\cdot h_2(\alpha)\dots h_s(\alpha)$ и поэтому

$$h(\alpha)\cdot h(\alpha,\xi)=h_1(\alpha)h(\alpha_1,\xi)\cdot h_2(\alpha)\cdot h(\alpha_2,\xi)\dots h_s(\alpha)h(\alpha_s,\xi).$$

Пусть $f(\alpha)\cdot\bar{f}(\alpha)$ , тогда из (I4) следует:

$$h(\alpha)\cdot h(\alpha,\xi)=1\cdot h(\xi)-h_1(\alpha)h(\alpha_1,\xi).$$

Так как случай б) может быть по индукции легко распространен на функцию $f(\alpha_1\alpha_2,\dots\alpha_n)$ вида $\overline{\overline{f_1}(\alpha)\cdot\overline{f_2}(\alpha)\dots\overline{f_i}(\alpha)\dots\overline{f_s}(\alpha)}$ с общим числом инверсии $\leqslant 2n-1$ , то теорема доказана.

Заметим, что подобный процесс образования выражений $\sum_i^{\ell}h_i(\alpha)$ близок к нахождению регулярной арифметической нормальной формы [7].

Окончательно надежность определяем по формуле:

$$h(\bar{E})=\sum_{i}^{\ell} h_i(\alpha)\left[2h(\alpha_i^{\sigma_i};\xi)-1\right]+h^{o}(\xi). \qquad (19)$$

Итак, для определения надежности схемы $F$ применяем следующую последовательность операций.

1. По $f(x)=f(y_1,y_2,\dots y_K)$ находим

$$f(\xi)=f(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_K).$$

2. $f(x)$ приводим к сумме ортогональных бесповторных функций.

3. Функции $f(x)$ и $f(\xi)$ приводим к основной форме перехода к замещению. По $f(x)$ находим $h(\alpha)$; по $f(\xi)$ находим $h(\xi)$.

4. Преобразуем $h(\alpha)$ к $\sum_{i}^{\ell} h_i(\alpha)$.

5. По формуле (19) находим $h(\bar{E})$.

ПРИМЕР

Функция $f(x)=x_1 \oplus x_2$, где знак $\oplus$ означает сложение по модулю 2, реализована на элементах "или" $(x_1,x_2)=x_1 \vee x_2$ и элементе "отрицание импликации" $(x_1,\bar{x}_2)=y=\overline{x_1 \to x_2}=x_1\bar{x}_2$. (рис. 1). Обозначим $x_1 \vee x_2=y_1(x_1,x_2)$, $x_1\cdot\bar{x}_2=y_2(x_1x_2)$

и $\bar{x}_1x_2=y_3(x_1x_2)$.

Тогда

$$f(x)=y_1(y_2,y_3)=y_1(y_2(x_1x_2),y_3(x_1x_2)).$$

В базисе "конъюнкция, дизъюнкция и отрицание" $f(x)=x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2$. По $f(x)$ найдем $f(\xi)$ со схемой на рис. 2.

$$f(\xi)=\left[(x_1\bar{x}_2 \vee \beta_2)\bar{\gamma}_2 \vee (\bar{x}_1x_2 \vee \beta_3)\bar{\gamma}_3 \vee \beta_1\right]\bar{\gamma}_1 \qquad \text{или}$$

$$f(\xi)=\alpha_1\left[\overline{\overline{\overline{\alpha_2\bar{\beta}_2}\,\bar{\gamma}_2}\,\bar{\beta}_3\bar{\gamma}_3\bar{\beta}_1}\,\bar{\gamma}_1\right]+\overline{\overline{\bar{\alpha}_1\bar{\beta}_2\bar{\gamma}_2\,\overline{\bar{\alpha}_2\bar{\beta}_3}\,\bar{\gamma}_3}\,\bar{\beta}_1}\,\bar{\gamma}_1.$$

Так как $f(x)$ есть сумма бесповторных ортогональных функций, то

$$h(\alpha)=\sum h_i(\alpha)=\alpha_1\bar{\alpha}_2+\bar{\alpha}_1\alpha_2;$$



$$h(\bar{E})=\alpha_1\bar{\alpha}_2\left[2\overline{\gamma_2\overline{\beta_3\bar{\gamma}_3}\,\bar{\beta}_1\bar{\gamma}_1}-1\right]+\bar{\alpha}_1\alpha_2\left[2\overline{\overline{\beta_2\bar{\gamma}_2}\,\gamma_3\bar{\beta}_1\bar{\gamma}_1}-1\right]+$$

$$+1-h(\xi)$$

При $\beta_2=\beta_3$ и $\gamma_2=\gamma_3$ находим

$$h(\bar{E})=(\alpha_1\bar{\alpha}_2+\bar{\alpha}_1\alpha_2)(2\overline{\gamma_1\overline{\beta_2\bar{\gamma}_2}\,\bar{\beta}_1\bar{\gamma}_1}-1)+1-$$

$$-\overline{\overline{\overline{\alpha_1\alpha_2\bar{\beta}_2}\,\bar{\gamma}_2}\,\bar{\beta}_2\bar{\gamma}_2\bar{\beta}_1}\,\bar{\gamma}_1-\overline{\bar{\alpha}_1\bar{\beta}_2\,\overline{\overline{\bar{\gamma}_2\bar{\alpha}_2}\,\bar{\beta}_2}\,\bar{\gamma}_2\bar{\beta}_1}\,\bar{\gamma}_1.$$

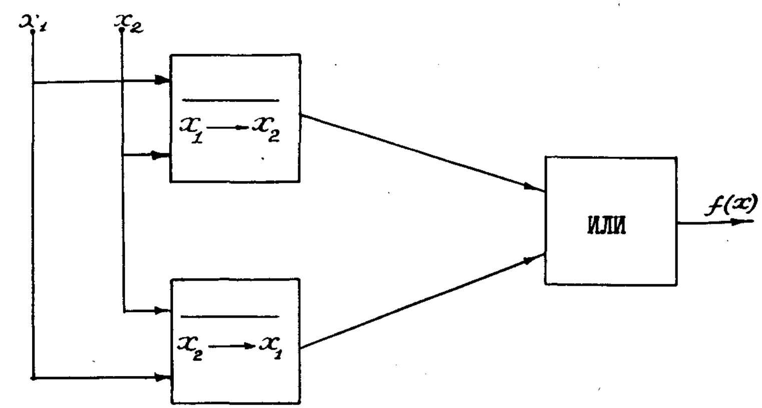


Рис. I

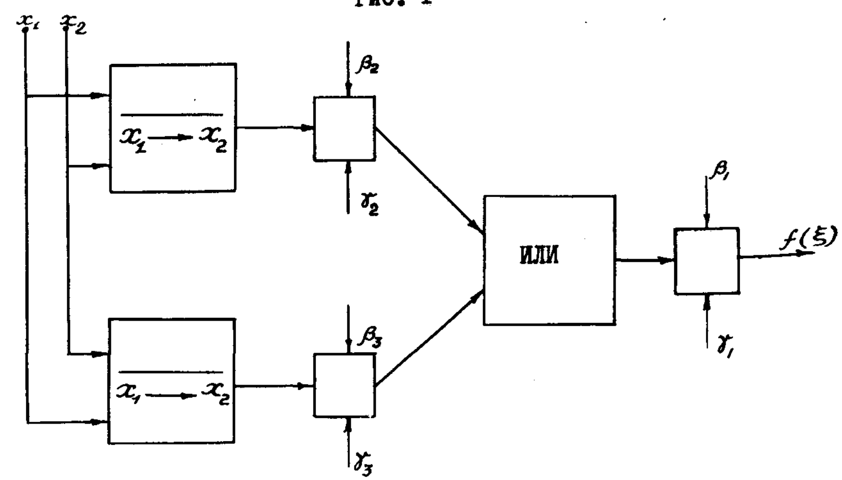


Рис. 2

# Литература

I. Цеманек Г. О логике и теории информации в последовательностных цепях. Докл. на конф. ИФАК, М., 1961.
2. Порецкий П.С. Решение общей задачи теории вероятностей при помощи математической логики. Казань, Изд-во Казанского ун-та, 1887.
3. Поспелов Д.А. О некоторых задачах вероятностной логики. Труды МЭИ, вып. 42. М., 1962.
4. Макаров С.В. Вероятностные расчеты однотактных схем. Вычислительные системы. Сб. трудов. Новосибирск, 1962, вып. 4, 29-50 (Ин-т математики Сиб. отд. АН СССР).
5. Moskowitz F. The Analysis of Redundancy Networks. Communication and Electronics,1958,N 39, p. 627 - 632.
6. Меренин Ю.В. Решение задач вероятностного расчета однотактных схем методом ортогонализации. Вычислительные системы. Сб. трудов. Новосибирск, 1962, вып. 5, 10-21 (Ин-т математики Сиб. отд. АН СССР).
7. Меренин Ю.В. Арифметические формы записи булевых выражений и их применение для расчета надежности схем. Вычислительные системы. Сб. трудов. Новосибирск, 1963, вып. 7, 13-23 (Ин-т математики Сиб. отд. АН СССР).
8. Kochen M. Extension of Moore-Shannon model for Relay Circuits. IBM Journal of Research and Development, 1959, vol.3, N 2, pp. 169 - 186.
9. Блок А.Ш. О надежности контактных схем. Автоматика и телемеханика, 1962, 23, № 12.
10. Чирков М.К. О надежности логических переключательных схем. В сб."Вычислительная техника и вопросы программирования", вып. 2, 1963, с.89-96.