

ОЦЕНКА ПРЕДЕЛЬНОГО КОЛИЧЕСТВА ИНФОРМАЦИИ,
СОДЕРЖАЩЕГОСЯ В РАСПОЗНАВАЕМОМ СИГНАЛЕ

Н.Г. Загоруйко

Усилия исследователей распознающих автоматов обычно сосредоточены на поиске такой системы параметров, характеризующих распознаваемый объект, которая при минимальных затратах (машинного времени, оборудования и т.д.) позволяла бы извлекать возможно большее количество информации об объекте, т.е. системы, обладающей максимальной информационной эффективностью [1].

Если задано некоторое исходное множество систем параметров, то, сравнив их между собой по критерию информационной эффективности, можно быть уверенным в правильности выбора той или иной системы.

Однако обычно нет уверенности в том, что исходное множество систем достаточно полное и что среди систем, не вошедших в исходное, нет такой системы параметров, которая позволяла бы извлечь еще большее количество информации.

Для оценки того, насколько полно выбранная система параметров позволяет извлечь из сигнала информацию о распознаваемом объекте, нужно знать предельное количество информации I_{max} , содержащееся в сигнале. Знать I_{max} важно еще и для правильной формулировки технических требований на разработку распознающих автоматов, и для правильной оценки характеристик различных распознающих устройств.

Так, например, прежде чем искать параметры гидроакустического эхосигнала, по которым можно было бы надежно и экономично отличать плывущего кита от неподвижной подводной скалы, нужно узнать, содержится ли в эхосигнале вообще информация, позволяющая сделать выбор между этими двумя гипотезами. Иногда ответ на этот вопрос ищется "бионическим" путём: если человек, рассматривая осциллограмму эхосигнала или прослушивая его, может отличить одно от другого, то, следовательно, информация о распознаваемых объектах в сигнале содержится. Правда, ориентировочная оценка J_{max} , полученная таким экономичным путем, может быть либо завышенной, если человек подсознательно использует при распознавании дополнительные источники информации, либо заниженной, если информация об объектах в сигнале содержится, но закодирована в форме, трудно воспринимаемой при непосредственном наблюдении.

Объективную оценку характеристик распознающих устройств также можно получить, лишь зная величину J_{max} , содержащуюся в физическом сигнале о распознаваемых объектах. Так, может оказаться, что 50%-ная надёжность распознавания речевых элементов типа фонем по их физическим характеристикам близка к предельной и от аппаратуры, рассчитанной на распознавание отдельных фонем в слитной речи, лучших характеристик нельзя и требовать. Может быть человек, воспринимая устную речь, ориентируется на распознавание не фонем (во всяком случае, не только фонем), а других элементов речи, распознавая отдельные фонемы с ещё меньшей надёжностью, чем аппаратура.

Метод объективной оценки J_{max} может быть основан на следующем. Пусть в алфавите распознаваемых объектов содержится " N " элементов. Вначале следует набрать достаточно полную статистику сигналов, соответствующих всем элементам алфавита, (например, в виде записей тех участков речевого сигнала, которые соответствуют отдельным фонемам). Если каждую реализацию сигнала представить в виде точки в n -мерном пространстве, то каждому элементу алфавита в этом пространстве будет соответствовать некоторое множество точек. Пространственное распределение плотностей этих точек и будет служить основой для оценки J_{max} .

Так как практически спектры реальных сигналов бесконечны, а n не может быть взято равным ∞ , отображение сигнала в n -мерном пространстве, в общем случае, приведет к определенным искажениям сигнала. Важно отображать сигнал с такой точно-

стью, чтобы ошибка Δ не превышала уровня шумов аппаратуры, с помощью которой сигнал был измерен и предварительно записан.

Если на участке (a, b) функция $f(x)$ восстанавливается по n -мерной точке в функцию $\varphi(x)$ и мерой близости этих функций считать их квадратичное отклонение

$$\varepsilon = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx,$$

то в качестве осей n -мерного пространства можно рассматривать коэффициенты Фурье ортогональной системы полиномов, вплоть до n -го члена, при котором квадратичное отклонение становится $\varepsilon < \Delta$. При этом исходная функция $f(x)$ представляется в виде конечной суммы Фурье $\sum_{j=1}^n C_j \cdot \omega_j(x)$,

где $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x)$ - ортонормированная система функций на участке (a, b) , а C_j - коэффициенты Фурье, найденные из соотношения

$$C_j = \int_a^b f(x) \cdot \omega_j(x) \cdot dx.$$

В зависимости от вида функции $f(x)$ в качестве ортогональной системы могут выбираться полиномы Лежандра, Якоби, Эрмита, Лагерра, Фурье, Чебышева и т.д. [2].

Если есть основание считать коэффициенты Фурье (C_j) статистически независимыми, то проекцию многомерной плотности распределения значений функций $f(x)$ на оси C_j можно рассматривать в качестве распределений плотности вероятности независимых параметров.

Количество информации, заключенное в каждом независимом параметре легко находится [1] в виде

$$J_x = H_0 - H_x,$$

где H_0 - исходная энтропия, зависящая только от априорных вероятностей (q_k) появления распознаваемых объектов

$$H_0 = - \sum_{k=1}^N q_k \cdot \log q_k,$$

а H_x - энтропия, оставшаяся после того, как значение исследуемого параметра (x) стало известным.

Если параметр может принимать m различных значений ($1 \leq i < m$), то

$$H_x = \sum_{i=1}^m [H_i \cdot \sum_{k=1}^N p_{k/i}],$$

где $\sum_{k=1}^N P_{k/i}$ - суммарная по всем N плотность вероятности параметра x на участке $x_{i-1} < x < x_i$,

$$H_i = \frac{1}{\sum_{k=1}^N P_{k/i}} \left[\sum_{k=1}^N P_{k/i} \log \sum_{k=1}^N P_{k/i} - \sum_{k=1}^N P_{k/i} \log P_{k/i} \right].$$

Суммарная информация, извлекаемая с помощью системы n независимых параметров, равна сумме количеств информации, извлекаемых каждым параметром в отдельности

$$J_{\Sigma} = J_1 + J_2 + \dots + J_n.$$

Очевидно, что J_{Σ} и есть искомое значение J_{max} , содержащееся в сигнале о распознаваемых объектах.

Если коэффициенты Фурье C_j статистически зависимы, то количество информации, которое можно извлечь из пространства n измерений, можно определить анализируя энтропию в каждой из n^n точек n -мерного пространства [3].

Если "идеальный наблюдатель" [3] принимает решение о принадлежности реализации к тому или иному объекту только в том случае, если априорная вероятность одной гипотезы равна 1, а остальных - 0, (т.е. если ставится задача абсолютного, а не вероятностного распознавания), то J_{max} должно быть $\geq |H_0|$. При вероятностном распознавании обычно задается некоторое пороговое значение апостериорной вероятности:

$P_k = \alpha$ ($0 < \alpha < 1$), при достижении которого принимается решение о " K " - той гипотезе. Если при этом все остальные ($N-1$) конкурирующих гипотез равновероятны

$$(P_{i=1..N} = \frac{1-P_k}{N-1}),$$

то количество информации, J_{mp} , которое необходимо извлекать из сигнала при заданных условиях

$$J_{mp} = H_0 - (\alpha \cdot \log \alpha + (1-\alpha) \cdot \log \frac{1-\alpha}{N-1}).$$

Если априорные вероятности появления N распознаваемых объектов равны между собой, то значения J_{mp} могут быть найдены по заданной величине α с помощью таблицы (см. приложение). В том случае, если $J_{max} \geq J_{mp}$, можно переходить к поиску наиболее эффективной системы параметров исследуемого сигнала.

Если же $J_{max} < J_{mp}$, нужно привлекать другие ис-

точники информации о распознаваемых объектах либо пересматривать состав (алфавит) объектов (использовать другой вид сигнала-посылки при эхолокации, анализировать динамику изменения некоторых параметров сигнала во времени, от распознавания фонов переходить к распознаванию слогов, слов и т.д.).

Л и т е р а т у р а

1. Загоруйко Н.Г. Методика оценки информационной эффективности независимых параметров речевого сигнала. "Вычислительные системы", выпуск 10, Новосибирск, 1964, ИМ СО АН СССР.
2. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби) под ред. Л.А.Люстерника и А.Р.Янпольского, ФМ., М., 1961.
3. Файнштейн А. Основы теории информации. М., ИЛ., 1960.

П Р И Л О Ж Е Н И Е
Количество информации ($I_{\text{ин}}$), необходимое для распознавания N объектов

$N \backslash \alpha$	0.5	0.51	0.52	0.53	0.54	0.55	0.56	0.57	0.58	0.59
2	0	0	0.001	0.003	0.005	0.007	0.01	0.014	0.019	0.023
3	0.085	0.095	0.106	0.118	0.13	0.142	0.155	0.169	0.184	0.198
4	0.208	0.224	0.24	0.258	0.276	0.294	0.313	0.333	0.353	0.374
5	0.322	0.342	0.363	0.385	0.407	0.429	0.452	0.476	0.5	0.525
6	0.424	0.448	0.472	0.496	0.521	0.547	0.574	0.601	0.628	0.656
7	0.515	0.541	0.568	0.595	0.623	0.651	0.68	0.71	0.74	0.771
8	0.596	0.625	0.654	0.683	0.713	0.744	0.775	0.807	0.839	0.872
9	0.67	0.7	0.731	0.763	0.795	0.827	0.86	0.894	0.928	0.963
10	0.737	0.769	0.802	0.835	0.868	0.903	0.938	0.973	1.009	1.046
11	0.798	0.832	0.866	0.901	0.936	0.972	1.008	1.045	1.083	1.121
12	0.855	0.89	0.926	0.962	0.998	1.035	1.073	1.112	1.151	1.19
13	0.908	0.944	0.981	1.018	1.056	1.094	1.133	1.173	1.213	1.254
14	0.957	0.994	1.032	1.071	1.11	1.149	1.19	1.23	1.272	1.314
15	1.003	1.042	1.081	1.12	1.16	1.201	1.242	1.284	1.326	1.369
16	1.047	1.086	1.126	1.166	1.207	1.249	1.291	1.334	1.378	1.422
17	1.087	1.128	1.169	1.21	1.252	1.295	1.338	1.382	1.426	1.471
18	1.126	1.167	1.209	1.251	1.294	1.338	1.382	1.427	1.472	1.518
19	1.163	1.205	1.248	1.291	1.334	1.379	1.424	1.469	1.515	1.562
20	1.198	1.241	1.284	1.328	1.373	1.418	1.463	1.51	1.556	1.604
21	1.231	1.275	1.319	1.364	1.409	1.455	1.501	1.548	1.596	1.644
22	1.263	1.307	1.352	1.398	1.444	1.49	1.537	1.585	1.633	1.682
23	1.294	1.339	1.384	1.43	1.477	1.524	1.572	1.62	1.669	1.719
24	1.323	1.369	1.415	1.461	1.509	1.557	1.605	1.654	1.704	1.754
25	1.351	1.398	1.444	1.492	1.539	1.588	1.637	1.687	1.737	1.788
26	1.379	1.425	1.473	1.52	1.569	1.618	1.668	1.718	1.769	1.82
27	1.405	1.452	1.5	1.548	1.597	1.647	1.697	1.748	1.799	1.851
28	1.43	1.478	1.526	1.575	1.625	1.675	1.726	1.777	1.829	1.881
29	1.454	1.503	1.552	1.601	1.651	1.702	1.753	1.805	1.857	1.91
30	1.478	1.527	1.576	1.626	1.677	1.728	1.78	1.832	1.885	1.939
31	1.501	1.55	1.6	1.651	1.702	1.753	1.806	1.858	1.912	1.966
32	1.523	1.573	1.623	1.674	1.726	1.778	1.831	1.884	1.938	1.992
33	1.544	1.595	1.646	1.697	1.749	1.802	1.855	1.909	1.963	2.018
34	1.565	1.616	1.667	1.719	1.772	1.825	1.878	1.933	1.987	2.043
35	1.586	1.637	1.688	1.741	1.794	1.847	1.901	1.956	2.011	2.067
36	1.605	1.657	1.709	1.762	1.815	1.869	1.923	1.979	2.034	2.09
37	1.624	1.676	1.729	1.782	1.836	1.89	1.945	2.001	2.057	2.113
38	1.643	1.696	1.749	1.802	1.856	1.911	1.966	2.022	2.079	2.136
39	1.661	1.714	1.768	1.821	1.876	1.931	1.987	2.043	2.1	2.157
40	1.679	1.732	1.786	1.84	1.895	1.951	2.007	2.063	2.121	2.178
41	1.697	1.75	1.804	1.859	1.914	1.97	2.026	2.083	2.141	2.199
42	1.714	1.767	1.822	1.877	1.932	1.989	2.045	2.103	2.161	2.219
43	1.73	1.784	1.839	1.894	1.95	2.007	2.064	2.122	2.18	2.239
44	1.746	1.801	1.856	1.912	1.968	2.025	2.082	2.14	2.199	2.258
45	1.762	1.817	1.872	1.929	1.985	2.042	2.1	2.158	2.217	2.277
46	1.778	1.833	1.889	1.945	2.002	2.059	2.118	2.176	2.236	2.295
47	1.793	1.848	1.904	1.961	2.018	2.076	2.135	2.194	2.253	2.313
48	1.808	1.864	1.92	1.977	2.034	2.093	2.151	2.211	2.271	2.331
49	1.822	1.878	1.935	1.992	2.05	2.109	2.168	2.227	2.288	2.348
50	1.837	1.893	1.95	2.008	2.066	2.124	2.184	2.244	2.304	2.365

$N \backslash \alpha$	0.6	0.61	0.62	0.63	0.64	0.65	0.66	0.67	0.68	0.69
2	0.029	0.035	0.042	0.049	0.057	0.066	0.75	0.085	0.097	0.107
3	0.214	0.23	0.247	0.264	0.282	0.301	0.32	0.34	0.361	0.382
4	0.395	0.417	0.44	0.463	0.487	0.511	0.536	0.562	0.588	0.615
5	0.551	0.577	0.604	0.631	0.659	0.688	0.717	0.747	0.778	0.809
6	0.685	0.715	0.745	0.775	0.806	0.838	0.871	0.904	0.938	0.972
7	0.802	0.834	0.867	0.9	0.934	0.968	1.004	1.039	1.076	1.113
8	0.906	0.94	0.975	1.011	1.047	1.083	1.121	1.159	1.197	1.237
9	0.999	1.035	1.072	1.109	1.147	1.186	1.225	1.265	1.306	1.347
10	1.083	1.121	1.159	1.198	1.238	1.278	1.319	1.361	1.403	1.446
11	1.16	1.199	1.239	1.28	1.321	1.363	1.405	1.448	1.492	1.536
12	1.23	1.271	1.312	1.354	1.397	1.44	1.484	1.528	1.574	1.619
13	1.296	1.338	1.38	1.423	1.467	1.512	1.557	1.602	1.649	1.696
14	1.356	1.399	1.443	1.488	1.533	1.578	1.624	1.671	1.719	1.767
15	1.413	1.457	1.502	1.547	1.594	1.64	1.688	1.736	1.784	1.833
16	1.466	1.512	1.557	1.604	1.651	1.699	1.747	1.796	1.845	1.896
17	1.517	1.563	1.609	1.657	1.705	1.753	1.803	1.853	1.903	1.954
18	1.564	1.611	1.659	1.707	1.756	1.805	1.855	1.906	1.958	2.01
19	1.609	1.657	1.705	1.754	1.804	1.854	1.905	1.957	2.009	2.062
20	1.652	1.7	1.75	1.8	1.85	1.901	1.953	2.005	2.058	2.112
21	1.693	1.742	1.792	1.843	1.894	1.946	1.998	2.051	2.105	2.159
22	1.732	1.782	1.832	1.884	1.936	1.988	2.041	2.095	2.15	2.205
23	1.769	1.82	1.871	1.923	1.975	2.029	2.083	2.137	2.192	2.248
24	1.805	1.856	1.908	1.961	2.014	2.068	2.122	2.177	2.233	2.289
25	1.839	1.891	1.944	1.997	2.051	2.105	2.16	2.216	2.272	2.329
26	1.872	1.925	1.978	2.032	2.086	2.141	2.197	2.253	2.31	2.368
27	1.904	1.957	2.011	2.065	2.12	2.176	2.232	2.289	2.346	2.405
28	1.934	1.988	2.042	2.097	2.153	2.209	2.266	2.323	2.381	2.44
29	1.964	2.018	2.073	2.129	2.185	2.241	2.299	2.357	2.415	2.475
30	1.993	2.047	2.103	2.159	2.215	2.273	2.33	2.389	2.448	2.508
31	2.02	2.076	2.132	2.188	2.245	2.303	2.361	2.42	2.48	2.54
32	2.047	2.103	2.159	2.216	2.274	2.332	2.391	2.45	2.51	2.571
33	2.073	2.13	2.186	2.244	2.302	2.36	2.42	2.48	2.54	2.601
34	2.099	2.155	2.213	2.27	2.329	2.388	2.448	2.508	2.569	2.631
35	2.123	2.18	2.238	2.296	2.355	2.415	2.475	2.535	2.597	2.659
36	2.147	2.205	2.263	2.321	2.381	2.441	2.501	2.562	2.624	2.687
37	2.171	2.228	2.287	2.346	2.406	2.466	2.527	2.588	2.651	2.714
38	2.193	2.251	2.31	2.37	2.43	2.491	2.552	2.614	2.677	2.74
39	2.215	2.274	2.333	2.393	2.453	2.515	2.576	2.639	2.702	2.765
40	2.237	2.296	2.355	2.416	2.477	2.538	2.6	2.663	2.726	2.79
41	2.258	2.317	2.377	2.438	2.499	2.561	2.623	2.686	2.75	2.815
42	2.278	2.338	2.398	2.459	2.521	2.583	2.646	2.709	2.774	2.838
43	2.298	2.358	2.419	2.48	2.542	2.604	2.668	2.731	2.796	2.861
44	2.318	2.378	2.439	2.501	2.563	2.626	2.69	2.754	2.819	2.884
45	2.337	2.398	2.459	2.521	2.584	2.647	2.711	2.775	2.84	2.906
46	2.356	2.417	2.479	2.541	2.604	2.667	2.732	2.796	2.862	2.928
47	2.374	2.436	2.498	2.56	2.623	2.687	2.752	2.817	2.883	2.949
48	2.392	2.454	2.516	2.579	2.643	2.707	2.772	2.837	2.903	2.97
49	2.41	2.472	2.534	2.598	2.661	2.726	2.791	2.857	2.923	2.99
50	2.427	2.489	2.552	2.616	2.68	2.745	2.81	2.876	2.943	3.01

N	0.7	0.71	0.72	0.73	0.74	0.75	0.76	0.77	0.78	0.79
2	0.119	0.131	0.145	0.159	0.173	0.189	0.205	0.222	0.24	0.259
3	0.404	0.426	0.45	0.473	0.498	0.524	0.55	0.577	0.605	0.633
4	0.643	0.672	0.701	0.731	0.761	0.792	0.825	0.857	0.891	0.926
5	0.841	0.873	0.906	0.94	0.975	1.011	1.047	1.084	1.122	1.16
6	1.007	1.043	1.079	1.117	1.155	1.193	1.233	1.273	1.314	1.356
7	1.151	1.189	1.228	1.268	1.309	1.35	1.392	1.435	1.478	1.523
8	1.277	1.317	1.358	1.401	1.443	1.487	1.531	1.576	1.622	1.669
9	1.389	1.431	1.474	1.518	1.563	1.607	1.655	1.702	1.75	1.798
10	1.49	1.534	1.579	1.625	1.671	1.718	1.766	1.815	1.864	1.915
11	1.582	1.627	1.674	1.721	1.769	1.818	1.867	1.917	1.968	2.02
12	1.666	1.713	1.761	1.809	1.859	1.909	1.96	2.011	2.064	2.117
13	1.744	1.792	1.841	1.891	1.942	1.993	2.045	2.098	2.152	2.206
14	1.816	1.866	1.916	1.967	2.018	2.071	2.124	2.178	2.233	2.289
15	1.883	1.934	1.985	2.037	2.09	2.144	2.198	2.253	2.309	2.366
16	1.947	1.998	2.051	2.104	2.157	2.212	2.267	2.323	2.38	2.438
17	2.006	2.059	2.112	2.166	2.221	2.276	2.332	2.389	2.447	2.506
18	2.062	2.116	2.17	2.225	2.28	2.337	2.394	2.452	2.511	2.57
19	2.116	2.17	2.225	2.281	2.337	2.394	2.452	2.511	2.57	2.631
20	2.166	2.221	2.277	2.334	2.391	2.449	2.507	2.567	2.627	2.688
21	2.214	2.27	2.327	2.384	2.442	2.501	2.56	2.62	2.681	2.743
22	2.26	2.317	2.374	2.432	2.491	2.55	2.61	2.671	2.733	2.796
23	2.304	2.362	2.419	2.478	2.537	2.597	2.658	2.72	2.782	2.846
24	2.347	2.404	2.463	2.522	2.582	2.643	2.704	2.767	2.83	2.894
25	2.387	2.445	2.505	2.564	2.625	2.686	2.748	2.811	2.875	2.94
26	2.426	2.485	2.545	2.605	2.666	2.728	2.791	2.854	2.919	2.984
27	2.463	2.523	2.583	2.644	2.706	2.768	2.832	2.896	2.961	3.026
28	2.5	2.56	2.621	2.682	2.744	2.807	2.871	2.936	3.001	3.067
29	2.534	2.595	2.656	2.719	2.781	2.845	2.909	2.974	3.04	3.107
30	2.568	2.629	2.691	2.754	2.817	2.881	2.946	3.012	3.078	3.145
31	2.601	2.662	2.725	2.788	2.852	2.916	2.982	3.048	3.115	3.182
32	2.632	2.695	2.757	2.821	2.885	2.95	3.016	3.083	3.15	3.218
33	2.663	2.726	2.789	2.853	2.918	2.983	3.049	3.116	3.184	3.253
34	2.693	2.756	2.82	2.884	2.949	3.015	3.082	3.149	3.218	3.287
35	2.722	2.785	2.849	2.914	2.98	3.046	3.113	3.181	3.25	3.319
36	2.75	2.814	2.878	2.944	3.01	3.076	3.144	3.212	3.281	3.351
37	2.777	2.841	2.906	2.972	3.039	3.106	3.174	3.242	3.312	3.382
38	2.804	2.868	2.934	3.0	3.067	3.134	3.203	3.272	3.342	3.412
39	2.83	2.895	2.961	3.027	3.094	3.162	3.231	3.3	3.371	3.442
40	2.855	2.92	2.987	3.053	3.121	3.189	3.258	3.328	3.399	3.471
41	2.88	2.945	3.012	3.079	3.147	3.216	3.285	3.355	3.427	3.498
42	2.904	2.97	3.037	3.104	3.173	3.242	3.311	3.382	3.453	3.526
43	2.927	2.994	3.061	3.128	3.198	3.267	3.337	3.408	3.48	3.552
44	2.95	3.017	3.085	3.153	3.222	3.292	3.362	3.433	3.505	3.578
45	2.973	3.04	3.108	3.176	3.246	3.316	3.387	3.458	3.531	3.604
46	2.995	3.062	3.13	3.199	3.269	3.339	3.41	3.482	3.555	3.629
47	3.016	3.084	3.153	3.222	3.292	3.362	3.434	3.506	3.579	3.653
48	3.037	3.105	3.174	3.244	3.314	3.385	3.457	3.529	3.603	3.677
49	3.058	3.126	3.195	3.265	3.336	3.407	3.479	3.552	3.626	3.7
50	3.078	3.147	3.216	3.286	3.357	3.429	3.501	3.574	3.648	3.723

N	0.8	0.81	0.82	0.83	0.84	0.85	0.86	0.87	0.88	0.89
2	0.278	0.299	0.32	0.342	0.366	0.39	0.416	0.443	0.471	0.5
3	0.663	0.693	0.725	0.757	0.791	0.825	0.861	0.898	0.936	0.975
4	0.961	0.997	1.035	1.073	1.112	1.152	1.194	1.237	1.28	1.326
5	1.2	1.24	1.282	1.324	1.368	1.412	1.458	1.504	1.553	1.602
6	1.399	1.442	1.487	1.533	1.579	1.627	1.676	1.726	1.777	1.83
7	1.568	1.615	1.662	1.71	1.759	1.81	1.861	1.914	1.968	2.023
8	1.717	1.785	1.815	1.865	1.917	1.969	2.023	2.078	2.134	2.191
9	1.848	1.898	1.95	2.002	2.056	2.11	2.166	2.222	2.281	2.34
10	1.966	2.018	2.071	2.125	2.18	2.237	2.294	2.352	2.412	2.473
11	2.073	2.127	2.181	2.237	2.294	2.351	2.41	2.47	2.531	2.594
12	2.171	2.226	2.282	2.339	2.397	2.456	2.516	2.578	2.64	2.705
13	2.262	2.318	2.375	2.433	2.493	2.552	2.614	2.677	2.741	2.806
14	2.345	2.403	2.461	2.521	2.581	2.642	2.705	2.769	2.834	2.9
15	2.423	2.482	2.541	2.602	2.663	2.726	2.79	2.854	2.921	2.988
16	2.497	2.556	2.617	2.678	2.741	2.804	2.869	2.935	3.002	3.07
17	2.566	2.626	2.687	2.75	2.813	2.878	2.943	3.01	3.078	3.148
18	2.631	2.692	2.754	2.817	2.882	2.947	3.013	3.081	3.15	3.22
19	2.692	2.754	2.817	2.881	2.946	3.013	3.08	3.148	3.218	3.289
20	2.75	2.813	2.877	2.942	3.008	3.075	3.143	3.212	3.283	3.355
21	2.806	2.87	2.934	3.0	3.066	3.134	3.203	3.273	3.344	3.417
22	2.859	2.923	2.989	3.055	3.122	3.191	3.26	3.331	3.403	3.476
23	2.91	2.975	3.041	3.108	3.176	3.245	3.315	3.386	3.459	3.533
24	2.958	3.024	3.091	3.158	3.227	3.297	3.367	3.439	3.513	3.587
25	3.005	3.071	3.138	3.207	3.276	3.346	3.418	3.49	3.564	3.64
26	3.05	3.117	3.184	3.253	3.323	3.394	3.466	3.539	3.614	3.69
27	3.093	3.16	3.229	3.298	3.369	3.44	3.513	3.586	3.661	3.738
28	3.134	3.202	3.271	3.341	3.412	3.484	3.557	3.632	3.707	3.784
29	3.175	3.243	3.313	3.383	3.454	3.527	3.604	3.76	3.752	3.829
30	3.213	3.282	3.352	3.423	3.495	3.568	3.643	3.718	3.795	3.873
31	3.251	3.32	3.391	3.462	3.535	3.608	3.683	3.759	3.836	3.915
32	3.287	3.357	3.428	3.5	3.573	3.647	3.722	3.799	3.876	3.955
33	3.322	3.393	3.464	3.537	3.61	3.685	3.76	3.837	3.915	3.994
34	3.357	3.428	3.499	3.572	3.646	3.721	3.797	3.874	3.953	4.033
35	3.39	3.461	3.533	3.607	3.681	3.756	3.833	3.91	3.989	4.07
36	3.422	3.494	3.567	3.64	3.715	3.791	3.868	3.946	4.025	4.106
37	3.454	3.526	3.599	3.673	3.748	3.824	3.901	3.98	4.06	4.141
38	3.484	3.557	3.63	3.705	3.78	3.857	3.934	4.013	4.093	4.175
39	3.514	3.587	3.661	3.736	3.811	3.888	3.966	4.046	4.126	4.208
40	3.543	3.616	3.69	3.766	3.842	3.919	3.998	4.077	4.158	4.241
41	3.571	3.645	3.72	3.795	3.872	3.949	4.028	4.108	4.19	4.272
42	3.599	3.673	3.748	3.824	3.901	3.979	4.058	4.138	4.22	4.303
43	3.626	3.7	3.776	3.852	3.929	4.008	4.087	4.168	4.25	4.333
44	3.652	3.727	3.803	3.879	3.957	4.036	4.116	4.197	4.279	4.363
45	3.678	3.753	3.829	3.906	3.984	4.063	4.143	4.225	4.307	4.391
46	3.703	3.779	3.855	3.932	4.011	4.09	4.17	4.252	4.335	4.42
47	3.728	3.804	3.88	3.958	4.037	4.116	4.197	4.279	4.362	4.447
48	3.752	3.828	3.905	3.983	4.062	4.142	4.223	4.305	4.389	4.474
49	3.776	3.852	3.929	4.008	4.087	4.167	4.249	4.331	4.415	4.5
50	3.799	3.876	3.953	4.032	4.111	4.192	4.274	4.357	4.441	4.526

N ^d	0.90	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	1.0
2	0.531	0.564	0.598	0.634	0.673	0.714	0.758	0.806	0.859	0.919	1.0
3	1.016	1.058	1.103	1.149	1.198	1.249	1.303	1.361	1.424	1.494	1.585
4	1.373	1.421	1.471	1.523	1.577	1.634	1.694	1.758	1.827	1.903	2.0
5	1.653	1.705	1.76	1.816	1.874	1.936	2.0	2.068	2.14	2.221	2.322
6	1.883	1.94	1.997	2.057	2.118	2.182	2.25	2.321	2.397	2.481	2.585
7	2.079	2.138	2.198	2.26	2.325	2.392	2.462	2.535	2.614	2.701	2.807
8	2.25	2.311	2.373	2.438	2.504	2.573	2.645	2.721	2.802	2.891	3.0
9	2.401	2.463	2.528	2.594	2.662	2.734	2.808	2.886	2.968	3.059	3.17
10	2.536	2.6	2.666	2.734	2.804	2.877	2.953	3.032	3.117	3.209	3.322
11	2.658	2.724	2.791	2.861	2.933	3.007	3.084	3.165	3.252	3.345	3.459
12	2.77	2.837	2.906	2.977	3.05	3.126	3.204	3.287	3.374	3.45	3.585
13	2.873	2.941	3.011	3.084	3.158	3.235	3.315	3.398	3.487	3.584	3.7
14	2.968	3.038	3.109	3.182	3.258	3.336	3.417	3.502	3.592	3.69	3.807
15	3.057	3.128	3.2	3.274	3.351	3.43	3.512	3.598	3.689	3.788	3.907
16	3.14	3.212	3.285	3.361	3.438	3.518	3.601	3.688	3.78	3.88	4.0
17	3.218	3.291	3.365	3.442	3.52	3.601	3.685	3.773	3.866	3.967	4.087
18	3.292	3.366	3.441	3.518	3.597	3.679	3.764	3.853	3.947	4.048	4.17
19	3.362	3.436	3.512	3.59	3.67	3.753	3.839	3.928	4.023	4.125	4.248
20	3.428	3.503	3.58	3.659	3.74	3.823	3.91	4.0	4.096	4.199	4.322
21	3.491	3.567	3.644	3.724	3.806	3.89	3.977	4.068	4.164	4.268	4.392
22	3.551	3.628	3.706	3.786	3.868	3.953	4.041	4.133	4.23	4.335	4.459
23	3.609	3.686	3.765	3.845	3.929	4.014	4.103	4.195	4.293	4.398	4.524
24	3.664	3.741	3.821	3.902	3.986	4.072	4.162	4.255	4.353	4.459	4.585
25	3.716	3.795	3.875	3.957	4.041	4.128	4.218	4.312	4.411	4.517	4.644
26	3.767	3.846	3.927	4.009	4.094	4.182	4.272	4.367	4.466	4.573	4.7
27	3.816	3.895	3.977	4.06	4.145	4.233	4.325	4.419	4.519	4.627	4.755
28	3.863	3.943	4.025	4.109	4.195	4.283	4.375	4.47	4.571	4.679	4.807
29	3.908	3.989	4.071	4.156	4.242	4.331	4.423	4.519	4.62	4.729	4.858
30	3.952	4.033	4.116	4.201	4.288	4.378	4.47	4.567	4.668	4.778	4.907
31	3.995	4.076	4.159	4.245	4.322	4.422	4.516	4.613	4.715	4.824	4.954
32	4.036	4.118	4.201	4.287	4.375	4.466	4.56	4.657	4.759	4.87	5.0
33	4.075	4.158	4.242	4.328	4.417	4.508	4.602	4.7	4.803	4.914	5.044
34	4.114	4.197	4.282	4.368	4.457	4.549	4.643	4.742	4.845	4.956	5.087
35	4.152	4.235	4.32	4.407	4.497	4.589	4.683	4.782	4.886	4.998	5.129
36	4.188	4.272	4.357	4.445	4.535	4.627	4.722	4.822	4.926	5.038	5.17
37	4.223	4.308	4.394	4.482	4.572	4.665	4.76	4.86	4.965	5.077	5.209
38	4.258	4.343	4.429	4.517	4.608	4.701	4.797	4.897	5.002	5.115	5.248
39	4.292	4.377	4.463	4.552	4.643	4.737	4.833	4.934	5.039	5.152	5.285
40	4.324	4.41	4.497	4.586	4.677	4.771	4.866	4.969	5.075	5.188	5.322
41	4.356	4.442	4.53	4.619	4.711	4.805	4.902	5.004	5.11	5.224	5.358
42	4.388	4.474	4.562	4.651	4.743	4.838	4.936	5.037	5.144	5.258	5.392
43	4.418	4.504	4.593	4.683	4.775	4.87	4.968	5.07	5.177	5.292	5.426
44	4.448	4.535	4.623	4.714	4.806	4.902	5.0	5.102	5.214	5.324	5.459
45	4.477	4.564	4.653	4.744	4.837	4.932	5.031	5.134	5.241	5.356	5.492
46	4.505	4.593	4.682	4.773	4.867	4.963	5.062	5.164	5.272	5.388	5.524
47	4.533	4.621	4.711	4.802	4.896	4.992	5.091	5.194	5.303	5.419	5.555
48	4.561	4.649	4.738	4.83	4.924	5.021	5.12	5.224	5.332	5.449	5.585
49	4.587	4.676	4.766	4.858	4.952	5.049	5.149	5.253	5.362	5.478	5.615
50	4.613	4.702	4.793	4.885	4.98	5.077	5.177	5.281	5.39	5.507	5.644