

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПАРАМЕТРОНА

А.Н. Сычев

Рассматривается схема пленочного параметрона, для которой в предположениях работы [1] дается более строгий, чем в [1], вывод системы дифференциальных уравнений. Возможность возбуждения параметрона малым сигналом связывается с неустойчивостью положений равновесия этой системы. Для них в пространстве параметров системы численно строятся области неустойчивости. Это дает более полную картину условий возбуждения при меньшем объеме вычислений, чем, например, в [5], где с той же целью анализировались отдельные решения системы, вычисленные на больших интервалах времени.

§ 1. Уравнения параметрона

В схеме, приведенной на рис. 1, однодоменная пленка лежит в плоскости (x, y) , ось y проходит вдоль оси легкого намагничивания пленки, постоянное внешнее поле и поле подкачки действуют вдоль оси y , поле, создаваемое контуром, действует вдоль оси x .

Состояние пленки характеризуется вектором намагниченности \vec{M} , динамика которого описывается уравнением Ландау-Лившица:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{H_0 \gamma}{1 + \alpha^2} \left\{ [\vec{M} \vec{H}] - \frac{\alpha}{M} [\vec{M} [\vec{M} \vec{H}]] \right\}, \quad (1)$$

где $M = |\vec{M}|$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-9}$ гн·см⁻¹, $\gamma = 1,76 \cdot 10^{15}$ см⁻²·в⁻¹·сек⁻², $\alpha > 0$ - постоянная затухания, \vec{H} - полное поле в пленке, включающее внешнее и внутреннее поля ($\vec{H} = \vec{H}_e + \vec{H}_i$). Непосредственно из уравнения (1) следует, что

$$M(t) = M(0) = \text{const.} \quad (2)$$

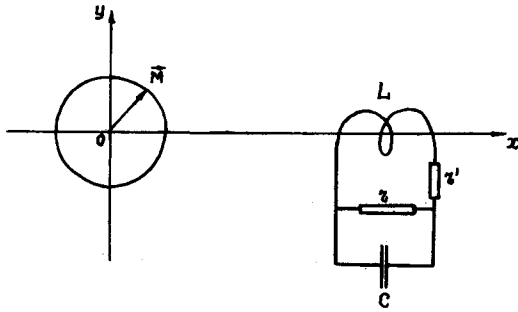


Рис. 1. Схема пленочного параметрона.

Состояние контура характеризуется напряжением U на емкости C и током i через индуктивность L . В обмотке L наводится э.д.с.

$$e = -\frac{d\Phi_x}{dt},$$

где Φ_x - полный магнитный поток через обмотку L .

Уравнения контура имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} C \frac{dU}{dt} &= -\frac{1}{z}U + i, \\ \frac{d\Phi_x}{dt} &= -U - z'i. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Принимается (см. [1]), что

$$|\vec{H}| \ll |\vec{M}|, \quad M_z^2 \ll M_x^2 + M_y^2 \quad (4)$$

и

$$\left. \begin{aligned} H_z &= -M_z, \quad H_{xe} = ip, \quad H_{ye} = H_0 + H_1 \sin 2\omega t, \\ H_{xi} &= -H_k \sin \varphi, \quad H_{yi} = 0, \quad \Phi_x = \mu_0 (S_{пл} M_x + S_{обн} H_{xe}), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

здесь H_0, H_1, H_k - постоянные;

p - коэффициент, определяемый конструкцией обмотки;

2ω - частота поля подкачки;

φ - угол между проекцией \vec{M} на плоскость (x, y) и ось y ;

$S_{пл}$ - площадь сечения пленки плоскостью (y, z) ;

$S_{обн}$ - площадь, охватываемая витком обмотки L .

Подставляя выражения для M_x, Φ_x, i из (5) в (1), (2) и (3) и переходя к безразмерным величинам

$$\left. \begin{aligned} \bar{t} &= \omega t, \quad m_x = \frac{M_x}{M}, \quad m_y = \frac{M_y}{M}, \quad m_z = \frac{M_z}{M}, \\ u &= \frac{U \cdot p}{z H_k}, \quad h_{xe} = \frac{H_{xe}}{H_k}, \quad h_0 = \frac{H_0}{H_k}, \quad h_1 = \frac{H_1}{H_k}, \quad h_x = \frac{H_x}{H_k} = h_{xe} \sin \varphi, \\ h_y &= \frac{H_y}{H_k} = h_0 + h_1 \sin 2\bar{t}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

получаем соотношение

$$m_x^2 + m_y^2 + \nu^2 m_z^2 = 1 \quad (7)$$

и систему уравнений для параметрона:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1+\alpha^2}{\alpha} \lambda \frac{dm_x}{d\bar{t}} &= -m_z(m_y \nu h_y) - \alpha [m_y(m_x h_y - m_y h_x) - \nu m_z^2(m_x \nu h_x)], \\ \frac{1+\alpha^2}{\alpha} \lambda \frac{dm_y}{d\bar{t}} &= m_z(m_x \nu h_x) + \alpha [m_x(m_x h_y - m_y h_x) + \nu m_z^2(m_y \nu h_y)], \\ \nu \frac{1+\alpha^2}{\alpha} \lambda \frac{dm_z}{d\bar{t}} &= (m_x h_y - m_y h_x) - \alpha m_z [1 - \nu^2 m_z^2 + \nu(m_x h_x + m_y h_y)], \\ \frac{du}{d\bar{t}} &= -\delta u + \delta h_{xe}, \\ \sigma \frac{dh_{xe}}{d\bar{t}} &= -u - \rho h_{xe} - \alpha \frac{dm_x}{d\bar{t}}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где коэффициенты имеют вид:

$$\lambda = \frac{\alpha \omega}{\mu_0 \gamma H_k}, \quad \nu = \frac{H_k}{M}, \quad \delta = \frac{1}{C \omega z}, \quad \rho = \frac{z'}{z},$$

$$\sigma = \frac{\mu_0 p \omega S_{обн}}{z}, \quad \alpha = \frac{\mu_0 p \omega S_{пл} M}{z H_k}.$$

Соотношение (4) означает, что параметр ν можно считать малым.

Рассмотрим предельный случай $\nu = 0$. Система (8) переходит в вырожденную систему:

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{dm_x}{dt} &= -m_y(m_x k_y - m_y k_x), \\ \lambda \frac{dm_y}{dt} &= m_x(m_x k_y - m_y k_x), \\ \frac{du}{dt} &= -\delta u + \delta h_{xe}, \end{aligned} \right\} (9.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta \frac{dh_{xe}}{dt} &= -u - \rho h_{xe} - \alpha \frac{dm_x}{dt}, \\ m_z &= \frac{1}{\alpha} (m_x k_y - m_y k_x), \end{aligned} \right\} (9.2)$$

где безразмерное время обозначено через t . Возможность замены системы (8) системой (9) согласно теории дифференциальных уравнений с малым параметром при производной [2] связана со свойствами так называемой присоединённой системы, которая в данном случае состоит из одного уравнения:

$$\frac{dm_z}{dt} = (m_x k_y - m_y k_x) - \alpha m_z, \quad (10)$$

здесь t, m_x, m_y, h_{xe} рассматриваются как параметры.

Поскольку уравнение (10) имеет единственное положение равновесия (9.2), которое, очевидно, асимптотически устойчиво, то согласно результатам [2, 4] при $\nu \rightarrow 0$ (для $t > 0$) решения системы (8) стремятся к решениям системы (9) с теми же начальными условиями для функций m_x, m_y, u, h_{xe} при $t = 0$. Таким образом, при малых ν вместо системы (8) можно использовать систему (9).

Из первых двух уравнений (9.1) следует, что $m_x^2 + m_y^2 = \text{const}$. Интересующие нас решения системы (8) связаны соотношением (7), им соответствуют решения системы (9), для которых $m_x^2 + m_y^2 = 1$. Тогда, полагая $m_x = \sin \varphi$, $m_y = \cos \varphi$ и заменяя k_x и k_y по формулам (6), получаем систему уравнений для функций $\varphi(t), u(t), h_{xe}(t)$:

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{1}{2} \sin 2\varphi - (k_0 + h_1 \sin 2t) \sin \varphi + h_{xe} \cos \varphi, \\ \frac{du}{dt} &= -\delta u + \delta h_{xe}, \\ \theta \frac{dh_{xe}}{dt} &= -u - \rho h_{xe} + \frac{\alpha}{\lambda} \cos \varphi \left[\frac{1}{2} \sin 2\varphi + (k_0 + h_1 \sin 2t) \sin \varphi - h_{xe} \cos \varphi \right], \end{aligned} \right\} (II)$$

Применение параметронов в вычислительных устройствах основано на том, что в зависимости от фазы входного сигнала при воздействии поля подкачки параметрон из состояния покоя переходит в один из двух режимов колебаний, отличающихся противоположными по знаку значениями выходного напряжения u .

Можно считать, что действие сигнала эквивалентно действию некоторой периодической э.д.с. частоты ω включённой параллельно ёмкости C (рис.1), оно непродолжительно и определяет только начальное возмущение параметрона. Усиление этого возмущения и поддержание колебаний происходит за счёт воздействия поля подкачки, после снятия которого параметрон опять возвращается в состояние покоя. В этот период его работа описывается автономной системой, получающейся из системы (II) при $h_1 = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{1}{2} \sin 2\varphi - k_0 \sin \varphi + h_{xe} \cos \varphi, \\ \frac{du}{dt} &= -\delta u + \delta h_{xe}, \\ \theta \frac{dh_{xe}}{dt} &= -u - \rho h_{xe} + \frac{\alpha}{\lambda} \cos \varphi \left[\frac{1}{2} \sin 2\varphi + k_0 \sin \varphi - h_{xe} \cos \varphi \right]. \end{aligned} \right\} (I2)$$

Будем считать, что действие сигнала происходит мгновенно и одновременно с включением поля подкачки. Практический интерес представляет получение от малого сигнала установившихся колебаний достаточно большой амплитуды. Такого типа колебаниям соответствуют некоторые решения системы (II) с начальными условиями, мало отличающимися от асимптотически устойчивых положений равновесия системы (II). Эти состояния могут быть также положениями равновесия системы (II), тогда усиление произвольно малых начальных возмущений, вызванных сигналом, означает неустойчивость соответствующего положения равновесия системы (II). В этом случае точку пространства параметров $(\lambda, k_0, h_1, \delta, \theta, \rho, \alpha)$ назовём точкой неустойчивости для данного решения и в дальнейшем будем рассматривать задачу построения областей неустойчивости для положений равновесия системы (II).

§ 3. Об устойчивости положений равновесия систем (II) и (I2)

У системы (I2) всегда имеются два положения равновесия

$$\varphi = 0, \quad u = 0, \quad h_{xe} = 0; \quad (I3.1)$$

$$\varphi = \pi, \quad u = 0, \quad h_{xe} = 0, \quad (I3.2)$$

кроме того, при $h_0 < 1$ ($h_0 > 0$) существуют ещё два положения равновесия

$$\varphi = \varphi_k, \quad u = 0, \quad h_{xe} = 0 \quad (k=1,2), \quad (I3.3)$$

где φ_k - корни уравнения $h_0 + \cos\varphi = 0$ и $\frac{\pi}{2} \leq \varphi_1 < \pi$, $-\pi < \varphi_2 \leq -\frac{\pi}{2}$.

Обозначим возмущения компонент решения системы (I2) теми же буквами, что и сами компоненты. Исследование устойчивости решений (I3) по первому приближению приводит к системе:

$$\left. \begin{aligned} \varphi' &= -a_0\varphi + a_1 h_{xe}, \\ u' &= -\delta u + \delta h_{xe}, \\ h_{xe}' &= a_2\varphi - a_3 u - a_4 h_{xe} \end{aligned} \right\}, \quad (I4)$$

здесь для решения (I3.1) принято

$$a_0 = \frac{1+h_0}{\lambda}, \quad a_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad a_3 = \frac{1}{\sigma}, \quad a_2 = 2a_0 a_3, \quad a_4 = a_3(\rho + 2a_1); \quad (I5.1)$$

для решения (I3.2)

$$a_0 = \frac{1-h_0}{\lambda}, \quad a_1 = -\frac{1}{\lambda}, \quad a_3 = \frac{1}{\sigma}, \quad a_2 = -2a_0 a_3, \quad a_4 = a_3(\rho - 2a_1); \quad (I5.2)$$

для решений (I3.3) с учётом соотношения $\cos\varphi_k = -h_0$

$$a_0 = -\frac{\sin^2\varphi_k}{\lambda}, \quad a_1 = \frac{\cos\varphi_k}{\lambda} = -\frac{h_0}{\lambda}, \quad a_3 = \frac{1}{\sigma}, \quad a_2 = 2a_0 a_3, \quad a_4 = a_3(\rho + 2a_1); \quad (I5.3)$$

Для асимптотической устойчивости какого-нибудь из решений (I3) необходимо и достаточно [3], чтобы все коэффициенты характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} z + a_0 & 0 & -a_1 \\ 0 & z + \delta & -\delta \\ -a_2 & a_3 & z + a_4 \end{vmatrix} \equiv z^3 + \rho_1 z^2 + \rho_2 z + \rho_3 = 0 \quad (I6)$$

были положительными и выполнялось неравенство $\rho_1 \rho_2 - \rho_3 > 0$. Этот критерий при учёте равенства $a_0 a_4 - a_1 a_2 = \rho a_0 a_3$, спра-

ведливого во всех трёх случаях коэффициентов (I5.1)-(I5.3), приводит к условиям:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= a_0 + a_4 + \delta > 0, \\ \rho_2 &= \rho a_0 a_3 + \delta(a_0 + a_3 + a_4) > 0, \\ \rho_3 &= \delta a_0 a_3 (\rho + 1) > 0, \\ \rho_1 \rho_2 - \rho_3 &= \delta(a_0 + a_4)^2 + (a_0 + a_4)(\rho a_0 a_3 + \delta^2) + \delta a_3 (a_4 + \delta) > 0. \end{aligned} \right\} (I7)$$

Решение (I3.1) всегда асимптотически устойчиво, так как в силу положительности коэффициентов (I5.1) все условия (I7) выполнены.

Из (I5.2) и (I7) следует, что устойчивость решения (I3.2) зависит от знака a_0 , а именно: при $a_0 > 0$ ($h_0 < 1$) решение (I3.2) асимптотически устойчиво; при $a_0 < 0$ ($h_0 > 1$) решение (I3.2) неустойчиво, так как в (I7) $\rho_3 < 0$.

Положения равновесия (I3.3) всегда неустойчивы, так как в (I5.3) всегда $a_0 < 0$ и потому в (I7) $\rho_3 < 0$.

Из всех состояний (I3) только (I3.1) и (I3.2) являются положениями равновесия системы (II). Исследование устойчивости (I3.1) и (I3.2) как решений системы (II) приводит к системе уравнений первого приближения (I4) с π -периодическими коэффициентами: для решения (I3.1)

$$a_0 = \frac{1+h_0+h_1 \sin 2t}{\lambda}, \quad a_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad a_3 = \frac{1}{\sigma}, \quad a_2 = 2a_0 a_3, \quad a_4 = a_3(\rho + \frac{2}{\lambda}); \quad (I8.1)$$

для решения (I3.2)

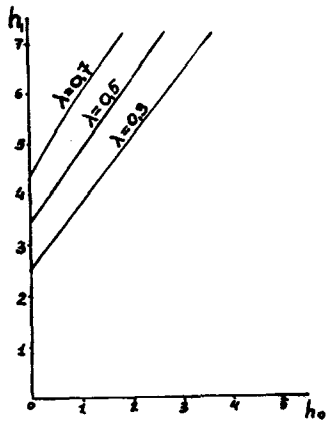
$$a_0 = \frac{1-h_0-h_1 \sin 2t}{\lambda}, \quad a_1 = -\frac{1}{\lambda}, \quad a_3 = \frac{1}{\sigma}, \quad a_2 = -2a_0 a_3, \quad a_4 = a_3(\rho - \frac{2}{\lambda}). \quad (I8.2)$$

Пусть $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица системы (I4) с коэффициентами (I8.1) или (I8.2), удовлетворяющая условию $\Phi(0) = E$, где E - единичная матрица. Корни уравнения

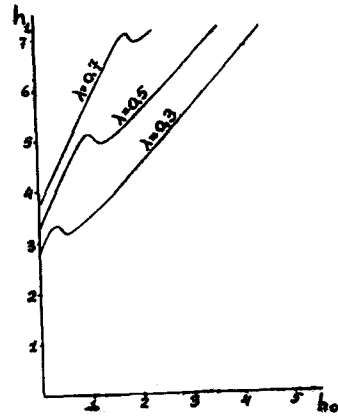
$$\det(\mu E - \Phi(\pi)) = \mu^3 + \bar{\rho}_1 \mu^2 + \bar{\rho}_2 \mu + \bar{\rho}_3 = 0. \quad (I9)$$

называются мультипликаторами системы. Для того, чтобы положение равновесия (I3.1) или (I3.2) системы (II) было неустойчивым, достаточно [3], чтобы у соответствующей системы первого приближения хотя бы один мультипликатор был по модулю больше единицы. В дальнейшем точками неустойчивости в пространстве параметров будем называть точки, где выполнено это условие.

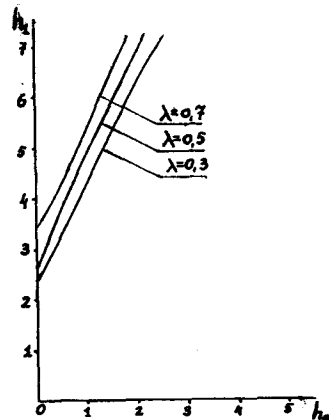
На рис. 2 (а,б,в,г) и 3 (а,б) приведены области неустойчивости положений равновесия (I3.1) и (I3.2) в пространстве параметров h_0 и h_1 для указанных на рисунках значений параметров λ и σ при $\delta = 0,17$, $\rho = 0,083$, $\alpha = 0,062$,



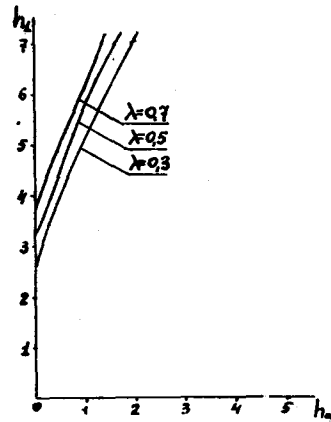
а



б



в

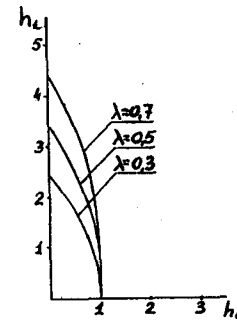


г

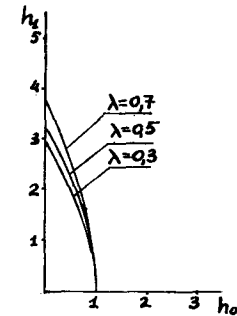
Рис. 2. Границы областей неустойчивости положений равновесия (13.1): а) при $\sigma = 1$; б) при $\sigma = 0,1$; в) при $\sigma = 0,01$; г) при $\sigma = 0,001$.

что примерно соответствует рассмотренным в [6] случаям. Границы областей построены на основании анализа корней уравнения (19) в узлах сетки с шагом $\Delta h_0 = 0,1, \Delta h_1 = 0,2$, при этом на каждом слое ($h_1 = \text{const}$) отыскивались соседние устойчивый и неустойчивый узлы сетки. Матрица $\Phi(\pi)$ получалась путем численного интегрирования соответствующей системы первого приближения.

Рис. 2 (а,б,в,г) относятся к положению равновесия (13.1). Области неустойчивости расположены над границей. Рис. 3 (а,б) соответствуют положению равновесия (13.2). Область неустойчивости содержит точки оси h_0 при $h_0 > 1$.



а



б

Рис. 3. Границы областей неустойчивости положений равновесия (13.2): а) при $\sigma = 1$; б) при $\sigma = 0,1$

Построенные границы областей неустойчивости сужают область допустимых значений параметров, что существенно, когда дальнейшее исследование схемы связано с большим объемом вычислений, например при определении амплитуд установившихся колебаний.

Л и т е р а т у р а

1. В.Л. Дятлов. Об уравнениях, описывающих процессы в ферромагнитных пленках. - Вычислительные системы. Новосибирск, 1962, вып. 2, стр. 3-15.
2. А.Н. Тихонов. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. - Мат. сборник, 1952, 31(73), № 3, стр. 575-586.
3. И.Г. Малкин. Теория устойчивости движения. Гостехиздат, М., 1952.
4. И.С. Градштейн. Применение теории устойчивости А.М. Ляпунова к теории дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных. - Мат. сборник, 1953, 32(74), № 2, стр. 263-286.
5. Е.В. Вишневский, Ю.А. Пьянков. Расчет областей колебаний в параметроне на ферромагнитной пленке. - Вычислительные системы. Новосибирск, 1962, вып. 2, стр. 24-30.
6. В.Л. Дятлов, С.К. Дементьев. О конструкции и расчете параметрона на магнитной пленке. - Вычислительные системы. Новосибирск, 1962, вып. 2, стр. 43-49.

Поступила в редакцию
3.И.1966 г.