ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Сборник трудов

1967г. Института математики СО АН СССР Выпуск 24

# О ПОТЕРЯХ ВРЕМЕНИ НА СИНХРОНИЗАЦИЮ В ОДНОРОДНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Ю.Г. Косарев, С.В. Нагаев

Как показано в [1], параллельные алгоритмы решения многих вычислительных задач полностью (или почти полностью) состоят из последовательностей $p$-операторов с одинаковыми компонентами. Вследствие этого совпадают и соответствующие участки программ, одновременно выполняемые различными элементарными машинами (ЭМ). Если бы время выполнения каждой операции было постоянно,то на таких участках ЭМ работали бы синхронно и одновременно приступали бы к выполнению команд системы: обобщенного условного перехода, обмена и настройки [2]. Обычно время выполнения операций зависит от операнд, поэтому возникает необходимость синхронизировать работу ЭМ перед командами системы.

В данной работе обсуждаются потери времени на подобную синхронизацию и даются численные оценки для вычислительной системы "Минск-222" [3], построенной на базе ЭВМ "Минск-2" или "Минск-22".

1. Интересующая нас задача состоит в следующем. Имеется вычислительная система из $\ell$ одинаковых машин, каждая из которых обладает одним и тем же набором не более чем двуместных операций $\{A_1, \dots, A_s\} = A$. Пусть все машины выполняют одну и ту же последовательность операций $A_{k_1}, A_{k_2}, \dots, A_{k_r}$ (принадлежащих множеству $A$ ) над различными наборами операнд

$a_1^i, a_2^i, \dots, a_r^i$ и $b_1^i, b_2^i, \dots, b_r^i \; (i=1,2,\dots,\ell)$

Обозначим среднюю длительность выполнения операций данной последовательности в $i$-й машине через

$$T_{ri} = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} t_{ji}, \tag{1}$$

где $t_{ji}$ - время выполнения $j$-ой по счету операции в $i$-ой машине.

В общем случае $t_{ji}$ зависят от вида операции и операнд, т.е.

$$t_{ji} = f(A_{k_j}, a_j^i, b_j^i). \tag{2}$$

Интересующие нас средние потери на синхронизацию будут, очевидно, равны

$$\tau_{r\ell} = \frac{1}{\ell}\sum_{i=1}^{\ell}\left(\tilde{T}_{r\ell} - T_{ri}\right), \tag{3}$$

где

$$\tilde{T}_{r\ell} = \max_{1\le i\le \ell} T_{ri}, \tag{4}$$

или

$$\tau_{r\ell} = \tilde{T}_{r\ell} - \bar{T}_{r\ell}, \tag{5}$$

где

$$\bar{T}_{r\ell} = \frac{1}{\ell}\sum_{i=1}^{\ell} T_{ri}. \tag{6}$$

Важно установить, как зависит величина $\tau_{r\ell}$ от числа ЭМ $\ell$ и длины последовательности $r$.

В общем случае операнды можно считать случайными ограниченными дискретными величинами вида $\pm a\cdot 2^{\pm k}$, где порядок числа $k = 0,1,\dots,K$, а его мантисса $0 \le a < 1$ представляет собой $m$-разрядное двоичное число. В силу (2) $t_{ji}$ также будут дискретными случайными величинами.

Интуитивно ясно, что математическое ожидание $\tau_{r\ell}$ увеличивается с ростом $\ell$ и уменьшается при возрастании $r$. Следующая оценка подтверждает это предположение.

$$M\tau_{r\ell} \le \sqrt{\frac{\ell-1}{r^2}\sum_{k=1}^{s} r_k D\tau_k}, \tag{7}$$



где $D\tau_k$ - дисперсия продолжительности операции $k$-го вида (т.е. операции $A_k \in A$), $r_k$ - число операций $k$-го вида $\left(\sum_{k=1}^{s} r_k = r\right)$.

Действительно,

$$M\tau_{r\ell}^2 \le \sum_{h=1}^{\ell} M\tau_{r\ell}^2\Big|_{\tilde{T}_{r\ell}=T_{rh}} P(\tilde{T}_{r\ell} = T_{rh}). \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что

$$M\tau_{r\ell}^2\Big|_{\tilde{T}_{r\ell}=T_{rh}} P(\tilde{T}_{r\ell}=T_{rh}) \le \frac{1}{\ell^2} M\left(\sum_{i=1}^{\ell}(T_{rh}-T_{ri})\right)^2 =$$

$$= \frac{\ell-1}{\ell} DT_{r1} = \frac{\ell-1}{\ell r^2}\sum_{k=1}^{s} r_k D\tau_k. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует справедливость (7).

Для наших целей важно знать не столько абсолютную, сколько относительную величину простоев

$$M\tau_{r\ell} \Big/ \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{s} r_k M\tau_k.$$

Пусть $r_{min}(\varepsilon)$ - минимальное среди $q$ таких, что при всех возможных $r_k$

$$\frac{M\tau_{r\ell}}{\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{s} r_k M\tau_k} \le \varepsilon \tag{10}$$

для всех $r \ge q$.

Из неравенства (7) вытекает, что (10) имеет место во всяком случае при тех $r$, для которых

$$\max_{\substack{r_1, r_2, \dots, r_k \\ r_1+r_2+\dots+r_k = r}} \frac{(\ell-1)\sum_{k=1}^{s} r_k D\tau_k}{\left(\sum_{k=1}^{s} r_k M\tau_k\right)^2} \le \varepsilon^2. \tag{11}$$

Нахождение этого максимума - довольно трудоемкая задача.

Проблема, однако, существенно упрощается, если наложить на $r_k$ дополнительные ограничения.

Пусть $r^*_{min}(\varepsilon)$ - наименьшее целое решение неравенства

$$\max_k \frac{D\tau_k}{r(M\tau_k)^2} \le \frac{\varepsilon^2}{\ell-1}.$$

Предположим, что $\tau_k \ge \tau^*_{min}(\varepsilon)$ для всех $k$. Очевидно, в этом случае

$$\left(\frac{M\tau_{\tau\ell}}{\frac{1}{\tau}\sum\limits_{k=1}^{S}\tau_k M\tau_k}\right)^2 \le (\ell-1)\frac{\sum\limits_{k=1}^{S}\tau_k D\tau_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{S}\tau_k M\tau_k\right)^2} \le$$

$$\le (\ell-1)\frac{\sum\limits_{k=1}^{S}\tau_k D\tau_k}{\sum\limits_{k=1}^{S}\tau_k^2 (M\tau_k)^2} \le (\ell-1)\max_k \frac{D\tau_k}{\tau_k (M\tau_k)^2} \le$$

$$\le \frac{(\ell-1)}{\tau^*_{min}(\varepsilon)}\max_k \frac{D\tau_k}{(M\tau_k)^2} \le \varepsilon^2 .$$

Эта оценка удовлетворительна, если $\tau_k$ мало отличается от $\tau/S$. Когда это не так, предпочтительнее оказывается следующая оценка.

Положим

$$D^* = \max_{\tau_k \ne 0} D\tau_k \quad \text{и} \quad M^* = \max_{\tau_k \ne 0} M\tau_k .$$

Пусть $\beta = \frac{\tau_{j_0}}{\tau}$, где $j_0$ - номер операции, для которой $M\tau_{j_0} = M^*$

Тогда неравенство (II) справедливо для

$$\tau > \sqrt{\frac{(\ell-1)D^*}{\beta^2 M^{*2}}} . \qquad (12)$$

Действительно,

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{S}\tau_k D\tau_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{S}\tau_k M\tau_k\right)^2} < \frac{\tau D^*}{\tau_{j_0}^2 M^{*2}} \le \frac{D^*}{\tau\beta^2 M^{*2}} . \qquad (13)$$

Отсюда легко следует (I2).

В некоторых случаях может оказаться полезной следующая грубая, но зато абсолютная оценка



$$\tau_{min}(\varepsilon) \doteq \frac{(\ell-1)\tilde{D}}{\tilde{M}^2\varepsilon^2}, \qquad (14)$$

где $\tilde{M} = \min\limits_k M\tau_k$, $\tilde{D} = \max\limits_k D\tau_k$.

Неравенство (I4) немедленно получается из неравенства (7)

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{S}\tau_k D\tau_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{S}\tau_k M\tau_k\right)^2} \le \frac{\tilde{D}}{\tau\tilde{M}^2}.$$

2. Определение $D\tau_k$, входящих в (7), требует знания процесса выполнения операций $A_k$ в ЭМ. Для большинства операций обычных ЭВМ $\tau_k$ не зависит от операнд и $D\tau_k = 0$. К сожалению, наиболее употребительные вычислительные операции этим свойством, как правило, не обладают.

В наиболее общем виде зависимость $\tau_k$ от операнд может быть записана как

$$\tau_k = \tau_k^o + h\varphi_k(z_k), \qquad (15)$$

где $\tau_k^o$ - постоянная часть затрат времени на выполнение операции $A_k$; $\varphi_k(z_k)$ - функция, определяющая число тактов длительностью $h$ в зависимости от значения случайной величины $z_k$.

Например, если операция умножения выполняется простейшим способом путем последовательного умножения на один разряд мантиссы множителя, то длительность операции будет линейной функцией числа единиц $i$ в мантиссе множителя

$$\tau_x = \tau_x^o + h_i . \qquad (16)$$

Для этого случая

$$P(\tau_x = \tau_x^o + h_i) = C_m^i p^i q^{m-i} . \qquad (17)$$

Если предположить, что вероятность появления единицы на любом месте, равная $p$, а нуля - $q$, не зависит от значения других разрядов мантиссы, то

$$D\tau_x = mpq . \qquad (18)$$

Если операндами с одинаковой вероятностью могут быть любые из $2^m$ чисел или, что то же, $p=q$, то

$$D\tau_x = m/4 \tag{19}$$

Когда умножение выполняется сразу на два и более разрядов множителя, то функция $\varphi_x(z_k)$ уже не имеет универсального вида и обычно различна для различных ЭВМ.

3. В машине "Минск-2" (и совпадающей с нею по системе и характеру выполнения команд машине "Минск-22") случайными являются длительности операций сложения (+ I4, + I5, + I6, +I7), вычитания (+ 24, + 25, + 26, + 27), вычитания модулей (+ 54, + 55, + 56, + 57), умножения (+ 34, + 35, + 36, + 37), выполняемых в режиме плавающей запятой, умножения с фиксированной запятой (+ 30, + 3I, + 32, + 33), получения младших разрядов произведения (-70), нормализации (-75) и подсчета единиц (-76)[x].

Первые пять операций могут выполняться в четырех модификациях (их коды указаны в скобках после названия операций), которые отличаются только числом обращений к оперативной памяти.

Полное (или частичное) совпадение временных зависимостей у многих операций существенно облегчает наше рассмотрение.

Так, выражения (I5) для операций вычитания те же, что и у соответствующих модификаций операции сложения, а операции вычитания модулей отличаются от них только характером выполнения нормализации. Операция получения младших разрядов произведения совпадает по временной характеристике с модификацией (+ 3I), операции умножения - с фиксированной запятой. Много общего в выполнении операций умножения с фиксированной и плавающей запятыми. Почти полностью совпадают временные характеристики операций нормализации и счета единиц. Указанные выше модификации команд отличаются друг от друга только величиной $\tau_k^o$.

В дальнейшем условимся вместо индекса $k$ ставить код соответствующей операции "Минск-2".

---

x) В нашем случае операции сдвига, обращения к внешним устройствам и др. выполняются во всех ЭМ за одно и то же время и не зависят от операнд. Длительность этих операций определяется параметрами, задаваемыми программистом, либо вырабатываемыми в ходе вычислений.





В машине "Минск-2" множимое одновременно умножается на два двоичных разряда множителя. Длительность операции (+33) зависит только от вида мантиссы множителя, которую можно рассматривать как последовательность случайных чисел $\eta_1, \eta_2, \ldots$ $\ldots, \eta_{m/2}$, каждое из которых принимает значения 00, 0I, I0, II ($m$= 36).

Процесс умножения можно разделить на три части: постоянную $\tau^o_{+33}$ = 84 мк сек[x] и две переменные: $m/2$ - циклов умножения на $\eta_k$ и $m/2+1$ -й - последний цикл.

Последовательности $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m/2}$ соответствует последовательность длительностей циклов умножения $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m/2}$, принимающих значения $t_o$ = 4, либо $t_1$ = I6 мксек в зависимости от $\eta_k$ и переноса от умножения на предыдущие $\eta_{k-1}, \eta_{k-2},$ $\ldots, \eta_1$ (таблица I)

Таблица I

| $\eta_k$ | $\xi_k$ перенос 0 | $\xi_k$ перенос I |
|---|---|---|
| 00 | $t_o$ | $t_1$ |
| 0I | $t_1$ | $t_1$ |
| I0 | $t_1$ | $t_1$ |
| II | $t_1$ | $t_o$ |

Таблица 2

| $\eta_{m/2}$ | $\xi_{\frac{m}{2}+1}$ перенос 0 | $\xi_{\frac{m}{2}+1}$ перенос I |
|---|---|---|
| 00 | $t_o$ | $t_o$ |
| 0I | $t_o$ | $t_o$ |
| I0 | $t_o$ | $t_1$ |
| II | $t_1$ | $t_1$ |

Перенос "I" возникает только при $\eta_{k-1}$= II, либо при

$$\eta_{k-1}=\eta_{k-2}=\cdots=\eta_{k-i}=10 \text{ и } \eta_{k-i-1}=11 \quad (i=1,2,\ldots,k-2). \tag{20}$$

Длительность ($\frac{m}{2}$ + I )-го цикла определяется таблицей 2.

---

x) Здесь и далее указывается время выполнения операций без учета затрат на модификацию адресов с помощью индексных ячеек. Длительность же операций с модификацией адресов больше на 24 мксек.

Приступим к расчету. Как видно из таблицы I, для $\eta_{k-1}$ = 00, OI или II независимо от остальных членов последовательности

$$P\left(\xi_k=t_0\middle|\eta_{k-1},\eta_{k-2},\dots,\eta_1\right)=P\left(\xi_k=t_0/\eta_{k-1}\right)=\frac{1}{4}\;; \tag{21}$$

для $\eta_{k-1}$ = IO, в силу условия (20),

при $\eta_{k-i-1}$ = II

$$P\left(\xi_k=t_0\middle|\eta_{k-1},\eta_{k-2},\dots,\eta_1\right)=P\left(\xi_k=t_0/\eta_{k-1}=11\right)=\frac{1}{4}\;; \tag{22}$$

при $\eta_{k-i-1}$ = 00

$$P\left(\xi_k=t_0\middle|\eta_{k-1},\dots,\eta_1\right)=P\left(\xi_k=t_0/\eta_{k-1}=00\right)=\frac{1}{4}\;; \tag{23}$$

при $\eta_{k-i-1}$ = OI

$$P\left(\xi_k=t_0\middle|\eta_{k-1},\dots,\eta_1\right)=P\left(\xi_k=t_0/\eta_{k-1}=01\right)=\frac{1}{4} \tag{24}$$

и при

$\eta_{k-1}=\eta_{k-2}=\dots=\eta_1=10$

$$P\left(\xi_k=t_0\middle|\eta_{k-1},\dots,\eta_1\right)=P\left(\xi_k=t_0/\eta_{k-1}=01\right)=\frac{1}{4}\,. \tag{25}$$

Отсюда следует, что любые $\xi_k$ и $\xi_j$ независимы, одинаково распределены и принимают значения $t_0$ с вероятностью $\frac{1}{4}$ и $t_1$ с вероятностью $\frac{3}{4}$, поэтому

$$M\sum_{k=1}^{m/2}\xi_k=\frac{m}{2}M\xi_1=\frac{m}{2}\left(\frac{1}{4}\cdot4+\frac{3}{4}\cdot16\right)=\frac{m}{2}13=234\ \text{мксек}, \tag{26}$$

$$D\sum_{k=1}^{m/2}\xi_k=\frac{m}{2}D\xi_1=\frac{m}{2}27=486\cdot\text{мксек}^2. \tag{27}$$

Заметим, что независимость $\xi_k$ и $\xi_j$ вытекает из того, что $\eta_k$ равновероятно принимает любое из четырех возможных значений и из особенностей (симметричности) табл. I.



Рассчитаем длительность $(\frac{m}{2}+1)$-го цикла, пользуясь табл. 2. Как нетрудно видеть,

$$P\left(\xi_{\frac{m}{2}+1}=t_0\right)=\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{m}{2}}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{m}{2}}\;; \tag{28}$$

$$P\left(\xi_{\frac{m}{2}+1}=t_1\right)=\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{m}{2}}\right)\;; \tag{29}$$

$$M\xi_{\frac{m}{2}+1}=t_0+\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{m}{2}}\right)\left(t_1-t_0\right)\approx8\ \text{мксек}\;; \tag{30}$$

$$M\xi^2_{\frac{m}{2}+1}=t_0^2+\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{m}{2}}\right)\left(t_1^2-t_0^2\right)\approx96\ \text{мксек}^2; \tag{31}$$

$$D\xi_{\frac{m}{2}+1}=32\ \text{мксек}^2. \tag{32}$$

Подсчитаем вероятности пар:

$$\left.\begin{aligned}
&P\left(\xi_{\frac{m}{2}+1}=t_0\,,\ \ \xi_{\frac{m}{2}}=t_0,\ \ \eta_{\frac{m}{2}}=00\right)\approx\frac{1}{6};\\
&P\left(\xi_{\frac{m}{2}+1}=t_0\,,\ \ \xi_{\frac{m}{2}}=t_1,\ \ \eta_{\frac{m}{2}}=00\right)\approx\frac{1}{12};\\
&P\left(\xi_{\frac{m}{2}+1}=t_0\,,\ \ \xi_{\frac{m}{2}}=t_1,\ \ \eta_{\frac{m}{2}}=01\right)\approx\frac{1}{4};\\
&P\left(\xi_{\frac{m}{2}+1}=t_0\,,\ \ \xi_{\frac{m}{2}}=t_1,\ \ \eta_{\frac{m}{2}}=10\right)=\frac{1}{6};\\
&P\left(\xi_{\frac{m}{2}+1}=t_1\,,\ \ \xi_{\frac{m}{2}}=t_1,\ \ \eta_{\frac{m}{2}}=10\right)=\frac{1}{12};\\
&P\left(\xi_{\frac{m}{2}+1}=t_1\,,\ \ \xi_{\frac{m}{2}}=t_0,\ \ \eta_{\frac{m}{2}}=11\right)=\frac{1}{12};\\
&P\left(\xi_{\frac{m}{2}+1}=t_1\,,\ \ \xi_{\frac{m}{2}}=t_1,\ \ \eta_{\frac{m}{2}}=11\right)=\frac{1}{6}.
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Т а б л и ц а 3

| $\xi_{\frac{m}{2}}$ \ $\xi_{\frac{m}{2}+1}$ | $t_0$ | $t_1$ |
|---|---|---|
| $t_0$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $t_1$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}$ |

Т а б л и ц а 4

| $\eta_{m/2}$ | $\xi^*_{m/2}$ | |
|---|---|---|
| | перенос | |
| | 0 | I |
| I0 | $t_0+t_1$ | $2t_1$ |
| II | $2t_1$ | $t_0+t_1$ |

Сравнение парных вероятностей для $\xi_{\frac{m}{2}+1}$ и $\xi_{\frac{m}{2}}$ (табл.3) с вероятностями для $\xi_{\frac{m}{2}+1}$ и $\xi_{\frac{m}{2}}$ показывает, что эти случайные величины независимы. Аналогично можно показать и независимость случайных величин $\xi_{\frac{m}{2}+1}$ и $\xi_k$, $k<m/2$. В итоге

$$M\tau_{+33}=\tau^{\circ}_{+33}+\frac{m}{2}M\xi_1+M\xi_{\frac{m}{2}+1}=84+234+8=326\ мксек; \quad (34)$$

$$\mathcal{D}\tau_{+33}=\frac{m}{2}\mathcal{D}\xi_1+\mathcal{D}\xi_{\frac{m}{2}+1}=486+32=518\ мксек^2; \quad (35)$$

$$\frac{\mathcal{D}\tau_{+33}}{(M\tau_{+33})^2}\approx 49\cdot10^{-4}. \quad (36)$$

Соответствующие значения для модификаций этой операции + 30, + 3I, + 32 и операции получения младших разрядов произведения - 70 приведены в табл. 8

### Умножение с плавающей запятой (+ 37)

Операция (+37) отличается от операции (+33) следующим:

I) добавляется 36 мксек на округление результата:

$$\tau^{\circ}_{+37}=\tau^{\circ}_{+33}+36=120\ мксек; \quad (37)$$

2) уменьшается число разрядов мантиссы ($m$=28) и операнды, как правило, являются нормализованными, т.е. $\eta_{\frac{m}{2}}$=I0 или II. В этом случае длительности $\frac{m}{2}$-го и $(\frac{m}{2}+1)$-го циклов удобно рассматривать совместно, полагая $\xi^*_{\frac{m}{2}}=\xi_{\frac{m}{2}}+\xi_{\frac{m}{2}+1}$ (табл.4)



Нетрудно видеть, что табл. 4 обладает тем же свойством симметрии, что и табл. I. Значения $\eta_{\frac{m}{2}}$, равные I0 и II, по общему предположению о равновероятности операнд также равновероятны, поэтому аналогично (2I) - (24)

$$P\left(\xi^*_{\frac{m}{2}}=t_0+t_1 \,\middle|\, \eta_{\frac{m}{2}-1},\dots,\eta_1\right)=\frac{1}{2} \quad (38)$$

при любых последовательностях $\eta_{\frac{m}{2}-1},\dots,\eta_1$. Значит, $\xi^*_{\frac{m}{2}}$ и $\xi_j$ независимы, поэтому

$$M\sum_{k=1}^{m/2}\xi_k+M\xi_{\frac{m}{2}+1}=M\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1}\xi_k+M\xi^*_{\frac{m}{2}}=\left(\frac{m}{2}-1\right)M\xi_1+M\xi^*_{\frac{m}{2}}= \quad (39)$$

$$=13\times13+26=195\ мксек;$$

$$\mathcal{D}\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\xi_k=\mathcal{D}\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1}\xi_k+\mathcal{D}\xi^*_{\frac{m}{2}}=\left(\frac{m}{2}-1\right)\mathcal{D}\xi_1+\mathcal{D}^*_{\frac{m}{2}}= \quad (40)$$

$$=13\times27+36=387\ мксек^2.$$

3) Полученный результат нормализуется только на один разряд влево. На нормализацию в данных условиях требуется 4 мксек. В отличие от предыдущих случайных величин время нормализации $\xi_H$ определяется как мантиссой множителя, так и мантиссой множимого. Если их обозначить соответственно через $x$ и $y$, а результат через $z=y\cdot x$, то, как нетрудно видеть,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}\le x\le1-\frac{1}{2^m};\\&\frac{1}{2}\le y\le1-\frac{1}{2^m};\\&\frac{1}{4}\le z\le\left(1-\frac{1}{2^m}\right)^2<1-\frac{1}{2^m}.\end{aligned}\right\} \quad (4I)$$

Ненормализованные числа будут лежать ниже кривой $y=\frac{1}{2x}$, а нормализованные-выше и на ней (рис. I). Откуда следует, что

$$\begin{aligned}&P(\xi_H=4)=0{,}39;\\&P(\xi_H=0)=0{,}6I;\end{aligned} \quad (42)$$

$$M\xi_H=0{,}39\cdot4+0{,}6I\cdot0=I{,}56\ мксек; \quad (43)$$

$$M\xi_H^2=0{,}39\cdot16+0{,}6I\cdot0=6{,}24\ мксек^2; \quad (44)$$

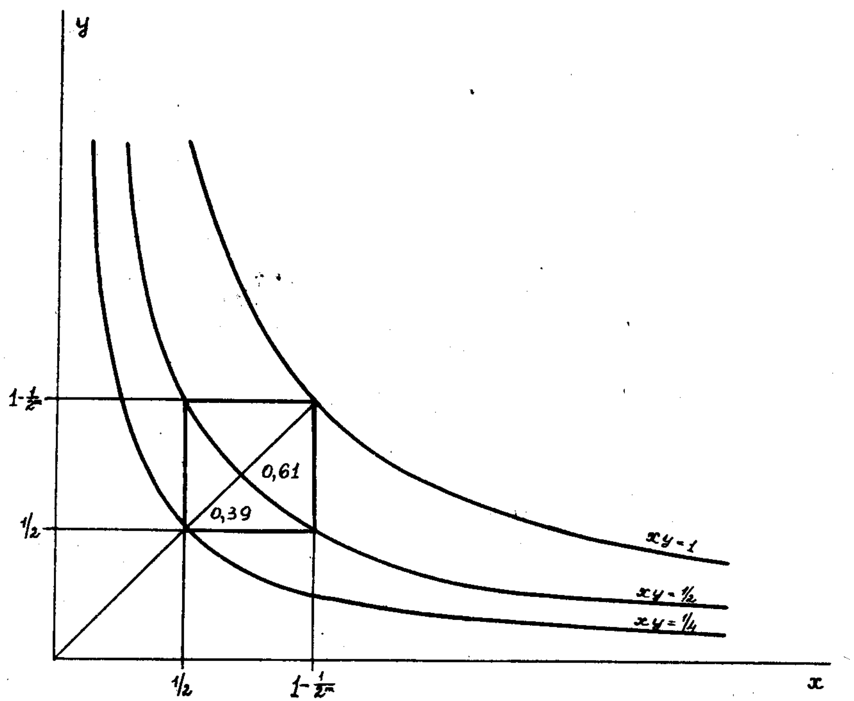


Рис.I.

$$\mathcal{D}\xi_H = 3{,}8I \text{ мксек}^2 . \qquad (45)$$

Ковариация случайных величин $\xi_H$ и $\sum\limits_{k=1}^{\frac{m}{2}+1}\xi_k$ будет:

$$Cov\left(\xi_H, \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}+1}\xi_k\right) \le \sqrt{\mathcal{D}\xi_H \cdot \mathcal{D}\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}+1}\xi_k} = \sqrt{3{,}81\cdot 387} \approx 38{,}4 \text{ мксек}^2 \qquad (46)$$

В итоге

$$M\tau_{+37} = \tau^{o}_{+37} + M\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1}\xi_k + M\xi^{*}_{\frac{m}{2}} + M\xi_H = \qquad (47)$$

$$= 120 + 169 + 26 + 4 = 319 \text{ мксек};$$

$$\mathcal{D}\tau_{+37} = \mathcal{D}\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}+1}\xi_k + \mathcal{D}\xi_k + 2Cov\left(\xi_H, \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}+1}\xi_k\right) \le \qquad (48)$$

$$\le 387 + 3{,}8 + 2\cdot 38{,}4 \approx 468 \text{ мксек}^2;$$

$$\frac{\mathcal{D}\tau_{+37}}{(M\tau_{+37})^2} = 46\cdot 10^{-4} . \qquad (49)$$

Соответствующие значения для других модификаций этой операции приведены в табл. 8.

## Сложение с плавающей запятой (+ 3I)

В машине "Минск-2", как и у большинства других ЭВМ, колебания длительности операции сложения с плавающей запятой связано с затратами времени на выравнивание порядков слагаемых и нормализацию результата.

Обозначим слагаемые до и после выравнивания порядков соответственно через $u'\cdot 2^{k_1}$; $v'\cdot 2^{k_2}$ и $u\cdot 2^{k}$, $v\cdot 2^{k}$.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{При} \quad k_1 \ge k_2 & & k = k_1, \\ & & u = u', \\ & & v = 2^{-æ}\cdot v'; \\ \text{при} \quad k_1 < k_2 & & k = k_2, \\ & & u = 2^{-æ}u', \\ & & v = v', \end{array}\right\} \qquad (50)$$

где $\quad æ = |k_1 - k_2|$ .

Если округление не блокируется, то частное от деления на $2^{\varkappa}$ округляется до $1/2^{m}$ x).

Результат до нормализации равен

$$u\cdot 2^{k}+v\cdot 2^{k}=w\cdot 2^{k}, \qquad (51)$$

где $w=u+v$.

После нормализации он равен $w'\cdot 2^{k'}$,

где

$$\left.\begin{array}{lll} w'=w\cdot 2^{\nu}, & & \frac{1}{2^{\nu+1}}\le |w| < \frac{1}{2^{\nu}}, \\ k'=k-\nu & \text{при} & \nu=-1,0,1,\dots,m-1; \\ & & \\ w'=0, & & \\ k'=63 & \text{при} & 0\le |w| < \frac{1}{2^{m}} \end{array}\right\} \qquad (52)$$

Затраты времени на выравнивание порядков равны:

$$\left.\begin{array}{lll} t_{\varkappa}=4\varkappa \text{ мксек} & \text{при} & 0\le\varkappa\le 63^{\text{xx)}}, \\ t_{\varkappa}=0 & \text{при} & 64\le\varkappa . \end{array}\right\} \qquad (53)$$

Время нормализации результата:

$$\left.\begin{array}{lll} t_{\nu} = 16 \text{ мксек} & \text{при} & \nu=-1, \\ t_{\nu} = 4\nu & \text{при} & \nu=0,1,\dots,m-1,\ 31^{\text{xxx)}}. \end{array}\right\} \qquad (54)$$

Здесь знак " – " соответствует нормализации вправо, а знак " + " – влево.

Таким образом, время выполнения операции (+17) зависит

---

x) В действительности в "Минске-2" округление выполняется после нормализации результата. После округления результат может оказаться ненормализованным и его нужно нормализовать вправо на один разряд. Однако нормализация после округления может возникнуть только тогда, когда не было нормализации до округления (результат оказался нормализованным). Поэтому перестановка местами округления и нормализации не влияет на общее время выполнения операции.

xx) При $m\le\varkappa\le 63$ выравнивание порядков делается для упрощения схем ЭВМ. Здесь $m=28$.

xxx) При $w'=0$ в "Минске-2" для однообразия схем выполняется нормализация влево на 31 разряд.



от двух случайных величин $\varkappa$ и $\nu$. Так как между $\varkappa$ и $\nu$ существует зависимость, то приходится рассматривать все возможные пары значений $\varkappa$ и $\nu$. В табл. 5 приведены длительности

$$\tilde{\tau}_{+17}(\varkappa,\nu)=\tau_{+17}(\varkappa,\nu)-\tau^{\circ}_{+17},$$

где $\tau^{\circ}_{+17}$ – постоянная часть затрат времени на выполнение операции (+17), равная 124 мксек.

Дальнейший расчет требует знания законов распределения случайных величин $\varkappa$ и $\nu$.

Закон распределения для случайной величины $\nu$ при фиксированном значении $\varkappa$ можно получить из вполне правдоподобного предположения, что мантиссы слагаемых с равной вероятностью принимают значения для одного слагаемого в интервале $(0,2^{m})$, для второго – $(0,2^{m-\varkappa})$.

Вычисление соответствующих условных вероятностей поясняется рис 2. Для простоты на этом рисунке приведен случай равновероятного распределения величин $u$ и $v$ в интервалах соответственно $\left(1,2-\frac{1}{2^{m}}\right)$ и $\left(0,2-\frac{1}{2^{m}}\right)$ либо $\left(0,2-\frac{1}{2^{m}}\right)$ и $\left(1,2-\frac{1}{2^{m}}\right)$.

С достаточной для наших расчетов точностью можно полагать значения вероятностей пропорциональными относительным размерам соответствующих площадей на рис. 2.

Значения условных математических ожиданий и вторых моментов для $\tilde{\tau}_{+17}$ приведены в табл. 6.

Определение распределения случайной величины $\varkappa$ было проведено по нашей просьбе Н.Я. Цыбренко. Статистика собиралась с помощью специальной программы во время счета задач линейного программирования и линейной алгебры на машине "М-20", имеющей то же число разрядов порядка, что и "Минск-2". Объем выборки был около $0{,}6\cdot 10^{6}$ операций. Полученному распределению $\varkappa$ соответствуют следующие значения:

$$\left.\begin{array}{l} M\tau_{+17}\approx 124+50=174 \text{ мксек}, \\ D\tau_{+17}\approx 3.600 \text{ мк сек}^{2}, \\ \frac{D\tau_{+17}}{(M\tau_{+17})^{2}}\approx 1200\cdot 10^{-4} . \end{array}\right\} \qquad (55)$$

### Вычитание модулей с плавающей запятой (+ 57)

Расчеты для команды (+57) аналогичны приведенным выше для (+I7). Отличие состоит в том, что при определении условных вероятностей при фиксированной $\text{æ}$ нужно рассматривать случаи, когда $u$ и $v$ различны по знаку (рис. 2). Условные математические ожидания и вторые моменты для этого случая представлены в табл. 7.

Для того же закона распределения случайной величины $\text{æ}$, что и для операций вычитания, получаются следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} M\tau_{+57} &\approx 124 + 48 = 172 \text{ мксек}, \\ D\tau_{+57} &\approx 3700 \text{ мксек}^2, \\ \frac{D\tau_{+57}}{(M\tau_{+57})^2} &\approx 1250 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

### Нормализация (-75)

Команда выполняется за время

$$\tau_{-75} = 128 + 4\nu \;, \qquad (57)$$

где $\nu$ - число сдвигов числа для нормализации.

Распределение случайной величины $\nu$ зависит как от вида операции, в результате которой получилось нормализуемое число, так и от операнд, над которыми эта операция выполняется.

Если предположить, что нормализуемое число принимает с равной вероятностью все значения в интервале $(0, 1 - \frac{1}{2^m})$ [x)], то

$$M\tau_{-75} = 128 + 4\sum_{\nu=0}^{m} \frac{1}{2^{\nu+1}}\nu = 128 + 4 = 132 \text{ мксек},$$
$$D\tau_{-75} = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{1}{2^{\nu+1}}(4\nu)^2 - \left(4\sum_{\nu=0}^{m}\frac{\nu}{2^{\nu+1}}\right)^2 = 34 \text{ мксек}^2. \qquad (58)$$

Если предположить, что величина $\nu$ равномерно распределена в интервале $(0, m)$, то

$$M\tau_{-75} = 128 + \frac{4}{m+1}\sum_{\nu=0}^{m}\nu = 128 + 72 = 200 \text{ мксек},$$
$$D\tau_{-75} = \frac{16}{m+1}\sum_{\nu=0}^{m}\nu^2 - \left(\frac{4}{m+1}\sum_{\nu=0}^{m}\nu\right)^2 \approx 1720 \text{ мксек}^2. \qquad (59)$$

---

x) Здесь $m = 36$.



Таблица 5

Значение длительности $\tau_{+17}(\text{æ}, \nu) - \tau^{0}_{+17}$

| $\nu$ \ $\text{æ}$ | 0 | I | 2 | ... | $j$ | ... | $m$ -I=27 | $m$ =28 | ... | 63 | 64 | ... | I27 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -I | I6+0=I6 | I6+4=20 | I6+8=24 | ... | I6+4$j$ | ... | I6+I08=I24 | 0+II2=II2 | ... | 252 | 0 | ... | 0 |
| 0 | 0+0=0 | 0+4=4 | 0+8=8 | ... | 0+4 | ... | 0+I08=I08 | 0+II2=II2 | ... | 252 | 0 | ... | 0 |
| I | 4+0=4 | 4+4=8 | 4+8=I2 | ... | 4+4$j$ | ... | 4+I08=II2 | 0+II2=II2 | ... | 252 | 0 | ... | 0 |
| 2 | 8+0=8 | 8+4=I2 | | | | | | | | | | | |
| ... | ... | ... | | | | | | | | | | | |
| $i$ | 4+0=4 | 4+4 | | | | | | | | | | | |
| ... | ... | ... | | | | | | | | | | | |
| $m$-I | I08+0=I08 | I08+4=II2 | | | | | | | | | | | |
| 3I | I24+0=I24 | I24+4=I28 | | | | | | | | | | | |

$\nu = i \longrightarrow \frac{1}{2^{i+1}} \le |w| \le \frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^m}, \quad (i = -1, 0, 1, \ldots, m-1),$

$\nu = 31 \longrightarrow 0 \le |w| \le \frac{1}{2^m};$

$\text{æ} = j \longrightarrow \frac{1}{2^j} \le |v| \le \frac{1}{2^{j-1}} - \frac{1}{2^m} \quad \frac{1}{2^j} \le |u| \le \frac{1}{2^{j-1}} - \frac{1}{2^m}, \; (j = -1, 0, 1, \ldots, m)$

$\text{æ} = j \longrightarrow |v| = |u| = 0, \quad (j = m+1, \ldots, 127).$

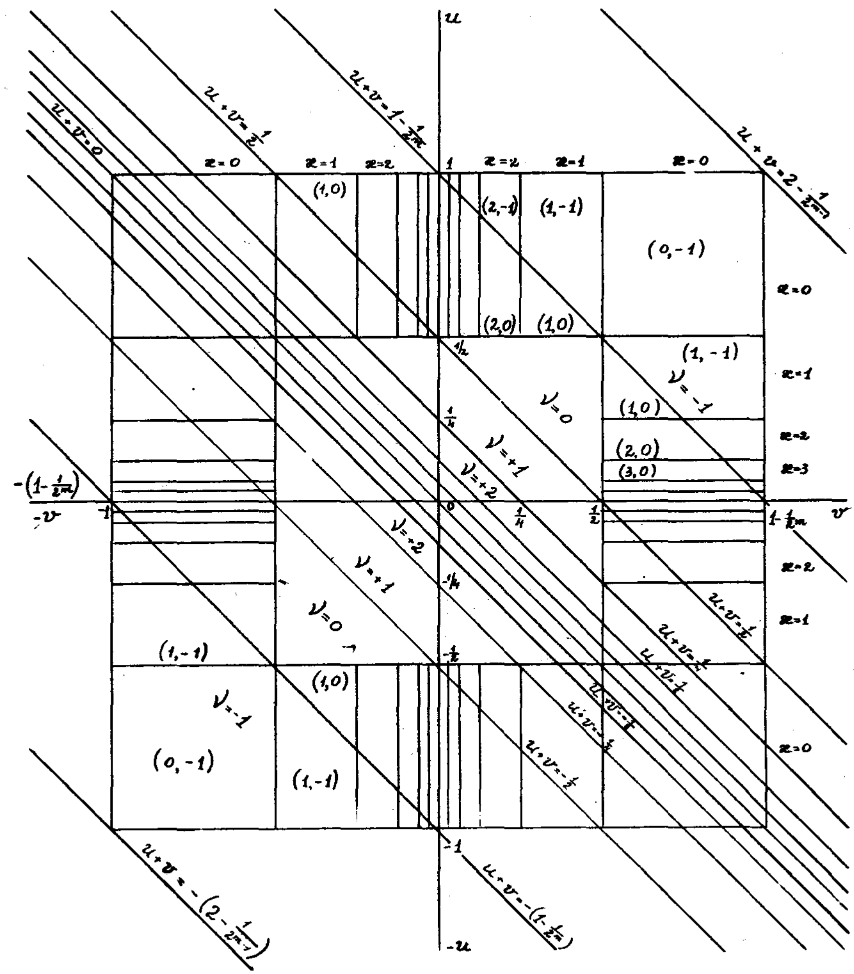

Рис.2.

Условные математические ожидания и вторые моменты для операций (+I7).

Таблица 6

| $\varkappa$ | 0 | I | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_{\mid\varkappa=const}$ | I3,333 | I2,I66 | II,75I | I3,875 | I6,936 | 20,468 | 23,672 | 28,II6 | 32,058 | 36,029 |
| $\mu^2_{\mid\varkappa=const}$ | 206,I7 | I93,I0 | I75,00 | 228,90 | 298,73 | 425,I0 | 576,94 | 792,I2 | I028,5 | I298,4 |

| $\varkappa$ | I0 | II | I2 | I3 | I4 | I5 | I6 | I7 | I8 | I9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_{\mid\varkappa=const}$ | 40,0I4 | 44,007 | 48,003 | 52,00I | 56,000 | 60,000 | 64,000 | 68,000 | 7I,999 | 76,000 |
| $\mu^2_{\mid\varkappa=const}$ | I60I,3 | I936,7 | 2304,4 | 2704,2 | 3I36,I | 3600,0 | 4096,0 | 4624,0 | 5I83,9 | 5776,0 |

| $\varkappa$ | 20 | 2I | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_{\mid\varkappa=const}$ | 80,000 | 84,000 | 88,000 | 92,000 | 96,000 | I00,00 | I04,00 | I0[illegible],00 | II2,00 | II6,00 |
| $\mu^2_{\mid\varkappa=const}$ | 6400,0 | 7056,0 | 7744,0 | 8464,0 | 92I6,0 | I0000 | I08I6 | II[illegible]64 | I2544 | I3456 |

| $\varkappa$ | 30 | 3I | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_{\mid\varkappa=const}$ | I20,00 | I24,00 | I28,00 | I32,00 | I36,00 | I40,00 | I44,00 | I4[illegible],00 | I52,00 | I56,00 |
| $\mu^2_{\mid\varkappa=const}$ | I4400 | I5376 | I6384 | I7424 | I8496 | I9600 | 20736 | 2I[illegible]04 | 23I04 | 24336 |

| $\varkappa$ | 40 | 4I | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_{\mid\varkappa=const}$ | I60,00 | I64,00 | I68,00 | I72,00 | I76,00 | I80,00 | I84,00 | I8[illegible],00 | I92,00 | I96,00 |
| $\mu^2_{\mid\varkappa=const}$ | 25600 | 26896 | 28224 | 29584 | 30976 | 32400 | 33856 | 35[illegible]44 | 36864 | 384I6 |

| $\varkappa$ | 50 | 5I | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_{\mid\varkappa=const}$ | 200,00 | 204,00 | 208,00 | 2I2,00 | 2I6,00 | 220,00 | 224,00 | 22[illegible],00 | 232,00 | 236,00 |
| $\mu^2_{\mid\varkappa=const}$ | 40000 | 4I6I6 | 43264 | 44944 | 46656 | 48400 | 50I76 | 5I[illegible]84 | 53824 | 55696 |

| $\varkappa$ | 60 | 6I | 62 | 63 | 64 |
|---|---|---|---|---|---|
| $M_{\mid\varkappa=const}$ | 240,00 | 244,00 | 248,00 | 252,00 | 0,0000 |
| $\mu^2_{\mid\varkappa=const}$ | 57600 | 59536 | 6I504 | 63504 | 0,0000 |

Условные математические ожидания и вторые моменты для операции (+57).

Таблица 7

| $\varkappa$ | 0 | I | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M\|_{\varkappa=const}$ | I0,64I | 8,3260 | 9,5000 | I2,750 | I6,374 | 20,04I | 23,53I | 28,046 | 32,023 | 36,0II |
| $\mu^2\|_{\varkappa=const}$ | I56,00 | 8208,0 | 9393,0 | I65,00 | 268,I3 | 408,25 | 567,38 | 786,8I | I025,5 | I296,9 |

| $\varkappa$ | I0 | II | I2 | I3 | I4 | I5 | I6 | I7 | I8 | I9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M\|_{\varkappa=const}$ | 40,006 | 44,002 | 47,972 | 52,000 | 55,999 | 59,999 | 63,999 | 67,999 | 7I,999 | 75,999 |
| $\mu^2\|_{\varkappa=const}$ | I600,5 | I936,5 | 2304,I | 2704,I | 3I36,0 | 36000 | 4096,0 | 4624,0 | 5I84,0 | 5776,0 |

| $\varkappa$ | 20 | 2I | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M\|_{\varkappa=const}$ | 79,999 | 83,999 | 87,999 | 9I,999 | 95,999 | 99,999 | I03,99 | I07,99 | III,99 | II5,99 |
| $\mu^2\|_{\varkappa=const}$ | 6400,6 | 7056,0 | 7744,0 | 8464,0 | 92I6,0 | I0000 | I08I6 | II664 | I2544 | I3456 |

| $\varkappa$ | 30 | 3I | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M\|_{\varkappa=const}$ | II9,99 | I23,99 | I27,99 | I3I,99 | I35,99 | I39,99 | I43,99 | I47,99 | I5I 99 | I55,99 |
| $\mu^2\|_{\varkappa=const}$ | I4400 | I5376 | I6384 | I7424 | I8496 | I9600 | 20736 | 2I904 | 23I04 | 24336 |

| $\varkappa$ | 40 | 4I | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M\|_{\varkappa=const}$ | I59,99 | I63,99 | I67,99 | I7I,99 | I75,99 | I79,99 | I83,99 | I87,99 | I9I,00 | I95,99 |
| $\mu^2\|_{\varkappa=const}$ | 25600 | 26896 | 28224 | 29584 | 30976 | 32400 | 33856 | 35344 | 36864 | 384I6 |

| $\varkappa$ | 50 | 5I | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M\|_{\varkappa=const}$ | I99,99 | 203,99 | 207,99 | 2II,99 | 2I5,99 | 2I9,99 | 223,99 | 227,99 | 23I,99 | 235,99 |
| $\mu^2\|_{\varkappa=const}$ | 40000 | 4I6I6 | 43264 | 44944 | 46656 | 48400 | 50I76 | 5I984 | 53824 | 55696 |

| $\varkappa$ | 60 | 6I | 62 | 63 | 64 |
|---|---|---|---|---|---|
| $M\|_{\varkappa=const}$ | 239,99 | 243,99 | 247,99 | 25I,99 | 0,0000 |
| $\mu^2\|_{\varkappa=const}$ | 57600 | 59536 | 6I504 | 63504 | 0,0000 |

Эта команда выполняется аналогично нормализации и отличается от последней только постоянной частью операции.

$$\tau_{-76} = 132 + 4\nu . \tag{60}$$

Поэтому все сказанное об операции (-75) справедливо и для операции (-76).

В заключение рассмотрим часто встречающийся случай - суммирование парных произведений.

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + g_i . \tag{61}$$

Пусть используются две команды (+35) с модификацией адреса и (+ I6) без модификации адреса.

Согласно (7) имеем:

$$M\tau_{\tau\ell} \leq \sqrt{\frac{(\ell-1)}{2\tau} \cdot \left(D\tau_{+35} + D\tau_{+16}\right)} \; ; \tag{62}$$

$$\left(\frac{M\tau_{\tau\ell}}{\frac{1}{\tau}\sum\limits_{k=1}^{s} \tau_k M\tau_k}\right)^2 \leq \frac{\frac{\ell-1}{2\tau}\left(D\tau_{+35}+D\tau_{+16}\right)}{\frac{1}{4}\left(M\tau_{+35}+M\tau_{+16}\right)^2} = \frac{2(\ell-1)}{\tau} \frac{D\tau_{+35}+D\tau_{+16}}{\left(M\tau_{+35}+M\tau_{+16}\right)^2} .$$

Потребуем, чтобы эта величина была менее $\varepsilon^2$. Это, очевидно, будет при

$$\tau_{min} \geq \frac{2(\ell-1)}{\varepsilon^2} \frac{D\tau_{+35}+D\tau_{+16}}{\left(M\tau_{+35}+M\tau_{+16}\right)^2} , \tag{63}$$

откуда для $\varepsilon$ = 0,0I получим, используя табл. 8 ,

$$\tau_{min} \geq 260(\ell-1) . \tag{64}$$

Для получения абсолютной, но более грубой оценки (I4), нужно взять значения для операции сложения (+I7). Тогда

$$\tau_{min} \geq 1200(\ell-1) . \tag{65}$$

Для задач с большим объемом вычислений, рассмотренных в [I] , обычно удается удовлетворить условию (65) и тем более условию (64).

Таблица 8

| | $M\tau_к$, мксек | | $D\tau_к$, мксек$^2$ | $M\tau_к / M\tau_к^2$, $\times 10^4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| операции | б/модиф. | с модиф. | | б/модиф. | с модиф. |
| +I4 | 222 | 246 | 3660 | 730 | 600 |
| +I5,+I6 | I98 | 222 | 3600 | 920 | 730 |
| +I7 | I74 | I98 | 3600 | I200 | 920 |
| +24 | 222 | 246 | 3600 | 730 | 600 |
| +25,+26 | I98 | 222 | 3600 | 920 | 730 |
| +27 | I74 | I98 | 3600 | I200 | 920 |
| +30 | 374 | 398 | 5I8 | 37 | 33 |
| +3I,+32 | 350 | 374 | 5I8 | 42 | 37 |
| +33 | 326 | 350 | 5I8 | 49 | 42 |
| +34 | 367 | 39I | 468 | 35 | 34 |
| +35,+36 | 343 | 367 | 468 | 40 | 35 |
| +37 | 3I9 | 343 | 468 | 46 | 40 |
| +54 | 220 | 244 | 3700 | 760 | 620 |
| +55,+56 | I96 | 220 | 3700 | 960 | 760 |
| +57 | I72 | I96 | 3700 | I250 | 960 |
| -70 | 350 | 374 | 5I8 | 42 | 37 |
| -75 | I32+200 | I56+224 | 34+I720 | 20+430 | I4+340 |
| -76 | I36+204 | I60+228 | 34+I720 | I8+4I0 | I3+330 |



В заключение авторы выражают свою признательность инженерам В.Я. Пыхтину за консультации по характеру выполнения операций в ЭВМ "Минск-2" и Н.Я.Цыбренко за представление статистических данных.

## Литература


I. Э.В. Евреинов, Ю.Г. Косарев. О решении задач на универсальных вычислительных системах. - Вычислительные системы, Новосибирск, Изд-во "Наука", Сибирское отделение, I965, вып. I7, стр. I06-I64.

2. Э.В. Евреинов. Универсальные вычислительные системы с частично переменной структурой. - Вычислительные системы, Новосибирск, Изд-во "Наука", Сибирское отделение, I965, вып. I7, стр. 3-60.

3. Э.В. Евреинов, Г.П. Лопато. Универсальная вычислительная система "Минск-222". - Вычислительные системы, Новосибирск, Изд-во "Наука", Сибирское отделение, I966, вып. 23, стр. I3-20.


Поступила в редакцию
7 октября I966 г.