

УДК.518.5+681.142.2

РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫХ ПРОГОНОК
НА ВС "МИНСК-222"

Н.Н. Миренков

Описывается реализация метода расщепления с использованием продольно-поперечных прогонок на примере решения задачи обтекания тела несжимаемой вязкой жидкостью. Приводятся оценки времени счета для произвольного числа машин (ℓ) и точек (N).

I. В осесимметрическом случае движение несжимаемой вязкой жидкости описывается системой [1,2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] f_1(y) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] f_2(y) = 0, \end{aligned} \quad (I)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) f_3(y) = 0,$$

где u - x -я, а v - y -я компоненты скорости, p - давление, ν - коэффициент вязкости, $f_s(y)$ ($s=1,2,3$) - специальные функции, связанные с численным методом решения; производные по времени добавлены для построения релаксационного процесса. К системе присоединяются определенные начальные и краевые условия.

Методом расщепления двумерная задача сводится к последовательности одномерных [1,2].

На каждом дробном шаге $t=(n+\frac{1}{2})\tau$ решается система:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) f_1(y) = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial t} + \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) f_2(y) = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} f_3(y) = 0, \end{aligned} \quad (I, a)$$

где $q = \rho + u^2/2$.

На каждом целом шаге $t=n\tau$ решается система:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \left[v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] f_1(y) = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial t} + \left[\frac{\partial q}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{y^2} \right) \right] f_2(y) = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial t} + \left(\frac{v}{y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) f_3(y) = 0, \end{aligned} \quad (I, б)$$

где $Q = \rho + v^2/2$

В качестве начальных условий берутся функции u, v, p , считанные на предыдущем шаге. Аппроксимация (I,а) и (I,б) приводит к системам разностных уравнений неявного и явного вида. Первые решаются прогонкой, вторые - явным методом. Расчетные формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} g_{im}^k &= p_{im}^k + (u_{im}^k)^2/2; \\ A_{im}^k &= 1 / [\tau_3(m) - A_{i-1,m}^k]; \\ B_{im}^k &= \frac{B_{i-1,m}^k + \tau_4(m) u_{im}^k + \alpha_1 (u_{i+1,m}^k - u_{i-1,m}^k) - \tau_5(m) (g_{im}^k - g_{i-1,m}^k)}{\tau_3(m) - A_{i-1,m}^k}; \\ C_{im}^k &= [\alpha_2 + (\beta-1) u_{im}^k] / [\tau_1(m) + (2\beta-1) u_{im}^k - (\alpha_2 + \beta u_{im}^k) C_{i-1,m}^k]; \\ D_{im}^k &= \left[D_{i-1,m}^k (\alpha_2 + \beta u_{im}^k) + [\tau_2(m) + \alpha_1 (2\beta-1) u_{im}^k] u_{im}^k + \alpha_1 [(\alpha_2 + (\beta-1) u_{im}^k) u_{i+1,m}^k + (\alpha_2 + \beta u_{im}^k) u_{i-1,m}^k] \right] / [\tau_1(m) + (2\beta-1) u_{im}^k - (\alpha_2 + \beta u_{im}^k) C_{i-1,m}^k]; \\ u_{im}^{k+1/2} &= A_{im}^k u_{i+1,m}^{k+1/2} + B_{im}^k; \\ v_{im}^{k+1/2} &= C_{im}^k v_{i+1,m}^{k+1/2} + D_{im}^k; \\ Q_{im}^{k+1/2} &= g_{im}^k - (u_{im}^{k+1/2})^2/2 - \tau_{10}(m) (u_{i+1,m}^{k+1/2} - u_{i-1,m}^{k+1/2}) + (v_{im}^{k+1/2})^2/2 - \tau_{10}(m) (u_{i+1,m}^k - u_{i-1,m}^k); \\ \varepsilon_{im}^k &= \tau_{10}(m) / [\tau_{11}(m) - \varepsilon_{i,m-1}^k]; \\ J_{im}^k &= \frac{J_{i,m-1}^k + \tau_{12}(m) u_{i,m-1}^{k+1/2} + \tau_{13}(m) v_{i,m-1}^{k+1/2} + \alpha_1 v_{i,m-1}^{k+1/2} - \tau_{14}(m) (Q_{im}^{k+1/2} - Q_{i,m-1}^{k+1/2})}{\tau_{11}(m) - \varepsilon_{i,m-1}^k}; \end{aligned}$$

$$K_{im}^k = \frac{z_6(\pi) + (\beta' - 1)U_{im}^{k+1/2}}{z_7(\pi) + (2\beta' - 1)U_{im}^{k+1/2} - K_{im}^k (\alpha_3 + \beta U_{im}^{k+1/2})};$$

$$L_{im}^k = \left\{ (\alpha_3 + \beta' U_{im}^{k+1/2}) L_{i,m-1}^k + [z_8(\pi) + \alpha_1 (\beta' - 1) U_{im}^{k+1/2}] U_{i,m+1}^{k+1/2} + [z_9(\pi) + \alpha_1 (2\beta' - 1) U_{im}^{k+1/2}] U_{im}^{k+1/2} + (\alpha_4 + \alpha_1 \beta' U_{im}^{k+1/2}) U_{i,m-1}^{k+1/2} \right\} / [z_7(\pi) + (2\beta' - 1) U_{im}^{k+1/2} - K_{i,m-1}^k (\alpha_3 + \beta' U_{im}^{k+1/2})];$$

$$U_{im}^{k+1} = K_{im}^k U_{i,m+1}^{k+1} + L_{im}^k;$$

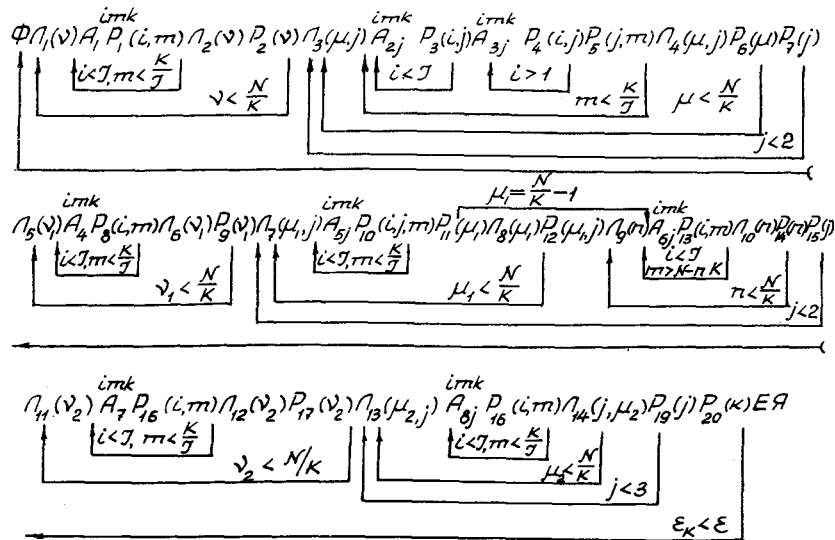
$$V_{im}^{k+1} = E_{im}^k U_{i,m+1}^{k+1} + \varphi_{im}^k;$$

$$P_{im}^{k+1} = Q_{im}^{k+1/2} - (U_{im}^{k+1})^2 - z_{19}(\pi) U_{i,m+1}^{k+1/2} - z_{20}(\pi) U_{im}^{k+1/2};$$

$$E_k = \max \left\{ \max |U_{im}^{k+1} - U_{im}^k|, \max |V_{im}^{k+1} - V_{im}^k|, \max |P_{im}^{k+1} - P_{im}^k| \right\},$$

где i - номер узла разностной сетки по оси x , m - по оси y ; $A_{im}^k, B_{im}^k, C_{im}^k, D_{im}^k, E_{im}^k, J_{im}^k, K_{im}^k, L_{im}^k$ - прогоночные коэффициенты; $z_j(\pi) = z_j(\pi, f_s(\pi))$ ($j = 1, \dots, 20$) и α_ℓ ($\ell = 1, 2, 3$) - функции, зависящие от параметров задачи; $\beta = 1$ при $U_{im} \geq 0$, $\beta = 0$ при $U_{im} < 0$; $\beta' = 1$ при $U_{im} \geq 0$, $\beta' = 0$ при $U_{im} < 0$. Начальные значения во всех рекуррентных формулах определяются граничными условиями.

2. Вычисления на ЭВМ "Минск-22" производятся в соответствии с операторной схемой:



где $N = J \times M > 4000$ - число точек прямоугольной области, в которой решается задача;

K - число кодов в считываемой с магнитной ленты (МЛ) порции;

N/K - число порций;

K/j - число строк разностной сетки в порции;

начальные значения - массивы u, v, p - находятся на МЛ;

массивы поперечных прогоночных коэффициентов насчитываются порциями и хранятся на МЛ;

Φ - формирует команды, подготавливает константы, зависящие от параметров задачи, насчитывает массивы $z_j(\pi)$, которые постоянно находятся в МОЗУ;

P_α ($\alpha = 1, \dots, 20$) операторы условного перехода, осуществляющие переход к следующему оператору после повторения заданного числа циклов;

A_{1im}^{imk} - вычисляет g_{im}^k ;

A_{2j}^{imk} - вычисляет прогоночные коэффициенты A_{im}^k ,

B_{im}^k (при $j = 1$) и C_{im}^k, D_{im}^k (при $j = 2$);

A_{3j}^{imk} - вычисляет $U_{im}^{k+1/2}$ ($j=1$), $V_{im}^{k+1/2}$ ($j=2$);

A_{4im}^{imk} - вычисляет Q_{im}^k ;

A_{5j}^{imk} - вычисляет прогоночные коэффициенты E_{im}^k ,

J_{im}^k (при $j = 1$) и K_{im}^k, L_{im}^k (при $j = 2$);

A_{6j}^{imk} - вычисляет U_{im}^{k+1} ($j=1$), V_{im}^{k+1} ($j=2$);

A_{7im}^{imk} - вычисляет P_{im}^{k+1} ;

A_{8j}^{imk} ($j = 1, 2, 3$) - вычисляет E_k ;

Π_β ($\beta = 1, 2, \dots, 14$) - производит обмен с МЛ.

3. Объем памяти, необходимый для решения задачи,

$$V = 6 \cdot N + 20 \cdot M + 800, \quad (3)$$

где первый член - число ячеек для массивов $U_{im}^k, U_{im}^{k+1}, V_{im}^k, V_{im}^{k+1}, P_{im}^k, P_{im}^{k+1}$; второй - для массивов $z_j(\pi)$; третий - для программы и констант.

Для $N \leq 1000$ "Минск-22" решает задачу без использования МЛ. При увеличении N до 4000 время обмена с МЛ возрастает от нуля до максимального (здесь время приводится в расчете на одну точку). Практически время решения t состоит из времени счета $t_{\text{сч}}$ операторов A_n^{imk} ($n = 1, 2, \dots, 8$) и времени t_Π обмена с МЛ.

$$t = t_{\text{сч}}' + t_\Pi = 0,036 + 0,024 = 0,060 \text{ сек}, \quad (4)$$

где в t_n (для $N > 4000$) входит запись I2 и считывание 23 массивов; предполагается, что обмен производится оптимальными порциями [3] и простои, связанные с подводом зон, отсутствуют.

4. Распараллеливание вычислений при продольных прогонках не вызывает затруднений: область решения разделяется на полосы, обслуживаемые отдельными машинами.

Схема параллельных вычислений при поперечных прогонках была предложена Э.В. Евреиновым и Ю.Г. Косаревым. Ее реализацией занимался [Е.Н. Луков], но не успел закончить. Согласно этой схеме, информация, необходимая для непрерывного счета (прогоночные коэффициенты, $U_{i,m}^{k+1/2}$, $V_{i,m}^{k+1/2}$, $Q_{i,m}^{k+1/2}$), передается следующей или предыдущей машине в соответствии с рис. 1, при этом для запоминания прогоночных коэффициентов в каждой машине достаточно $[2(\ell-1)+1]M/\ell$ ячеек памяти, где L - номер машины.

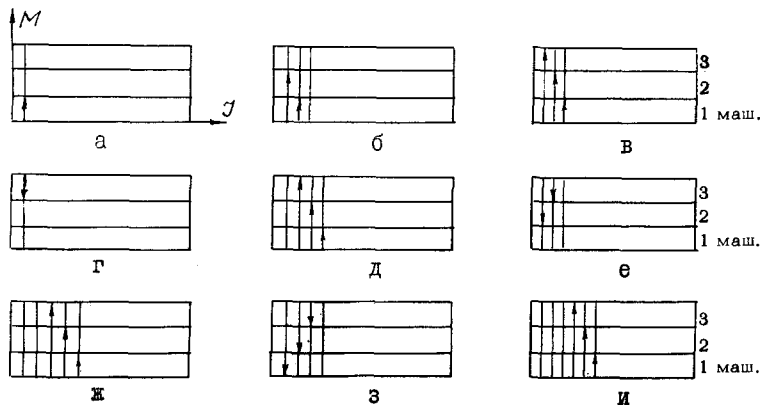


Рис. 1. Схема параллельных вычислений при поперечной прогонке для системы из 3-х машин.

Случай а) первая машина вычисляет прогоночные коэффициенты, вторая и третья - простаивают;

б) первая передала информацию второй, после чего они ведут прогонку в прямом направлении;

в) первая передала информацию второй, вторая - третьей, и все машины работают;

г) третья ведет прогонку в обратном направлении, вторая и первая простаивают;

д) все машины вычисляют прогоночные коэффициенты для соответствующих i ;

е) третья и вторая ведут прогонку в обратном направлении, первая - простаивает;

ж) аналогично д);

з) все машины ведут прогонку в обратном направлении, после чего выполняются, чередуясь, случаи ж) и з) для соответствующих i .

Теперь нетрудно видеть, что отношение времени, связанного с особенностями ВС, к общему времени счета равно

$$\theta = \frac{\ell-1}{J} \cdot \frac{t_1}{t_2} + \frac{\ell}{M} \cdot \frac{18t_1 \alpha}{t_2}, \quad (5)$$

где t - время, необходимое для поперечной прогонки (прямой и обратной) в одной точке;

t_1 - время передачи одного кода;

t_2 - время, затрачиваемое одной машиной для реализации шага по времени;

$$\max \alpha = 1,66.$$

Первый член характеризует процент простоев, второй - передач. Для $t = 0,012$ сек, $t_1 = 64 \cdot 10^{-6}$ сек, $t_2 = 0,06$ сек, $\alpha = 1,66$,

$$\theta = 0,35 \frac{\ell-1}{J} + 0,032 \frac{\ell}{M}, \quad \text{то есть при } \ell-1/J \leq 0,1 \quad \text{и} \quad (6)$$

$$\ell/M < 0,3 \quad (\text{что для системы всегда имеет место})$$

$$\theta < 5\%. \quad (7)$$

Отсюда видно, что данный метод позволяет распараллеливать процесс вычислений практически на любое число ветвей. В конкретных реализациях при $\ell \leq 10$ можно использовать метод "транспонирования" массивов вокруг заштрихованной диагонали (рис.2),

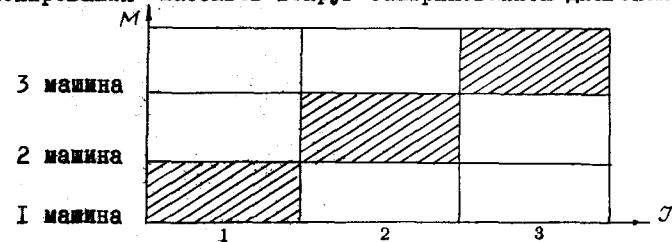
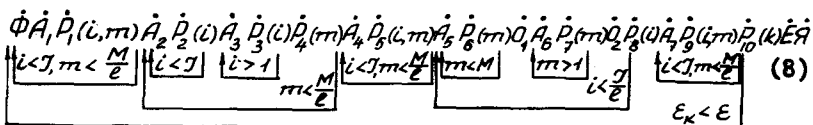


Рис.2. "Транспонирование" массивов для случая 3 машин.

в результате которого в каждой машине вместо строки оказывается соответствующий столбец. При "транспонировании" несколько проще схема счета, пока число параллельных ветвей мало (≈ 10), но с увеличением последних время обмена информацией между машинами становится значительным.

5 Операторная схема параллельного алгоритма



содержит ρ - операторы, состоящие из одинаковых компонент, совпадающих с одноименными операторами схемы (2).

ρ - оператор \hat{O}_1 передает информации последующей машине при ведении прогонки вперед, \hat{O}_2 - передает информации предыдущей машине при ведении прогонки назад.

6. Как было показано в п. 4, дополнительные затраты времени, связанные с особенностями ВС, малы. Поэтому, если число машин ℓ и точек N таково, что система реализует алгоритм без использования МЛ, то время счета на ней равно (см. таблицу):

$$t_{cz}^c = t_{cz}^1 / \ell = 0,036 / \ell, \quad (9)$$

Т а б л и ц а
Время выполнения одного шага, в сек

$N \backslash \ell$	1	2	3	4	5	6
1 000	36	18	12	9	7,2	6
4 000	240	88	54	36	29	24
8 000	480	240	123	88	71	54
12 000	720	360	240	180	120	88
16 000	960	480	320	240	192	123

а отношение времени, затрачиваемого одной машиной, к времени, затрачиваемого системой,

$$\kappa = \alpha \cdot \ell = \frac{0,06 \cdot \ell}{0,036} = 1,66 \cdot \ell. \quad (10)$$

Система может быть эффективно использована и в случае, когда часть информации (а именно значения массивов u, v, p в предыдущий момент времени) находится на МЛ. Например, при $N = 4\ 000$, $\ell = 2$, $t_{cz} = 0,036/2 = 0,018$ сек, $t_n = 20 \cdot 200 \cdot 10^{-6} = 0,004$ сек, где 20 - число считываемых массивов, 200 мксек - время считывания одного кода системой из 2 машин. Здесь коэффициент $\alpha = 0,06/2 \cdot 0,022 = 1,36$.

Если соотношение ℓ и N вынуждает систему использовать МЛ в полной мере, то $\alpha \rightarrow 1$. Заметим, что результаты получены в

предположении идеальной работы МЛ и отсутствия простоев на подвод зон. Практически эффективность системы еще больше.

Выводы

На системе из ℓ машин рассматриваемый алгоритм реализуется в $\alpha \times \ell$ раз быстрее, где $\alpha = (1 - 1,66)$. Программирование данной задачи для системы по сложности и объему практически такое же, как и для одиночной ЭВМ.

Л и т е р а т у р а

1. Н. Владимирова, Б.Г. Кузнецов, Н.Н. Яненко. Численный расчет обтекания тела плоским потоком несжимаемой вязкой жидкости. - Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск, Изд. "Наука", Сиб. отд., 1966 г., стр. 186-192.
2. Н.Н. Яненко. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, Изд. "Наука", Сиб. отд., 1967 г.
3. Л.В. Головашкина, Ю.Г. Косарев. Программа решения системы линейных уравнений на ВС "Минск-222". - Вычислительные системы, Новосибирск, Изд. "Наука", Сиб. отд., 1967 г., вып. 24, стр. 55-76.

Поступила в редакцию
30.X.1967 г.