1969 г. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ Выпуск 34

УДК 681.142.1.01

О СТЕПЕНИ ИНФОРМАЦИОННОГО ГРАФА

М.И. Кратко

Настоящая работа возникла при попытке доказательства справедливости одной гипотезы Ю.Г. Решетняка, высказанной им при исследовании оптимальных вариантов соединения элементов вычислительной системы [4]. Постановки задачи и гипотезы, сформулированные в настоящей работе, навеяны указанной работой Ю.Г.Решетняка. Она же и работа [2] помогут читателю найти связь этих задач с проблемами, возникающими в вычислительной технике при проектировании сверхбыстродействующих вычислительных систем.

Введем некоторые обозначения и определения. Значения неопределяемых здесь терминов можно найти в книге К. Бержа [I].

Пусть $G=\langle X,U\rangle$ - конечный ориентированный граф с множеством вершин X и множеством дуг U. Непустое множество упорядоченных пар $R=\{\langle X_1,x_1\rangle,\dots,\langle X_p,x_p\rangle\}$, где X_i - непустое подмножество X, $\bigcup_{i=1}^{p} X_i=X$ и $x_i\in X$ $(1\le i\le p)$, назовем разбиением графа G.

Разбиение R назовем:

а) m- кратным, если существуют такие i,j $(i\neq j)$, что множество $X_i\cap X_j$ содержит точно m элементов, и не существует таких i',j' $(i'\neq j')$, что множество $X_{i'}\cap X_{j'}$ содержит больше, чем m элементов;

б) m - зависимым, если среди вершин $x_1,\dots,x_p$ имеется точно m совпадающих вершин и никакие $m+1$ вершин из этого набора не являются совпадающими;

в) рассеянным, если каждое множество X_i $(1\le i\le p)$ является одноэлементным множеством;

г) простым, если оно I-зависимо и 0-кратно, т.е. для любых i,j $(i\neq j)$ $X_i\cap X_j=\varnothing$ и $x_i\neq x_j$.

Пусть K_i - выделенное в графе G дерево (т.е. дуги этого дерева являются дугами графа G) с корнем x_i, содержащее в качестве вершин все вершины множества X_i (и еще, может быть, другие), и U_{K_i} - множество дуг этого дерева. Заметим, что, вообще говоря, пара $\langle X_i, x_i\rangle$ не определяет дерева K_i однозначно.

Разбиение $R=\{\langle X_1,x_1\rangle,\dots,\langle X_p,x_p\rangle\}$ графа G назовем правильным, если существуют такие $K_1,\dots,K_p$, что $U_{K_i}\cap U_{K_j}=\varnothing$, если $i\neq j$. Назовем его линейно правильным, если оно правильно и деревья $K_1,\dots,K_p$ не имеют ветвлений (т.е. степень каждой вершины ≤ 2).

Основное определение. Граф G назовем (m,n)- информационным, если все его не более чем m- кратные и n зависимые разбиения правильны. Назовем его (m,n) - вполне информационным, если они линейно правильны.

В дальнейшем мы будем рассматривать только симметрические графы. Будем называть их просто графами. При изображении таких графов вместо двух взаимно противоположных дуг будем рисовать одно ребро. Степенью графа будем называть максимальную степень его вершины. Нас будут интересовать простые разбиения, поэтому (0, I) - информационные и (0,I) - вполне информационные графы будем просто называть информационными и вполне информационными.

Тривиальным примером информационного и вполне информационного (равно как и $(0,n)$ - вполне информационного для любого n) является полный граф. Очевидно, что любой вполне информационный граф является информационным и, очевидно, также, что существуют информационные графы, не являющиеся вполне информационными. Пример такого графа показан на рис. I.

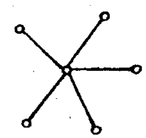

Рис. I.

Отметим, что для того, чтобы граф G, имеющий n вершин, был связным (несвязные графы, очевидно, не могут быть информационными), необходимо, чтобы он имел, по крайней мере, $n-1$ ребро. Рис. I показывает, что уже в классе таких графов имеется информационный граф.

Пусть множество вершин графа G разбито на два класса X' и X'', имеющие, соответственно, число вершин $n(X')$ и $n(X'')$. Каждое такое разбиение однозначно определяет разрез $\rho(X',X'')$ графа G, состоящий из тех и только тех ребер, которые инцидентны вершинам, принадлежащим разным классам. Обозначим символом $\nu(X',X'')$ число ребер разреза $\rho(X',X'')$. Легко видеть, что для того, чтобы граф G был информационным, необходимо, чтобы для любого разбиения (X',X'') его вершин

$$\nu(X',X'') \geq min\,(n(X'),n(X'')).$$

К сожалению, это условие не является достаточным. Граф, показанный на рис. 2, удовлетворяет этому условию, но разбиение

$$R=\{<\{A\},B>,<\{B\},C>,<\{C\},A>,<\{\alpha\},\beta>,<\{\beta\},\gamma>,<\{\gamma\},\alpha>\}$$

не является в нем правильным.

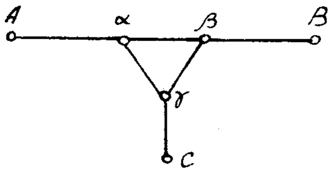

Рис. 2.

ТЕОРЕМА I. Если граф G таков, что все его рассеянные, 0-кратные и не более чем 2-зависимые разбиения правильны, то он является вполне информационным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R=\{<X_1,x_1>,\dots,<X_p,x_p>\}$ – произвольное простое разбиение графа G. Будем строить по нему разбиение R' следующим образом. В каждом классе X_i занумеруем произвольным образом все элементы, например, $X_i=\{x_i^1,x_i^2,\dots,x_i^t\}$.

Рассмотрим произвольную вершину x_i^j. Если она входит в качестве второго элемента в некоторую пару разбиения R, например, в пару $<X_s,x_s>$, т.е. $x_s=x_i^j$ и $j\neq t$, то в разбиение R' вносим две пары $<\{x_i^{j+1}\},x_i^j>$ и $<\{x_s^1\},x_i^j>$, где x_s^1 – элемент класса X_s, получивший при указанной нумерации первый номер. Если при тех же условиях $j=t$, то в R' вносим только одну пару $<\{x_s^1\},x_i^j>$.

Если же вершина x_i^j не входит в качестве второго элемента ни в какую пару разбиения R и $j\neq t$, то в R' вносим пару $<\{x_i^{j+1}\},x_i^j>$. При $j=t$ в R' не вносится никакая пара.

Полученное разбиение R', очевидно, является рассеянным, 0-кратным и не более чем 2-зависимым. Оно обладает тем свойством, что для каждой пары $<X_i,x_i>$ разбиения R в нем найдется множество пар вида $\{<\{x_i^1\},x_i>,<\{x_i^2\},x_i^1>,\dots,<\{x_i^t\}\,x_i^{t-1}>=R'_i$, причем $R'=\bigcup_i R'_i$.

По условию, разбиение R' правильно для графа G. Но тогда систему деревьев, соответствующих парам разбиения R'_i, можно превратить в одно дерево (без ветвлений), так как любая вершина x_i^j $(i\neq t)$ является конечной вершиной одного дерева и корневой – другого. Таким образом мы получим для каждого R'_i дерево (без ветвлений) K_i с корневой вершиной x_i и концевой x_i^t,

содержащее все вершины класса X_i. Если $i\neq j$, то $U_{k_i}\cap U_{k_j}=\emptyset$. Следовательно, разбиение R является линейно правильным, и граф G –вполне информационным. Теорема доказана.

Возникает вопрос: верно ли, что если в графе G все простые рассеянные разбиения правильны, то граф G информационный? Ответ на этот вопрос не известен.

<u>Следствие из теоремы I</u>. Если в графе G степени n все простые рассеянные разбиения правильны, то существует граф G' степени $2n$, содержащий столько же вершин, сколько в G, и являющийся вполне информационным.

Граф G' получается из G заменой каждого ребра двумя параллельными ребрами.

<u>Основная задача</u>. Рассмотрим следующую функцию $S(n)$, определенную на множестве натуральных чисел. Для данного n рассмотрим все информационные графы, содержащие ровно n вершин. Выберем из них граф, имеющий минимальную степень, и значение этой степени как раз является значением функции $S(n)$. Задача состоит в исследовании этой функции.

Подобным образом можно сформулировать аналогичные задачи для (m,n) – информационных графов с различными дополнительными условиями. Некоторые из таких задач будут сформулированы нами позже.

О функции $S(n)$ известно очень мало. Не известно даже, например, является ли она монотонной. Ю.Г. Решетняк показал, что для бесконечного числа точек $S(n)<2\sqrt{n}$. Он высказал гипотезу, что n – мерный единичный куб является информационным графом. Если эта гипотеза верна, то отсюда будет следовать, что для бесконечного числа точек $S(n)<\log_2 n$.

ТЕОРЕМА 2. Для бесконечного числа точек

$$S(n)<c\cdot[\log_2 n]^2,$$

где c – некоторая константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства воспользуемся конструкцией, предложенной Ю.П. Офманом [3]. Ю.П. Офман определил следующий класс графов (здесь мы не придерживаемся терминологии Офмана).

Граф ранга I

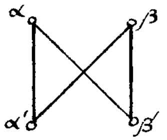

Рис. 3.

Вершины α, β называются верхними вершинами этого графа, α', β' – нижними.

Граф ранга $n+1$ получается из двух графов ранга n следующим образом. Сверху и снизу к ним добавляется по строке вершин, и они соединяются так, как показано на рис. 4. Верхними вершинами этого графа являются все вершины верхней строки, нижними – нижней. Например, граф ранга 2 показан на рис. 5.

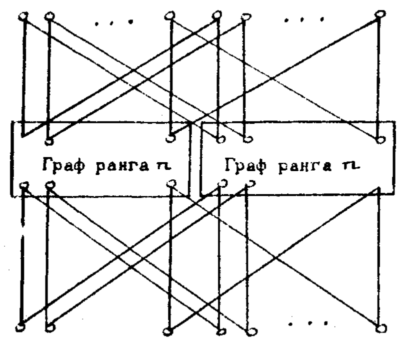

Рис. 4.

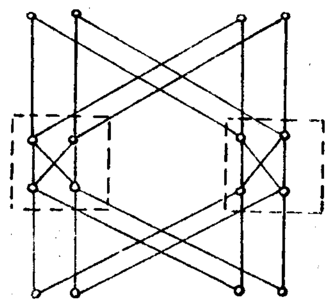

Рис. 5.

Более подробное описание конструкции этих графов можно найти в упомянутой работе Ю.П. Офмана. Они построены так, что для них имеет смысл понятие "строка вершин". Очевидно, что любой граф из нашего класса, имеющий n вершин, имеет строк $< 2\log_2 n$. Степень же любого такого графа ≤ 4.

Пусть G – некоторый граф из указанного класса и пусть каждая его строка состоит из z элементов. Ю.П. Офман показал, что для любых двух перестановок чисел $\langle j_1, j_2, \ldots, j_z \rangle$, $\langle j_1', j_2', \ldots, j_z' \rangle$ ($j_i, j_i' = 1, 2, \ldots, z$) можно выделить в графе G непересекающиеся пути, соединяющие первую вершину верхней строки с j_1-й вершиной нижней строки, вторую вершину верхней строки – с j_2-й вершиной нижней строки и т.д. В то же время первая вершина нижней строки может быть соединена с j_1'-й вершиной верхней строки, вторая вершина нижней строки – с j_2'-й вершиной верхней строки и т.д.

Нетрудно видеть, что если мы каждое ребро графа G заменим двумя параллельными ребрами, то в таком графе все простые рассеянные разбиения множества $X_1 \cup X_2$ являются правильными (где

X_1 – множество вершин верхней строки, X_2 – множество вершин нижней строки).

Выбрав теперь любые другие две строки графа G и рассматривая одну из них как верхнюю, другую как нижнюю, а все остальные строки как промежуточные, мы можем соединить их ребрами подобно тому, как были соединены вершины в G. Тогда любое простое рассеянное разбиение множества вершин этих строк будет правильным. Проделав такую операцию для всех пар вершин, мы получим граф G', в котором любое простое рассеянное разбиение будет правильным. Согласно следствию из теоремы I, если мы каждое ребро графа G' заменим двумя параллельными ребрами, то полученный граф будет информационным. Степень его, очевидно, $< c \cdot [\log_2 n]^2$. Теорема доказана.

При необходимости константу c можно посчитать, но так как сейчас неизвестна никакая нетривиальная нижняя оценка для функции $S(n)$, то эта константа не представляет интереса.

Что касается нижней оценки для функции $S(n)$, то здесь можно высказать гипотезу, что $S(n) \geq \log_2 n$.

Перейдем к постановкам еще некоторых задач.

Назовем информационный граф G S-устойчивым, если он таков, что граф, полученный из него выбрасыванием любых S вершин (и дуг, инцидентных этим вершинам), является информационным. С точки зрения проблем, возникающих в вычислительной технике, представляет интерес исследование функции $S(n)$ для S-устойчивых графов.

В более общей постановке только что сформулированная задача может быть поставлена следующим образом. Пусть K – некоторый класс информационных графов. Введем функцию $T(x, y)$ следующим образом. Для данного p рассматриваем подкласс K_p класса K, состоящий из всех графов этого класса, имеющих ровно p вершин. Пусть q – некоторое натуральное число. Выбираем произвольный граф Γ из класса K_p и, выбросив из него произвольные q вершин, смотрим, какой максимальный информационный подграф можно выбрать в оставшемся графе. Проделываем это для всевозможных наборов, состоящих из q вершин графа Γ. Из всех информационных подграфов выбираем минимальный. Число его вершин назовем степенью устойчивости графа Γ. Если это число равно m, то это значит, что как бы мы ни выбрасывали из Γ q вершин в нем останется подграф, являющийся информационным и имеющий, по крайней мере, m вершин. Степенью устойчивости класса K_p назовем максимум степеней устойчивостей входящих в него графов и это число принимаем равным значению функции $T(p,q)$.

Представляет большой интерес нахождение такого класса графов, содержащего для каждого натурального n точно один граф с n вершинами, для которого функция $S(n)$ была бы достаточно низкой, а $T(n, f(n))$ – достаточно высокой, где $f(n)$ –некоторая не очень быстро растущая функция от n.

Литература

1. К. Берж. Теория графов и ее применения. ИЛ, 1962.
2. Э.В. Евреинов, Ю.Г. Косарев. О возможности построения вычислительных систем высокой производительности. Новосибирск, Изд. СО АН СССР, 1962.
3. Ю.П. Офман. Универсальный автомат. – Труды Моск.мат. общества. т. 14 (1965), стр. 186–199.
4. Ю.Г. Решетняк. О задаче соединения элементов вычислительной системы. – Вычислительные системы, Новосибирск, 1962, вып. 3, стр. 17–30.

Поступила в редакцию
18.IX.1968 г.