

УДК 62-5:007:621.391:519.2

СРАВНЕНИЕ РЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ ПО МОЩНОСТИ  
И ЗАТРАТАМ

Н.Г. Загоруйко

Ковером [1,2,3] предложен критерий мощности ( $B$ ) для сравнения решающих функций между собой:

$$B = 2(M+1),$$

где  $M$  - число степеней свободы решающей функции. Чем больше  $B$ , тем больше вероятность того, что с помощью решающей функции данного типа можно осуществить любое конкретное разделение  $L$  объектов на два образа. С другой стороны, необходимую дихотомию почти наверняка нельзя получить, если  $L > B$ .

По этому критерию решающие функции известных типов располагаются в таком порядке:

Т а б л и ц а I

Мощность некоторых решающих функций

Тип решающей функции	Мощность
Линейная решающая функция (гиперплоскость)	$2(n+1)$
Сфера	$2(n+2)$
Общая поверхность второго порядка	$(n+1)(n+2)$
Полиномиальная поверхность $\ell$ -го порядка	$2 C_{n+\ell}^{\ell}$

(Здесь  $n$  - размерность пространства).

детерминистский алгоритм типа "дробящихся эталонов" [4]

Этой таблице может занимать самую нижнюю строку: если нет ограничений на число эталонов, то этот алгоритм может осуществить любую из  $2^L$  дихотомий.

Более полная сравнительная оценка алгоритма должна, очевидно, быть функцией не только мощности  $B$ , но и затрат  $N$ , необходимых для их использования, - например, объема памяти и количества машинных операций. Попробуем сравнить некоторые алгоритмы по этим показателям.

Использование той или иной решающей функции предусматривает необходимость хранения в памяти машины параметров этих функций ("весов" [3]). Количество этих параметров быстро растет с ростом сложности решающей функции. В случае использования полинома  $2$ -й степени нужно хранить в памяти

$$N_{\text{пар}} = \sum_{\ell=1}^{\ell} \left( \frac{\prod_{i=1}^{\ell} (n+\ell+i)}{2^{\ell-1}} + 1 \right) \text{ чисел.}$$

Необходимое количество машинных операций типа "сложение" (если считать операцию "умножения" эквивалентной трем операциям "сложения") для полинома  $2$ -й степени равно

$$N_{\text{оп}} = (3\ell+1) \left[ n + \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\prod_{j=1}^{\ell} (n+\ell+j)}{2^{\ell-1}} \right] + 1.$$

Отношение  $\frac{N}{B}$  характеризует эффективность того или иного решающего правила.

На рис. 1а приведены значения эффективности некоторых решающих функций с учетом затрат памяти ЭМ, а на рис. 1б - с учетом затрат машинного времени (количества операций).

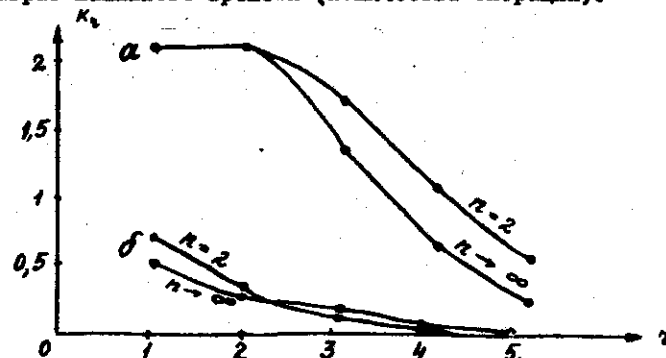


Рис. I Эффективность решающих функций с учетом затрат памяти

Обозначим через  $K_B = \frac{B_i}{B_j}$  отношение мощности  $i$ -й решающей функции к  $j$ -й, а через  $K_N = \frac{N_i}{N_j}$  - отношение однотипных затрат при использовании  $i$ -й и  $j$ -й решающих функций.

Из равенств  $K_B \cdot B_j = B_i$ ,  $K_N \cdot N_j = N_i$  и  $\frac{K_B \cdot B_j}{K_N \cdot N_j} = \frac{B_i}{N_i}$  следует, что замена одной решающей функции  $i$ -го типа равным по суммарной мощности набором функций  $j$ -го типа приводит к заметному изменению необходимых затрат. Действительно, при мощности, равной  $B_i$ , затраты при  $i$ -й решающей функции равны  $N_i$ , а при наборе  $K_B$   $j$ -х решающих функций -  $K_B \cdot N_j$ . Далее,  $K_B \cdot N_j = \frac{B_i \cdot N_j \cdot N_i}{B_j \cdot N_i} = N_i \cdot \frac{K_{2i}}{K_{2j}}$ , откуда следует, что набор  $K_B$  штук решающих функций более простого  $j$ -го типа (при равной мощности) и экономичнее (эффективнее) одной функции  $i$ -го типа в  $F = \frac{K_{2j}}{K_{2i}}$  раз.

В таблицах 2,3,4 приведены значения  $F$  для  $n = 2$  (верхняя цифра) и  $n \rightarrow \infty$  (нижняя цифра), показывающие, во сколько раз возрастает эффективность при переходе от решающей функции  $i$ -го типа к равному по мощности набору более простых решающих функций  $j$ -го типа, если учитывать затраты на память  $N_{\text{пам}}$  (табл.2), по количеству операций  $N_{\text{оп}}$  (табл.3) и того и другого одновременно в виде произведения  $\alpha \cdot N_{\text{пам}} \cdot N_{\text{оп}}$  (табл.4).

Как видно из этих данных, в общем случае пользоваться нелинейными решающими функциями нерационально. Явно выгоднее использовать такие функции, как кусочно-линейные (набор гиперплоскостей) и метод "дробящихся элементов" (например, в виде набора гиперсфер или гиперпараллелепипедов).

Таблица 2

Уменьшение требуемого объема памяти при переходе от  $i$ -й р.ф. к набору  $j$ -х р.ф.

$j \backslash i$	$n$	гиперпараллелепипед	сфера	$z=1$	$z=2$	$z=3$	$z=4$	$z=5$
Гиперпараллелепипед	2	I	0,75	I	I	I,2	I,8	3,4
	$\infty$	I	I	I	I	I,5	I,3	7,5
Сфера	2		I	I,38	I,38	I,6	2,4	4,55
	$\infty$		I	I	I	I,6	I,6	7,5
$z=1$	2			I	I	I,2	I,8	3,4
	$\infty$			I	I	I,5	I,3	7,5
$z=2$	2				I	I,2	I,8	3,4
	$\infty$				I	I,5	I,3	7,5
$z=3$	2					I	I,5	2,85
	$\infty$					I	I,2	5
$z=4$	2						I	I,9
	$\infty$						I	2,5
$z=5$	2							I
	$\infty$							I

Таблица 3

Уменьшение количества операций при переходе от  $i$ -й р.ф. к набору  $j$ -х р.ф.

$j \backslash i$	$n$	гиперпараллелепипед	сфера	$z=1$	$z=2$	$z=3$	$z=4$	$z=5$
Гиперпараллелепипед	2	I	2,73	3	6	17,5	51	158,5
	$\infty$	I	5	4	7	15	39	120
Сфера	2		I	1,09	2,19	6,4	19,9	58
	$\infty$		I	0,8	1,4	3	7,81	23,9
$z=1$	2			I	2	5	17,26	53,2
	$\infty$			I	1,74	3,76	9,76	30
$z=2$	2				I	2,5	8,45	26,5
	$\infty$				I	2,14	5,58	17,13
$z=3$	2					I	2,9	9,05
	$\infty$					I	2,6	8
$z=4$	2						I	3,1
	$\infty$						I	3,1
$z=5$	2							I
	$\infty$							I

Таблица 4

Уменьшение затрат вида  $\alpha$  *Нлан Non*  
при переходе от  $z$ -й р.ф. к набору  $j$ -х р.ф.

$j \backslash z$	$n$	гипер- пара- леле- пипед	сфера	$z=1$	$z=2$	$z=3$	$z=4$	$z=5$
Гиперпара- лелепипед	2	I	205	3	6	21	92	540
	$\infty$	I	5	4	7	22,5	117	900
Сфера	2		I	1,5	3,02	10,24	52,76	263,9
	$\infty$		I	0,8	1,4	4,5	23,43	179,25
$z=1$	2			I	2	7	31,2	180,9
	$\infty$			I	1,74	5,64	29,4	225
$z=2$	2				I	1,8	13,21	90,1
	$\infty$				I	3,21	16,74	128,5
$z=3$	2					I	4,35	25,8
	$\infty$					I	5,2	40
$z=4$	2						I	5,89
	$\infty$						I	7,75
$z=5$	2							I
	$\infty$							I

## Л и т е р а т у р а

1. T.M.Cover. Geometrical and Statistical Properties of Linear Threshold Devices, Stanford Electronics Laboratories Technical Report 6107-1, may 1964.
2. T.M.Cover. Classification and Generalisation Capabilities of Linear Threshold Units, Rome Air Development Center Technical Documentary Report RADS-TDS-64-32, Febr. 1964.
3. Н. НИЛЬСЕН. Обучающиеся машины. Изд-во "Мир", М., 1967.
4. Н.Г. ЗАГОРУЙКО. Структура проблемы распознавания слуховых образов и методов её решения. Сб. "Распознавание слуховых образов", Изд-во "Наука", Новосибирск, 1966.

Поступила в редакцию  
20 января 1969 г.