ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1969 г. Выпуск 37

УДК 62-5:007:621.391:519.2

О РЕШАЮЩИХ ПРАВИЛАХ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ РАСПОЗНАЮЩИХ АВТОМАТАХ

Г.Я.Воломин

В работе [I] при анализе оптимальной структуры иерархического распознающего автомата не был затронут вопрос об оценке сложности решающих правил. Попытаемся в какой-то степени восполнить этот пробел.

Как известно, стоимость распознающего автомата определяется выражением

$$C = C_{рец} + C_{кл} + C_{эфф} + C_{п}$$

где $C_{рец}$ – стоимость поля рецепторов,

$C_{кл}$ – стоимость классификатора,

$C_{эфф}$ – стоимость эффектора (исполнительного органа),

$C_{п}$ – стоимость потерь (ошибок распознавания).

В процессе иерархизации мы переходим к принятию промежуточных решений по подпространствам. При представительной выборке и отсутствии ограничений на тип решающих правил эта процедура может только сохранить или увеличить стоимость потерь. Поэтому при иерархизации мы, с одной стороны, уменьшаем стоимость классификатора (см. [I]), с другой – увеличиваем стоимость потерь.

Ещё раз подчеркиваем, что мы предполагаем обучающую и контрольную выборки представительными, ибо в противном случае при переходе в подпространства мы можем не только не увеличить, но даже уменьшить стоимость потерь, и эффективность иерархизации окажется больше, чем её оценка, полученная в [I] .

Для того, чтобы при иерархизации стоимость потерь возросла не более, чем на допустимую величину, мы можем исходное пространство подвергнуть некоторому преобразованию. Речь идет о том, что если в исходном пространстве построено семейство оптимальных решающих правил

$$Z = \Psi_x (X) \,, \qquad (1)$$

где Z – множество распознаваемых образов,

X – множество исходных признаков,

Ψ_x – отображение X на Z,

то необходимо так преобразовать X

$$Y = F(X) \,, \qquad (2)$$

чтобы отображение

$$Z = \Psi_y (Y) \qquad (3)$$

можно было бы разложить по нужным нам подпространствам. Если такое разложение существует для (I), то никаких дополнительных преобразований не требуется (удачно выбрана исходная система признаков).

В геометрической интерпретации возможность разложения отображений (I) или (3) по подпространствам эквивалентна параллельности отдельных решающих правил (или их комплексов) из семейства Ψ тем осям исходного пространства, которые не входят в выбранное подпространство.

Допустим, что нам необходимо осуществлять преобразование (2), после чего можно принимать решения по подпространствам. Это равносильно тому, что мы в исходном пространстве разбиваем семейство решающих правил Ψ на комплексы (в общем случае пересекающиеся) и принимаем по этим комплексам промежуточные решения.

Таким образом, мы пришли к естественному <u>обобщению модели иерархического распознающего автомата</u>, предложенной в [I,2]. Пусть в исходном пространстве X_1 требуется распознавать K_0 образов. Строим множество Ψ решающих правил, затем разбиваем его на подмножества*) (в общем случае пересекающиеся) и принимаем решения по этим подмножествам. Набор решений по подмножествам решающих правил является исходным описанием для следующей ступени распознавания и т.д. В одном частном случае, а именно: если все используемые подмножества решающих правил параллельны некоторым подмножествам осей, мы приходим к принятию решений по подпространствам. Следует отметить, что в данном случае имеет место именно <u>обобщение</u> модели, ибо принятие решений по подпространствам всегда является принятием решений по подмножествам решающих правил, но не наоборот. Более того, можно привести примеры, когда не существует взаимно однозначного отображения (2), которое позволило бы перейти от подмножеств решающих правил к подпространствам.

*) Подмножества могут состоять из одного элемента (одного решающего правила).

Итак, все последовательные (как по признакам, так и по решающим правилам) процедуры распознавания являются иерархическими и для них справедливы предельные оценки и оптимальные структуры, рассмотренные в [I]. Подробнее на этом мы останавливаться не будем, а опишем лишь в новых терминах предел оптимизации. Если в пространстве X_1 необходимо распознать K_0 образов, то нужно так построить Ψ, чтобы удалось разбить его на непересекающиеся подмножества, причем первое подмножество должно делить K_0 на две равные части, второе – пополам одновременно каждую из частей, третье – пополам одновременно все четыре имеющиеся к этому моменту части и т.д. При этом на второй ступени распознавания будет минимум избыточности, а на первой распознается по два образа с помощью каждого подмножества решающих правил. Вполне понятно, что в ряде случаев такая структура может повлечь за собой усложнение типа решающих правил. Требуется компромиссный выход из положения. Аналогом такого противоречия в модели с принятием решений по подпространствам является необходимость реализации преобразования (2). С одной стороны, мы уменьшаем стоимость автомата, вводя иерархическую структуру, с другой – усложняем решающие правила. Где же оптимум? Рассмотрим этот вопрос для случая линейных решающих правил.

Пусть в преобразованном пространстве Y размерности n_0 мы построили интересующие нас решающие правила Ψ_y (количеством n_1) вида

$$\Psi_{y_1} = \sum_{i=1}^{n_0} C_i^1 y_i \,; \quad \Psi_{y_2} = \sum_{i=1}^{n_0} C_i^2 y_i \,; \ldots; \quad \Psi_{y_{n_1}} = \sum_{i=1}^{n_0} C_i^{n_1} y_i$$

описываемые матрицей

$$|C_{ij}|_{n_1, n_0} \,,$$

где n_1 – число строк,

n_0 – число столбцов,

i – номер строки,

j – номер столбца.

В матрице $|C_{ij}|_{n_1,n_0}$ отличные от нуля элементы имеют номера, зависящие от того, какие правила и в каких подпространствах мы используем.

Пусть отображение (2) является линейным и описывается матрицей

$$|b_{ij}|_{n_0, n_0}.$$

Тогда решающие правила в исходном пространстве описывались бы матрицей

$$|a_{ik}|_{n_1, n_0} = |c_{ij}|_{n_1, n_0} \; |b_{jk}|_{n_0, n_0},$$

откуда

$$|b_{jk}|_{n_0, n_0} = |c_{ji}|_{n_1, n_0} \; |a_{ik}|_{n_1, n_0}. \qquad (4)$$

Из (4) можно вывести условия существования линейного отображения (2), а именно:

если в матрицах $|a_{ik}|_{n_1, n_0}$ и $|c_{ji}|_{n_1, n_0}$ оставить только различные строки (по одному "представителю" от параллельных решающих правил), то упомянутые матрицы должны иметь строк не более, чем столбцов, и строки и столбцы должны быть линейно независимы (требование линейной независимости оставшихся решающих правил). Тогда мы можем дополнить матрицы $|a_{ij}|$ и $|c_{ij}|$ до квадратных $|a'_{ij}|$ и $|c'_{ij}|$ произвольными независимыми строками (ввести фиктивные решающие правила – ф.р.п.), вычислить $|b_{ij}|$ и в дальнейшей эксплуатации отбросить ф.р.п., поскольку они нужны нам были лишь как вычислительный прием для нахождения $|c_{ji}|^{-1}$.

Если $|b_{ij}|$ не вычислима по (4), то мы вынуждены переходить к нелинейному отображению (2). При этом эффективность иерархизации уменьшается.

Пусть матрица $|b_{ij}|$ вычислима. Для любого способа иерархизации по подпространствам подходят решающие правила, описываемые расширенной единичной матрицей

$$|c'_{ij}|_{n_0, n_0} = E$$

(каждое решающее правило перпендикулярно какой-либо оси координат).

Тогда

$$|b_{jk}|_{n_0, n_0} = |a'_{jk}|_{n_0, n_0}. \qquad (5)$$

Для хранения коэффициентов преобразования (5) (если все элементы $|a'_{ij}|$ отличны от нуля и для их описания требуются все градации на любой оси) необходимы, очевидно, затраты

$$C_{пр} = C_э V_{пр} K_0 \log_\lambda H_0,$$

где

$$H_0 = \prod_{i=1}^{n_0} t_i,$$

t_i – количество градаций по i-й оси,

$V_{пр} = \frac{n_1 n_0}{K_0 n_0} = \frac{n_1}{K_0}$ – относительная сложность преобразования (количество коэффициентов, приходящееся на один образ и одну ось пространства).

λ – число устойчивых состояний элемента памяти.

Для линейных решающих правил и линейных преобразований пространства (если $n_1 \leqslant n_0$)

$$V_{пр} \geqslant V_0,$$

где V_0 – относительная сложность решающих правил в одноступенном автомате.

Отсюда

$$C_{пр} \geqslant C'_э,$$

где $C'_э = C_э\, a\, K_0 \log_\lambda H_0$ – стоимость долговременной памяти одноступенного автомата [1].

Таким образом, иерархизация в данном случае не уменьшает стоимости долговременной памяти распознающего автомата.

Легко видеть, что для реализации преобразования, описываемого матрицей $|b_{ij}|$, нужны затраты и оперативной памяти не меньшие, чем в одноступенном распознающем автомате. Экономия памяти может иметь место только в том случае, если реализуемое перед иерархизацией преобразование пространства проще (дешевле) решающих правил одноступенного распознающего автомата.

Этот вывод аналогичен выводу, полученному в [3] относительно минимизации описания в задачах распознавания. Напомним, что он справедлив лишь при оговоренных выше ограничениях.

Теперь дадим оценку сложности решающих правил на 2-й и более высоких ступенях распознавания. Оценкой сверху является перечисление всех "гиперкубиков" пространства элементарного автомата и указание, к какому образу каждый гиперкубик относится. Эта оценка слишком завышена для тех случаев, когда велика избыточность описания.

$$\theta = 1 - q,$$

где $q = \frac{K}{H}$, K – число образов,
H – число гиперкубиков.

В иерархических распознающих автоматах, по структуре приближающихся к оптимальным, вся (или почти вся) избыточность сосредоточена на первой ступени распознавания, поэтому только для неё предложенная выше оценка сверху может оказаться сильно завышенной. На более же высоких ступенях она близка к истинной и ею можно пользоваться при практических расчетах.

Итак, для относительной сложности V_m решающих правил иерархических автоматов, по структуре близких к оптимальным, справедливо неравенство

$$V_m \leqslant \frac{H_m}{n_m K_m} ,$$

где m – номер элементарного распознающего автомата, входящего в иерархический автомат.

Для автоматов типа 3333 (см. [I])

$$V_m \leqslant \frac{K_{m-1}^{\frac{n_{m-1}}{n_m}}}{K_m n_m} , \qquad (6)$$

где m – индекс любого элементарного автомата на m-й ступени распознавания.

Из (6) следует, что нужно минимизировать K_{m-1}, а, следовательно, и K_m для $(m+1)$-й ступени, ибо для 3333

$$\frac{n_{m-1}}{n_m} \geqslant 2 . \qquad \text{(см. [I])}$$

Это совпадает с выводом, полученным в [I], где не учитывалось изменение V_m при вариации структуры.

Легко видеть, что уменьшение избыточности также минимизирует V_m. Таким образом, выводы, полученные в [I] относительно оптимальной структуры иерархических распознающих автоматов, не изменяются при учете характера изменения V_m.

Что касается первой ступени распознавания, то при отсутствии предварительного преобразования (2) справедливо соотношение

$$V_1 \leqslant V_0 ,$$

ибо при проектировании в подпространство решающее правило не может усложниться.

В заключение произведем сравнение стоимостей автоматов типа 3333, принимающих решения по подпространствам и по подмножествам решающих правил, если эти автоматы предназначены для одного и того же применения. Очевидно эти автоматы будут отличаться лишь первой ступенью распознавания, поэтому достаточно рассмотреть только её.

Обозначим через C_A и C_B стоимость памяти классификаторов первой ступени, принимающих решения по подпространствам и подмножествам решающих правил соответственно. Тогда $\Delta C = C_A - C_B$,

$$C_A = (C_д V_1 K_1 + C_{оп}) n_1 \log_2 \frac{K_1}{q_1} , \qquad \text{(см. [I])}$$

где $$C_B = C_д V_1 K_1 n_1 \log_2 H_0 + C_{оп} \log_2 H_0 ,$$

следовательно, учитывая, что $H_0 = \frac{K_0}{Q_0}$,

где Q_0 – избыточность описания при одноступенном распознавании,

получим

$$\Delta C = \log_2 \frac{n_1^{n_1(C_д V_1 K_1 + C_{оп})} \cdot Q_0^{C_д V_1 K_1 n_1 + C_{оп}}}{K_0^{C_д V_1 K_1 n_1 + C_{оп}} \cdot q_1^{n_1(C_д V_1 K_1 + C_{оп})}}$$

В структурах типа 3333, близких к оптимальным,

$$K_0 \simeq K_1^{n_1} \quad и \quad Q_0 \simeq q_1^{n_1} ,$$

поэтому

$$\Delta C \simeq \log_2 \frac{Q_0^{C_д V_1 K_1 (n_1 - 1)}}{K_0^{C_д V_1 K_1 (n_1 - 1)}} < 1 , \qquad (7)$$

так как

$$n_1 \geqslant 2 ; \quad Q_0 \leqslant 1 ; \quad K_0 \geqslant 2 .$$

Таким образом, иерархизация путем принятия решений по подпространствам эффективнее, чем при принятии решений по подмножествам решающих правил. Неравенство (7) переходит в равенство при эквивалентности этих двух способов иерархизации (условия эквивалентности мы обсуждали выше).

Литература

1. Г.Я.ВОЛОШИН. Оптимизация структур иерархических распознающих автоматов.– Вычислительные системы. Труды ИМ СО АН СССР, вып. 36, Новосибирск, I969.
2. Г.Я.ВОЛОШИН. Модель иерархического распознающего автомата и её свойства. Конференция по теории автоматов и искусственному мышлению (аннотации к докладам), Ташкент I968.
3. Г.Я.ВОЛОШИН, Н.Г.ЗАГОРУЙКО. Минимизация описания сигналов в задачах распознавания образов. Труды I Всесоюзной конференции по измерениям случайных процессов и полей. Новосибирск, I968.

Поступила в редакцию
I5 января I969 г.