

УДК 534.78:681.142:62-501.2:518.2

АППРОКСИМАЦИЯ ОТКЛИКА СИСТЕМЫ
В Z-ПЛОСКОСТИ И ФОРМАНТНЫЙ АНАЛИЗ РЕЧИ

В.С. Лозовский

Пусть $h(t)$ — заданный своими дискретными отсчетами отклик некоторой динамической системы, передаточная функция $H(z)$ которой неизвестна, но предполагается, что она с достаточной точностью может быть записана в виде дробно-рациональной функции от z . Требуется найти $H(z)$ для некоторой модельной линейной динамической системы с постоянными коэффициентами, отклик которой максимально приближается к заданному $h(t)$. Решению этой задачи посвящена настоящая работа. Описываемая методика была применена к речевому сигналу с целью получения его формантного описания.

Речь образуется в процессе фильтрации колебаний голосовых связок резонансной системой голосового тракта [1].

Под формантным описанием речевого сигнала мы будем понимать полюсно-нулевое представление передаточной функции некоторой модельной системы, отклик которой с требуемой точностью аппроксимирует анализируемый сигнал во временной области. Каждой паре комплексно-сопряженных полюсов передаточной функции соответствует одна форманта; значения ширины полосы формант и положение их по частоте определяются аргументами и модулями полюсов, находящихся в верхней полуплоскости комплексной z -плоскости. Необходимо подчеркнуть, что при этом не ставится задача определения параметров реального речеобразующего тракта, поскольку исходным сигналом считается последовательность дискретных отсчетов, хранимых, например, в памяти ЦВМ, относительно которых известно, что искажения и погрешность аналого-

-цифровой аппаратуры, участвующей в процессе кодирования, не велики. Это может быть проверено обратным преобразованием акустический сигнал и прослушиванием последнего. К тому же известно, что отображение речеобразующий тракт — акустический сигнал однозначно лишь в одну сторону, а методика, основанная на анализе акустического сигнала, более перспективна с точки зрения практического использования, чем непосредственные измерения параметров речеобразующего тракта.

Итак, спектр рассматриваемого нами сигнала является проявлением спектра возбуждающего сигнала и передаточной функции резонансной системы тракта. В первую очередь для нас представляет интерес именно передаточная функция системы. В теории автоматического регулирования разработаны методы оценки параметров динамических систем по известным значениям возмущающего воздействия на входе и по реакции системы. Однако в нашей задаче параметры входного сигнала известны лишь приблизительно: это либо шум, либо последовательность импульсов, вызываемая смыканием и размыканием голосовых связок, либо комбинация этих сигналов.

Представляется целесообразным рассмотреть поведение системы при голосовом возбуждении, поскольку при этом удается расчленив временную диаграмму процесса на область возбуждения (голосовые связки разомкнуты) и область свободных колебаний (голосовые связки сомкнуты). Определив параметры системы в отсутствие сигнала на её входе, окажется возможным установить попутно и параметры возбуждающего сигнала. *) Исходя из приведенных соображений, легко прийти к идее спектрального анализа речи синхронно с периодом основного тона (Мэтьюз, Миллер и Дэвид) и затем — к анализу свободных колебаний в системе на участках, соответствующих отсутствию возбуждающего сигнала (Линсон). Метод, предложенный Е. Линсоном, а также подход, используемый в настоящей работе, позволяют получить значительно более точные оценки положения и ширины формант, чем это удается сделать на основе спектральных характеристик текущего речевого сигнала.

В общем случае динамическая модель исследуемого процесса

*) Более строго: найти параметры некоторого возбуждающего сигнала, действие которого на систему — модель прочлилась бы в задании тех же (или близких в среднеквадратическом смысле) начальных условий, что и в реальном случае.

должна быть нелинейной, а её параметры должны зависеть от времени. Однако, основываясь на сведениях относительно скорости изменения параметров речеобразующего тракта - порядка 7-16 гц, можно с достаточной для практики точностью считать параметры системы неизменными на длительности периода частоты основного тона (80-350 гц), повторяя измерения для каждого периода. Далее, как правило, можно пренебречь нелинейностью системы. Качество получаемой аппроксимации покажет, насколько были справедливы сделанные допущения.

На рис. I приведены временные диаграммы исследуемых процессов. Предполагается, что в моменты времени "0" импульс возбуждения $e(t)$ оканчивается и система начинает совершать свободные колебания, продолжающиеся в течение времени T_a - вплоть до начала нового импульса возбуждения. Аппроксимирующая данный процесс модель строится следующим образом.

Предполагается, что существует некоторая линейная динамическая система с постоянными коэффициентами - модель, которая возбуждается стандартными δ - импульсами. Временной отклик этой системы на участке T_a должен наилучшим образом в смысле выбранного критерия аппроксимировать форму исходного сигнала. Передаточная функция системы - модели записывается в виде дробно-рационального выражения. При этом количество полюсов выбирается в зависимости от сложности аппроксимируемого сигнала, требуемой точности аппроксимации и достижимой точности вычислений. Положение нулей моделирующей системы, поскольку возбуждающий сигнал фиксирован, будет отражать свойства импульса возбуждения в реальной системе.

Наконец, как упоминалось ранее, считается, что исходный сигнал представлен дискретной последовательностью отсчетов. Поэтому, аппроксимируя сигнал, как предлагается в настоящей работе, при помощи разностного уравнения, все рассуждения удобно проводить в комплексной z - плоскости.

Z - преобразование исходного сигнала $x(t)$ имеет вид:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}, \quad (1)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ - номера точек, в которых задана функция, T - период повторения, а $z = e^{j\omega T}$, где ω - комплексная частота. Запишем дробно-рациональное выражение, описывающее передаточную функцию некоторой дискретной системы:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_n z^{-n}}{1 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_m z^{-m}}, \quad (2)$$

которое может быть представлено в виде бесконечного ряда:

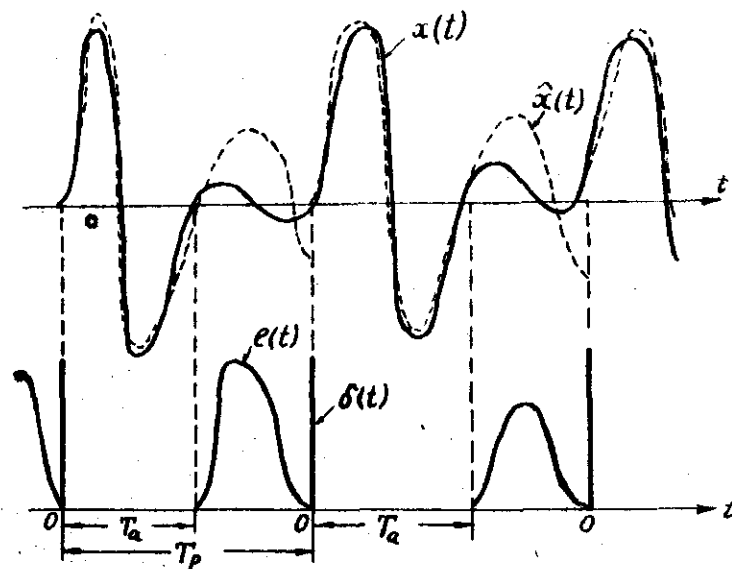


Рис. I. Временная диаграмма процесса аппроксимации исследуемого сигнала.

- $x(t)$ - сигнал на выходе реальной системы;
- $e(t)$ - импульс возбуждения реальной системы;
- $\hat{x}(t)$ - отклики системы - модели, аппроксимирующие исходный сигнал на участках времени T_a , соответствующих свободным колебаниям реальной системы;
- $\delta(t)$ - импульсы возбуждения моделирующей системы;
- T_p - период повторения.

$$\hat{H}(z) = \hat{x}_0 + \hat{x}_1 z^{-1} + \hat{x}_2 z^{-2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{x}(nT) z^{-n}. \quad (3)$$

Потребуем, чтобы в точках $n = 0, 1, 2, \dots$ расхождение между сигналом $F(z)$ и $H(z)$ записанным в виде (3), было минимальным. Функция ошибки аппроксимации будет иметь вид:

$$E(z) = \frac{N(z)}{D(z)} - F(z). \quad (4)$$

Минимизация $E(z)$ в общем виде требует решения системы нелинейных уравнений, например, при помощи градиентных методов или метода последовательной линеаризации (Пинсон). Леви предлагает вычислять взвешенную функцию ошибки, которая для нашего случая будет иметь вид:

$$W_0(z) = E(z) \cdot D(z) = N(z) - F(z) \cdot D(z). \quad (5)$$

Описываемый в настоящей работе метод основывается на минимизации последовательности взвешенных функций ошибки $W_u(z)$, такой что

$$\lim_{u \rightarrow \infty} W_u(z) = E(z). \quad (ж)$$

Следуя Леви, отметим, что разность между действительной и взвешенной ошибками достигает максимума при малых значениях $D(z)$, т.е. вблизи полюсов аппроксимирующей функции $\hat{H}(z)$.

Выражение (5), с учетом (2), может быть записано в виде:

$$W_0(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_z z^{-z} - (\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_q z^{-q})(1 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_m z^{-m}); \quad (6)$$

при этом считается, что исходная функция задана в точках $0, \dots, q$, равномерно распределенных с периодом квантования T на участке аппроксимации T_a . Нам безразлично, как ведет себя $W(z)$ за пределами участка T_a . Дальнейший анализ удобно провести во временной области (рис. 2). Осуществляя переход от (6) к выражению для значения взвешенной функции ошибки в i - момент времени, имеем:

$$w_i = \alpha_i \psi(i \leq z) - \sum_{j=0}^m \beta_j x_{i-j} \psi(j \leq i), \quad (7)$$

где функция ψ от логического выражения, заключенного в скобки, определена как:

$$\psi(\text{ИСТИНА}) = 1, \\ \psi(\text{ЛОЖЬ}) = 0, \text{ а } \beta_0 = 1, \quad i = 0, \dots, q$$

Потребуем минимизации среднего квадрата ошибки w_i на интервале аппроксимации:

$$w = \sum_{i=0}^q w_i^2. \quad (8)$$

Приравняв частные производные $\partial w / \partial \alpha_k$ и $\partial w / \partial \beta_k$ нулю,

можно составить $m + z + 1$ линейных уравнений для определе -

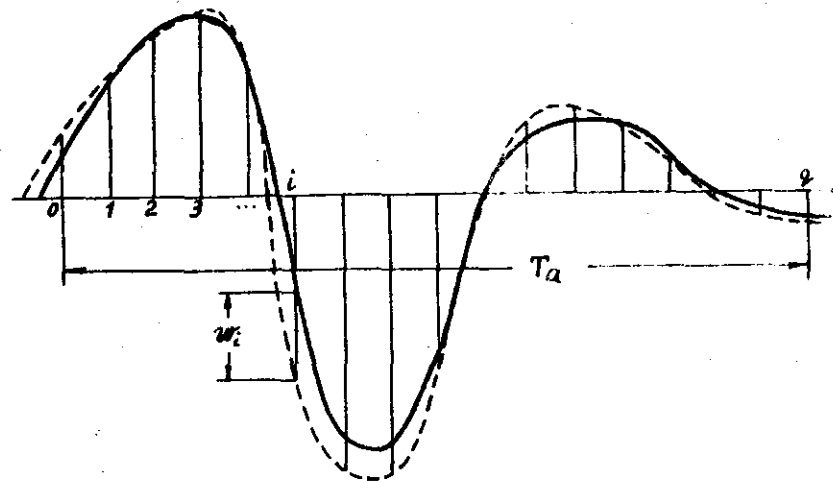


Рис. 2. Исходная $x(t)$ и аппроксимирующая $\hat{x}(t)$ функции

ния коэффициентов α_k и β_k . Подобная процедура приводится Кардашовым. Однако, как показано в Приложении, этот прием неоправдан, и в два раза более громоздкая система уравнений практически не дает повышения точности. Мы будем использовать усеченную функцию:

$$w' = \sum_{i=m}^q w_i^2, \quad (8a)$$

которая не зависит от α_k , поскольку $z < m$.

Имеем m уравнений:

$$\frac{\partial w'}{\partial \beta_k} = \sum_{j=0}^m (-\beta_j \sum_{i=m}^q x_{i-j} x_{i-k}), \quad (9)$$

где $k = 1, \dots, m$.

В результате решения системы (9) будут получены значения коэффициентов β_k в первом приближении. Далее необходимо определить значения коэффициентов α_k числителя передаточной функции моделирующей системы. Коэффициенты α_k описывают начальные условия, определяющие конкретную реализацию колебательного процесса в системе. В простейшем случае можно потребовать, чтобы первые $z + 1$ точек аппроксимирующей кривой совпадали с исходной. Для этого полагаем в (7) $w_i = 0$ и получаем необходимую формулу:

$$\alpha_k = \sum_{j=0}^k \beta_j x_{k-j} \quad (10)$$

для $k = 0, \dots, z$.

Описанный способ получения β_k и α_k дает хорошие результаты в том случае, когда аппроксимируемая система отвечает требованиям линейности и неизменности параметров во времени. Ясно также, что для определения α_k по (10) особенно неблагоприятны искажения и заумленность на начальном участке аппроксимируемой кривой. При анализе реального речевого сигнала на "чистоту" последнего рассчитывать не приходится, поэтому имеет смысл определять α_k , потребовав минимума среднеквадратической ошибки на всем участке T_{α} .

Принимая во внимание, что x_i в (3) являются последовательными дискретами отклика модели, приравнявая (2) и (3), приходим к очевидной зависимости:

$$\hat{x}_i = \alpha_i \psi(i \leq z) - \sum_{j=1}^m \beta_j \hat{x}_{i-j} \psi(j \leq i), \quad (11)$$

откуда можно получить следующее рекуррентное выражение:

$$\hat{x}_i = \sum_{j=0}^i \alpha_j \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \alpha_j} = \sum_{j=0}^i \alpha_j \frac{\partial \hat{x}_{i-j}}{\partial \alpha_0} \quad (12)$$

Полагая, что β_k нам известны, для вычисления производных можно воспользоваться рекуррентной формулой:

$$\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \alpha_0} = \psi(i=0) - \sum_{j=1}^m \beta_j \frac{\partial \hat{x}_{i-j}}{\partial \alpha_0} \psi(j \leq i) \quad (13)$$

Записав ошибку аппроксимации в виде:

$$E = \sum_{i=0}^z (\hat{x}_i - x_i)^2, \quad (14)$$

получаем $z+1$ уравнений вида:

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_k} = \sum_{i=0}^z (\hat{x}_i - x_i) \frac{\partial \hat{x}_{i-k}}{\partial \alpha_0} = 0. \quad (15)$$

Из (15), с учетом (12), имеем:

$$\sum_{j=0}^i \alpha_j \sum_{i=0}^z \frac{\partial \hat{x}_{i-j}}{\partial \alpha_0} \frac{\partial \hat{x}_{i-k}}{\partial \alpha_0} = \sum_{i=0}^z x_i \frac{\partial \hat{x}_{i-k}}{\partial \alpha_0} \quad (16)$$

для $k = 0, \dots, z$.

Значения производных следует взять из (13). Решение системы (16) дает оптимальные в смысле минимума среднеквадратичес-

кой ошибки аппроксимации значения коэффициентов α_k при фиксированных β_k .

Теперь появляется возможность уточнить полученные ранее значения коэффициентов β_k . Вернемся к выражению (5) и перепишем его в виде:

$$W_u(z) = E(z) D_u(z) = N_u(z) - F(z) D_{u-1}(z), \quad (5a)$$

где индексами отмечены значения взвешенной функции ошибки и коэффициенты полиномов числителя и знаменателя передаточной функции модели $H(z)$ на u -шаге. Разделим обе части (5a) на полином $D_{u-1}(z)$, полученный на предыдущем шаге.

$$W_u(z) = E(z) \frac{D_u(z)}{D_{u-1}(z)} = \frac{N_u(z)}{D_{u-1}(z)} - F(z) \frac{D_u(z)}{D_{u-1}(z)} \quad (17)$$

Условие сходимости процесса сведения последовательности взвешенных функций ошибки к $E(z)$ (*) сводится к тому, чтобы в среднем в процессе итераций выполнялось неравенство:

$$D_u(z) D_{u-2}(z) < D_{u-1}^2(z). \quad (**)$$

Это требование выполняется, если $D_0(z)$ не слишком сильно отличается от своего оптимального значения.

В выражении (17) справа стоят два члена, из которых первый описывает передаточную функцию некоторого фильтра, рассматриваемую в качестве аппроксимирующей функции на предыдущем шаге. Отношение $F(z)/D_{u-1}(z)$ следует понимать как z -преобразование исходного сигнала на выходе фильтра с передаточной функцией $1/D_{u-1}(z)$. Обозначив

$$h_{u-1}(z) = \frac{N_u(z)}{D_{u-1}(z)} \quad \text{и} \quad (18)$$

$$F'_{u-1}(z) = \frac{F(z)}{D_{u-1}(z)},$$

приходим к записи:

$$W_u(z) = h_{u-1}(z) - F'_{u-1}(z) D_u(z), \quad (19)$$

которая аналогична по структуре выражению (5). Затем без особых затруднений получаем:

$$w_{u,i} = h_{u-1,i} - \sum_{j=0}^m \beta_j x'_{u-1,i-j} \psi(j \leq i); \quad (7a)$$

$$\frac{\partial w_{u,i}}{\partial \beta_k} = \sum_{i=0}^z (h_{u-1,i} - x'_{u-1,i}) x'_{u-1,i-k} - \sum_{j=1}^m \beta_j \sum_{i=0}^z x'_{u-1,i-j} x'_{u-1,i-k} = 0 \quad (9a)$$

где $k = 1, \dots, m$.

Коэффициенты b_k , полученные при решении системы (9а), будут более соответствовать модели, минимизирующей среднеквадратическую погрешность аппроксимации исходного сигнала. При необходимости описанную процедуру коррекции b_k и a_k можно повторить.

Нули и полюсы моделирующей системы находятся в результате определения корней полиномиальных уравнений:

$$\begin{aligned} a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_0 &= 0, \\ z^m + b_m z^{m-1} + \dots + b_0 &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Корни уравнений (20) - либо вещественные, либо комплексно-сопряженные пары. Полюса аппроксимирующей системы отождествляются с формантами анализируемого речевого сигнала. Нетрудно показать, что если некоторый полюс k - пары записан в виде:

$$z_k = r_k e^{j\varphi_k},$$

то частота k - форманты равна

$$f_k = \varphi_k / 2\pi T \text{ ц},$$

а ширина полосы

$$(2\Delta f)_{0.707} = -\ln r_k / \pi T \text{ ц}, \quad (21)$$

где T - период квантования анализируемого сигнала.

Таким образом, положение формант определяется однозначно, даже если полюса расположены настолько близко, что соответствующие максимумы на спектральной картине сливаются в один. Спектр аппроксимирующей функции может быть получен подстановкой:

$$z = e^{j\omega T} \hat{H}(z)$$

Результаты эксперимента

Для проверки основных положений описанного метода аппроксимации был взят отклик (рис. 3) на δ - импульс полосового фильтра со следующими параметрами:

- средняя частота 2850 гц,
- ширина полосы на уровне 0.707: 1300 гц,
- ширина полосы на уровне 0.04: 2700 гц,
- период квантования $62.5 \cdot 10^{-6}$ сек,
- порядок системы 8 (4 резонатора),

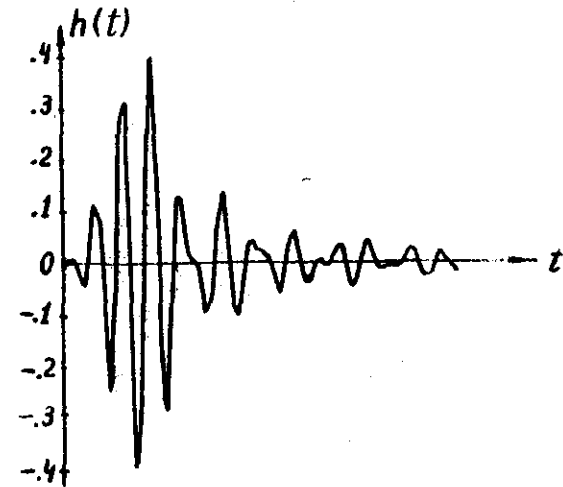


Рис. 3. Аппроксимация отклика полосового фильтра

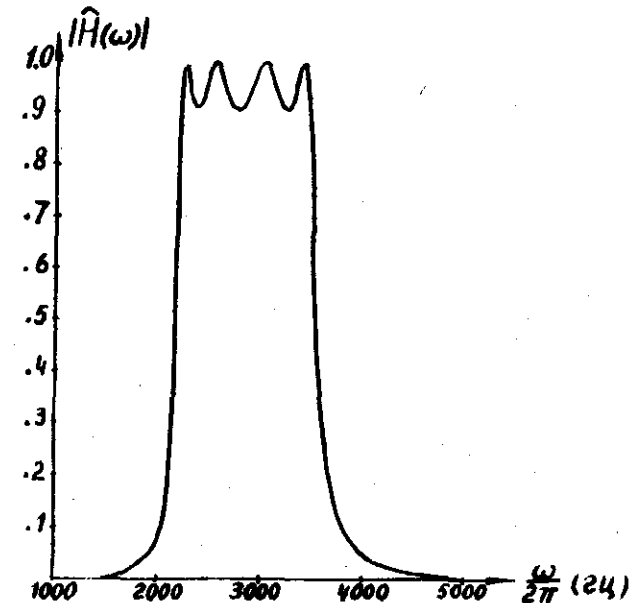


Рис. 4. Модуль функции $\hat{H}(j\omega)$, аппроксимирующей отклик фильтра на рис. 3.

- аппроксимация модуля частотной характеристики по Чебышеву, величина неравномерности на вершине 0.1.
- длительность отклика, на которой производилась аппроксимация $q+1 = 100$.

Параметры α_n и β_n исходного фильтра были получены по программе "z-filter" [6]. Вычисление параметров β_n и α_n аппроксимирующей системы производилось в соответствии с (9) и (10). Дальнейшего уточнения не потребовалось - абсолютная разница между исходной и аппроксимирующей функциями не превысила 10^{-5} (в масштабе рис. 3), а относительная среднеквадратическая ошибка (ОСО) [5], вычисляемая по формуле

$$ОСО = \frac{\sum_{i=0}^q (x_i - \hat{x}_i)^2}{\sum_{i=0}^q x_i^2}$$

равнялась $0.768 \cdot 10^{-4}$.

В таблице I приведены коэффициенты β_n исходной и аппроксимирующей систем.

Т а б л и ц а I

	Исходная система	Моделирующая система
0	I	I
1	4.389540668	4.389513012
2	10.11122975	10.1111109
3	15.22955018	15.22928921
4	16.24639043	16.24602144
5	12.45094961	12.45059125
6	6.734312194	6.734073158
7	2.360740186	2.360637917
8	0.43176200	0.4317394624

На рис. 4 приведен график $|H(j\omega)|$ для аппроксимирующей функции, который в пределах точности рисунка совпадает с частотной характеристикой исходной системы.

Эксперимент с использованием в качестве исходного реального речевого сигнала проводился следующим образом.

С помощью аналого-цифрового преобразователя сигнал был введен в ЭВМ БЭСМ-6. Динамический диапазон 9 дБ, разрядов, частота квантования 16 кГц. Вручную определялись начала периодов ап-

проксимации. Затем сигнал пропусклся через рекурсивный цифровой ФНЧ [6] с параметрами:

- полоса пропускания на уровне 0.707:3700 гц,
- порядок $H(z)$ фильтра 10,
- аппроксимация модуля частотной характеристики по Чебышеву с неравномерностью на вершине 0.04, после чего частота квантования понижалась до 8 кГц.

На рис. 5 приведены графики исходной функции, вырезанной из участка стационарной фонемы "а", и аппроксимирующей отклики для $H(z)$ девятого порядка (4 форманты).

Длина участка аппроксимации равнялась 30 отсчетам. Процесс аппроксимации состоял в следующем.

По (9) определялись β_n в первом приближении. Значения α_n определялись в соответствии с (16). Вычисленное значение ОСО равнялось 0.1796. Затем осуществлялась первая итерация, состоящая в нахождении сначала β_n по (9а), затем α_n по (16), после чего ОСО понизилась до 0.1324. В результате последующих трех итераций значения ОСО равнялись соответственно 0.1175, 0.1104, 0.1080, после чего был построен график аппроксимирующей функции на рис. 5. Аппроксимирующая $\hat{H}(z)$ имела вид:

$$\hat{H}(z) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_8 z^{-8}}{1 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_9 z^{-9}}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -0.221197; & \beta_1 &= -1.08904; \\ \alpha_1 &= -0.292463; & \beta_2 &= +1.35352; \\ \alpha_2 &= -0.162390; & \beta_3 &= -1.22591; \\ \alpha_3 &= -0.368078; & \beta_4 &= +1.45556; \\ \alpha_4 &= -0.094887; & \beta_5 &= -1.46217; \\ \alpha_5 &= -0.051687; & \beta_6 &= +1.57870; \\ \alpha_6 &= +0.073286; & \beta_7 &= -1.23123; \\ \alpha_7 &= -0.093096; & \beta_8 &= +1.09639; \\ \alpha_8 &= +0.112733; & \beta_9 &= -0.75982; \end{aligned}$$

В таблице 2 приведены положения нулей, полюсов и значения их ширины полос (для верхней полуплоскости).

Из таблицы видно, что аппроксимирующая система является неминимально-фазовой. Это согласуется с данными, имеющимися в литературе в отношении характеристик речевого тракта. Несколько неожиданным может показаться превышение единицы для моду-

Таблица 2

	Частота (гц)	Ширина полосы (гц)	Модуль корня
Нули	1413	661	0.7714
	1807	41	1.016
	3064	187	0.929
	4000	1123	1.554
Полосы (форманты)	0	464	0.833
	795	17.3	0.993
	1576	25.7	1.01
	2330	163	0.938
	3091	37.4	1.01

лей двух полюсов. Можно предположить, что это явилось следствием неполного закрытия голосовой щели на участке аппроксимации. Наконец, не производилось исследования точности нахождения корней при решении полиномиальных уравнений для числителя и знаменателя $\hat{H}(z)$. Поэтому к данным, особенно касающимся ширины полосы, следует относиться как к предварительным.

Процедура аппроксимации, осуществленная для аналогичных реализаций исходного процесса и состоящая в вычислении b_k и a_k по (9) и (10), позволила получить ОСО около 0.3–0.4 при порядке $\hat{H}(z)$, равном 10.

На рис. 5 хорошо заметно расхождение участка между исходной и аппроксимирующей кривой за пределами участка аппроксимации, что объясняется шунтированием резонаторов речевого тракта открывающейся голосовой щелью, изменением их параметров и поступлением энергии на вход системы.

На рис. 6 представлен модуль спектра исходной и аппроксимирующей функций. Спектр исходной функции (после низкочастотной фильтрации) вычислялся на отрезке речевого сигнала, равном 256 отсчетам x , а спектр аппроксимирующей функции был получен подстановкой $z = e^{j\omega T}$ в найденную $\hat{H}(z)$. На исходном спектре отчетливо видны искажения огибающей, возникающие из-за наличия импульсов возбуждения основного тона.

* Вычисление спектра производилось по алгоритму Кули-Тьюки (Быстрое Преобразование Фурье); процедура БПФ была любезно предоставлена В. Гусевым.

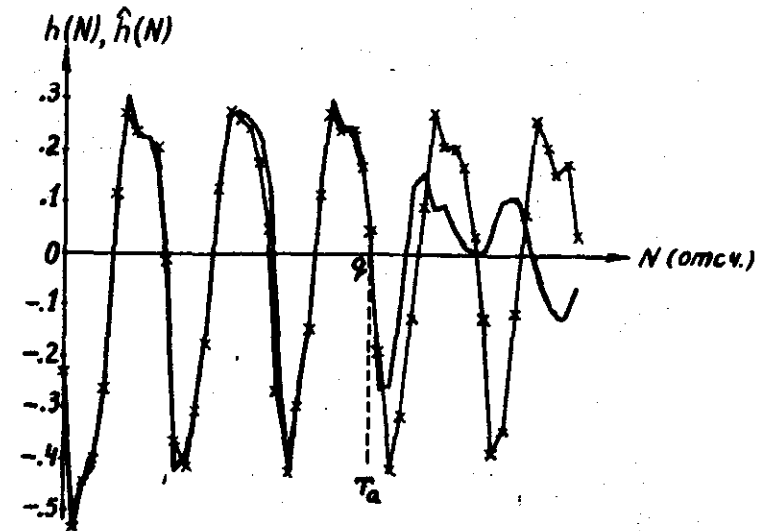


Рис. 5. Аппроксимация звука "а" на участке периода основного тона. x – аппроксимирующая кривая

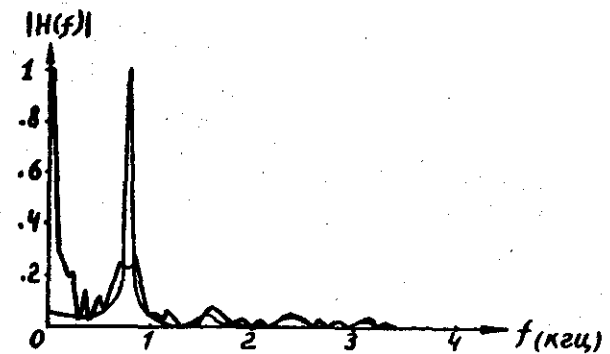


Рис. 6. $|\hat{H}(j\omega)|$ аппроксимирующей функции (рис. 5) и Фурье-спектр исходного речевого сигнала

Покажем целесообразность определения \hat{b}_n и α_n порознь: (9) и (10)

Из (7) и (8) имеем

$$w = \sum_{i=0}^z [\alpha_i \psi(i \leq z) - \sum_{j=0}^m \beta_j x_{i-j} \psi(j \leq i)]^2 \quad (\text{II-1})$$

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha_n} = \alpha_n - \sum_{j=0}^n \beta_j x_{n-j} = 0, \quad (\text{II-2})$$

где $n = 0, \dots, z$.

$$\frac{\partial w}{\partial \beta_n} = \sum_{i=n}^z [\alpha_i x_{i-n} - \psi(n \leq i \leq z) - \sum_{j=0}^m \beta_j x_{i-j} x_{i-n} \psi(j \leq i \& n \leq i)] =$$

$$- \sum_{i=n}^z \alpha_i x_{i-n} - \sum_{j=0}^m \beta_j \sum_{i=j}^z x_{i-j} x_{i-n} \psi(n \leq i) = 0, \quad (\text{II-3})$$

где $n = 1, \dots, m$.

Сравнивая (II-2) и (10), убеждаемся в их идентичности. Отсюда следует, что совместное решение (II-2) и (II-3), так же, как и в случае (9) и (10), обеспечивает точное совпадение исходной и аппроксимирующей функций в $z+1$ первых точках. Таким образом, отпадает необходимость учитывать ошибку аппроксимации для этих точек, т.е. нижний предел суммирования по i можно сделать равным m . Это сводит (II-3) к (9), и система (II-2) - (II-3) распадается на две независимых - (9) и (10), что и было принято в работе.

Приведем выводы зависимостей (12) и (13). Для этого рассмотрим равенство (II) в предположении, что β_n - известные постоянные коэффициенты. Начальное значение $\hat{x}_i: \hat{x}_0 = \alpha_0$. Последующие значения \hat{x}_i образуются из предыдущих при помощи операций суммирования и умножения на постоянные коэффициенты. Таким образом, если записать функцию $\hat{x}_i(\alpha_0, \dots, \alpha_n, \dots, \alpha_z)$ в явном виде, переменные α_n будут иметь показатели степени не выше первой. Отсюда становится очевидной справедливость первой части равенства (12). Для определения производных продифференцируем (II)

$$\text{для } \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \alpha_j} = \psi(i=j) - \sum_{n=1}^m \beta_n \frac{\partial x_{i-n}}{\partial \alpha_j} \psi(n \leq i) \quad (\text{II-4})$$

для $j = 0, \dots, z$.

Отметим две особенности (II-4)

1. На каждом i -шаге производные $\partial \hat{x}_i / \partial \alpha_j$ определяются рекуррентно исключительно через производные по α_j на предыдущих шагах.
 2. Начальные значения для всех производных равны нулю при $i < j$ и становятся равными единице при $i = j$.
- Отсюда следует, что j -последовательности вычисляемых производных $\partial \hat{x}_i / \partial \alpha_j$ повторяют друг друга с запаздыванием по времени на один шаг.

Таким образом, достаточно вычислять производные только по α_0 (при этом получаем (13)), а значения производных оказываются связанными зависимостью

$$\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial \hat{x}_{i-j}}{\partial \alpha_0} \quad (\text{II-5})$$

На основании (II-5) получаем вторую часть равенства (12).

Л и т е р а т у р а

1. Г. ФАНТ. Акустическая теория речеобразования. "Наука", М., 1964.
2. M.V. MATHEWS, I.E. MITLER, E.E. DAVID. Pitch Synchronous Analysis of Voiced Sounds. The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 33, N 2, 1961.
3. E.N. PINSON. Pitch-Synchronous Time-Domain Estimation of Formant Frequencies and Bandwidths. The JASA, vol. 35, N 8 1963.
4. E.O. LEVY. Complex-Curve Fitting, IRE Transactions on Automatic Control, vol. AC-4, May, 1959.
5. А.А. КАРДАШОВ. Применение x -преобразования для экспоненциальной аппроксимации корреляционных и переходных функций. Автоматика и телемеханика, № 3, 1968.
6. В.С. ЛОЗОВСКИЙ. Связь рекурсивных цифровых фильтров. - Вычислительные системы, вып. 36, Новосибирск, 1969.

Поступила в редакцию
30 января 1969 г.