

УДК 518: 517.949.12

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ БИКУБИЧЕСКИМИ МНОГОЗВЕННИКАМИ

И.С.Завьялов

Эта статья по своему содержанию представляет распространение теории интерполирования многозвенными функциями на случай двух независимых переменных.

Первый шаг в этом направлении сделали Биркгоф и Гарабедян [1] но полная аналогия была достигнута в работе де Боора [2], который в одном частном случае доказал существование и построил интерполяционную бикубическую *spline* функцию. Мы называем такие функции бикубическими многозвенниками. В работах Альберга, Нильсона и Уша [3,4] для различных типов бикубических многозвенников, в частности периодических, по одной или обоим переменным рассмотрены вопросы существования и единственности решения, сходимости и др. В качестве исследования ими введены функции, являющиеся кубическими многозвенниками только по одной из двух переменных (*partial splines*). В этих работах сходимость рассмотрена лишь для функций $f(x, y)$, имеющих непрерывные смешанные производные $f_{x^2y^2}$ или $f_{x^2y^4}$.

В настоящей работе постановка задач интерполирования существования и единственности решения излагаются в §§ 1,2. При этом в рассмотрение вводится ещё один тип непериодических многозвенников. В § 3 разработан параллельный алгоритм решения задачи в общем виде, если область независимых переменных прямоугольная, и указан способ его реализации на однородной вычислительной системе. Непрямоугольные области, рассматривавшиеся в работах [1] и [4], обсуждаются в § 5. § 4 посвя-

щен сходимости интерполяционного процесса. Установлено, что если по каждой из независимых переменных выполняются условия сходимости (может быть, разные) для функций одной переменной, то имеет место сходимость для соответствующих частных и смешанных производных и самой функции $f(x, y)$.

§ 1. Полумногозвенники двух независимых переменных

Прежде чем изучать многозвенные функции двух независимых переменных рассмотрим функции, являющиеся многозвенниками только по одной переменной из двух [3,4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть прямоугольная область $R [a \leq x \leq b ; c \leq y \leq d]$ на плоскости разделена на ячейки R_i линиями $x = x_i$, где x_i - точки множества Δ_x :

$$\Delta_x : a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_{N-1} < x_N = b. \quad (I.1)$$

В области R определена функция $Z = S(x; y)$, обладающая двумя свойствами:

а) в каждой ячейке R_i $S(x; y)$ является кубическим полиномом по x

$$P_i(x - x_i; y) = \sum_{\lambda=0}^3 \alpha_{\lambda}^{(i)}(y)(x - x_i)^{\lambda}; \quad (I.2)$$

б) $S(x; y)$ - непрерывная функция с непрерывными частными производными $\frac{\partial^p S}{\partial x^p}$ ($p \leq 2$), что обозначается как $S(x; y) \in C^{2,0}[R]$.

Такую функцию назовем **полумногозвенником** от двух переменных.

Пусть в области $R [a \leq x \leq b ; c \leq y \leq d]$ на линиях $x = x_i$ ($i = 0, 1, \dots, N$) заданы функции $f_i(y)$. Тогда при любом $y = y^*$ можно построить интерполяционный кубический многозвенник $S(x)$ на множестве значений $f_i(y^*)$ ([3], § 1). При этом, если $f_0(y) = f_N(y)$, то можно построить периодический многозвенник. Если это не так, то нужно задать еще две функции $g_0(y)$ и $g_N(y)$ на линиях $x = x_0$, $x = x_N$ или на продолжениях граничных ячеек при $x = x_1$, $x = x_{N-1}$ и придать им смысл производных $\frac{\partial^p S}{\partial x^p}$ ($p \leq 2$). Тогда с этими условиями можно строить непериодические кубические многозвенники.

Рассматривая в уравнениях кубических многозвенников y как переменный параметр, получаем функцию двух независимых перемен-

ных x и y , которая, очевидно, является полумногозвенником. В силу того, что в коэффициенты интерполяционного кубического многозвенника значения функции и граничные условия входят линейно, его уравнение при $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ можно записать в виде:

$$S(x; \{f_i(y)\}) = \sum_{k=0}^3 C_{ik}(x) f_k(y) + D_{i0}(x) q_0(y) + D_{iN}(x) q_N(y), \quad (1.3)$$

где $C_{ik}(x), D_{ik}(x)$ суть кубические полиномы.

Если функции $f_k(y), q_k(y)$ обладают непрерывными производными до порядка σ , то можно построить полумногозвенник $S(x; \{f_i^{(q)}(y)\})$ с функциями $f_i^{(q)}(y)$ и $q_i^{(q)}(y)$ ($q \leq \sigma$). В силу представления (1.3)

$$\frac{\partial^q S(x; \{f_i(y)\})}{\partial y^q} = S(x; \{f_i^{(q)}(y)\}). \quad (1.4)$$

Если задана функция $f(x, y)$ периодическая по x или имеющая непрерывные частные производные по x до порядка $\rho \leq 2$, то можно положить

$$f_i(y) = f(x_i, y) \quad (i = 0, 1, \dots, N), \quad (1.5)$$

$$q_i(y) = \frac{\partial^{\rho} f(x_i, y)}{\partial x^{\rho}}, \quad (i = 0 \text{ или } -1; N \text{ или } N+1)$$

В этом смысле полумногозвенник $S(x; \{f_i(y)\})$ интерполирует функцию $f(x, y)$ на множестве линий Δ_x .

Концепция полумногозвенников позволяет достаточно просто переносить выводы теории многозвенных функций одной переменной на функции двух переменных.

§ 2. Бикубические многозвенники. Интерполирование

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ [4]. Пусть прямоугольная область $R [a \leq x \leq b; c \leq y \leq d]$ на плоскости разделена на ячейки линиями $x = x_i, y = y_j$, где x_i и y_j принадлежат множествам точек:

$$\Delta_x: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_{N-1} < x_N = b, \quad (2.1a)$$

$$\Delta_y: c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_j < \dots < y_{M-1} < y_M = d. \quad (2.1б)$$

На R определена функция $z = S(x, y)$, обладающая двумя свойствами:

а) в каждой ячейке R_{ij} $S(x, y)$ является бикубическим

полиномом

$$P(x - x_i, y - y_j) = \sum_{\lambda=0}^3 \sum_{\mu=0}^3 \alpha_{\lambda\mu}^{(ij)} (x - x_i)^{\lambda} (y - y_j)^{\mu}; \quad (2.2)$$

б) $S(x, y)$ непрерывна в R и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial^{\rho+q} S}{\partial x^{\rho} \partial y^q}$, ($\rho \leq 2, q \leq 2$), что обозначается как $S(x, y) \in C^{2,2}[R]$.

Такую функцию назовем бикубическим многозвенником (рис.1).

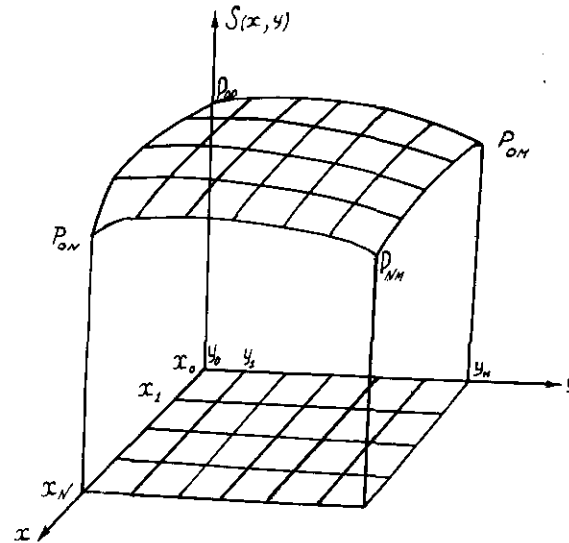


Рис. 1.

2. Задача интерполирования. Пусть в области $R [a \leq x \leq b; c \leq y \leq d]$ в узлах сетки P_{ij} ($i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M$) заданы значения функций $z_{ij} = f(x_i, y_j)$. Требуется построить бикубический многозвенник на той же сетке, интерполирующий $f(x, y)$, т.е.

$$S(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) \quad (i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M), \quad (2.3)$$

и удовлетворяющий на границах области одному из следующих типов условий, задаваемых в точках P_{ij} с координатами x_i, y_j :

$$\begin{aligned} \text{I. а)} \quad \frac{\partial S}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} & \text{при } i=0, N; j=0, 1, \dots, M; \\ \text{б)} \quad \frac{\partial S}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} & \text{при } i=0, 1, \dots, N; j=0, M; \\ \text{в)} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \text{при } i=0, N; j=0, M, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \text{II а)} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \text{при } i=0, N; j=0, 1, \dots, M, \\ \text{б)} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \text{при } i=0, 1, \dots, N; j=0, M, \\ \text{в)} \quad \frac{\partial^4 S}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} & \text{при } i=0, N; j=0, M. \end{aligned} \quad (2.5)$$

III. Общий случай, включающий условия I, II и условия, задаваемые на продолжениях граничных ячеек при $x=x_i, x_{N+1}$ и $y=y_i, y_{M+1}$, запишем в виде:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad \frac{\partial^p S}{\partial x^p} &= \frac{\partial^p f}{\partial x^p} \quad (p \leq 2) & \text{при } i=-1, 0; N, N+1; j=0, 1, \dots, M; \\ \text{б)} \quad \frac{\partial^q S}{\partial y^q} &= \frac{\partial^q f}{\partial y^q} \quad (q \leq 2) & \text{при } i=0, 1, \dots, N; \\ & & j=-1, 0; M, M+1; \\ \text{в)} \quad \frac{\partial^{p+q} S}{\partial x^p \partial y^q} &= \frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q} & \text{при } i=-1, 0; N, N+1; \\ & & j=-1, 0; M, M+1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В предшествующих работах общий случай граничных условий не рассматривался.

IV. Если функция $f(x, y)$ периодическая по одной или обоим переменным, то можно ставить задачу о построении бикубического многозвенника, периодического по одной переменной с условиями в точках P_{0j} и P_{Nj} :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x=x_0} &= \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x=x_N}, \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \Big|_{x=x_0} &= \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \Big|_{x=x_N}. \end{aligned} \right\} \text{при } j=0, 1, \dots, M \quad (2.7a)$$

и условиями (2.6 б) или по обоим переменным с условиями (2.7a) и

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial y} \Big|_{y=y_0} &= \frac{\partial S}{\partial y} \Big|_{y=y_M}, \\ \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \Big|_{y=y_0} &= \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \Big|_{y=y_M}. \end{aligned} \right\} \text{при } i=0, 1, \dots, N. \quad (2.7б)$$

в точках P_{i0}, P_{iM} .

3. Связь между полумногозвенниками и бикубическими многозвенниками. Пусть в области $R'[\alpha' \leq x \leq \beta'; c' \leq y \leq \alpha']$, где $\alpha' = x_0$ или x_i , $\beta' = x_N$ или x_{N+1} и аналогично c' и α' , задана функция $z = f(x, y)$. Разобьем R' на ячейки линиями $x = x_i, y = y_j$ (2.1). Пусть функции $f_i(y)$ и $g_i(y)$ определяются формулами (1.5). Для каждой из них можно построить интерполирующий её на Δy кубический многозвенник, периодический или нет в зависимости от характера функций $f_i(y), g_i(y)$.

Обозначим построенные многозвенники через $x = S_{f_i}(y); x = S_{g_i}(y)$. В свою очередь, они определяют полумногозвенник $x = S(x; \{S_{f_i}(y)\})$.

Покажем, что последний будет представлять собой бикубический многозвенник, интерполирующий $f(x, y)$.

Действительно, полумногозвенник выражается формулой (1.3), в которой $f_k(y) = S_{f_k}(y)$ и $g_k(y) = S_{g_k}(y)$. В этой формуле $C_{i_k}(x)$ и $D_{i_k}(x)$ - кубические полиномы для $x_i \leq x \leq x_{i+1}$. Но для $y_j \leq y \leq y_{j+1}$ $S_{f_k}(y)$ и $S_{g_k}(y)$

также являются кубическими полиномами, и, следовательно, в каждой ячейке R_{ij} функция $S(x; \{S_{f_i}(y)\})$ есть бикубический полином. По построению, $S(x; \{S_{f_i}(y)\}) \in C^{1,2}[R]$ и, следовательно, является бикубическим многозвенником $S(x, y)$.

Аналогичная процедура построения интерполяционной функции на прямоугольной сетке узлов применяется и в классических задачах интерполирования [6] (гл. 2).

4. Существование и единственность решения интерполяционной задачи. Мы видели, что построение интерполяционного бикуби-

ческого многозвенника сводится к построению кубических многозвенников и полумногозвенника от двух переменных. Последний, в свою очередь, строится как кубический многозвенник, зависящий от параметра. Каждая из этих задач имеет, и притом единственное, решение ([8], теорема 2.1). Следовательно, существует единственный бикубический многозвенник $S(x, y)$, интерполирующий $f(x, y)$ с граничными условиями типов I-IV.

Этот вопрос для условий типа I впервые был изучен де Боро [2], который использовал для этой цели специальное представление бикубического многозвенника.

§ 3. Параллельный алгоритм решения задачи интерполирования

В данном параграфе дается подробное изложение алгоритма, принципиальная схема которого описана в п⁰ 3 § 2, и производных его анализ с точки зрения понятия параллельных алгоритмов, как оно введено в монографии Э.В. Евреинова и В.Г. Косарева [7] (гл. 7).

Пусть имеем прямоугольную сетку узлов P_{ij} с координатами (x_i, y_j) (2.1), в которых заданы значения функции $z_{ij} = f(x_i, y_j)$. В граничных узлах сетки (или в дополнительных узлах $P_{-1,j}$, $P_{N+1,j}$ и аналогично по другой паре границ) для неперидических многозвенников задаются граничные условия - частные производные функции $f(x, y)$.

Э т а п I. Расположим величины $z_{ij} = \alpha_{oo}^{(i,j)}$ в виде таблицы I, по строкам которой размещены данные на линиях $y = y_j$, а по столбцам - на линиях $x = x_i$. В окаймляющих строках и столбцах соответствующим образом размещаются граничные условия так, что, например, $\alpha_{oo}^{(p,j)} = \frac{\partial^p f}{\partial x^p}$ ($p \leq 2$) в точках P_j или $P_{N+1,j}$. В угловых клетках таблицы размещаются смешанные производные функции $f(x, y)$, например, $\alpha_{oo}^{(1,1)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ в точке P_{oo} или $P_{1,0}$, $P_{0,1}$, $P_{-1,1}$. Если по переменной x или y функция $f(x, y)$ периодическая, то отсутствуют окаймляющие столбцы или строки соответственно.

Для функции периодической по обеим переменным остается только внутренняя часть таблицы.

Т а б л и ц а 1

$\alpha_{oo}^{(-1,M+1)}$	$\alpha_{oo}^{(0M+1)}$	$\alpha_{oo}^{(1M+1)}$...	$\alpha_{oo}^{(N-1M+1)}$	$\alpha_{oo}^{(NM+1)}$	$\alpha_{oo}^{(N+1M+1)}$
$\alpha_{oo}^{(-1M)}$	$\alpha_{oo}^{(0M)}$	$\alpha_{oo}^{(1M)}$...	$\alpha_{oo}^{(N-1M)}$	$\alpha_{oo}^{(NM)}$	$\alpha_{oo}^{(N+1M)}$
$\alpha_{oo}^{(-1M-1)}$	$\alpha_{oo}^{(0M-1)}$	$\alpha_{oo}^{(1M-1)}$...	$\alpha_{oo}^{(N-1M-1)}$	$\alpha_{oo}^{(NM-1)}$	$\alpha_{oo}^{(N+1M-1)}$
...
$\alpha_{oo}^{(-1,2)}$	$\alpha_{oo}^{(02)}$	$\alpha_{oo}^{(1,2)}$...	$\alpha_{oo}^{(N-1,2)}$	$\alpha_{oo}^{(N,2)}$	$\alpha_{oo}^{(N+1,2)}$
$\alpha_{oo}^{(1,1)}$	$\alpha_{oo}^{(01)}$	$\alpha_{oo}^{(1,1)}$...	$\alpha_{oo}^{(N-1,1)}$	$\alpha_{oo}^{(N1)}$	$\alpha_{oo}^{(N+1,1)}$
$\alpha_{oo}^{(-1,1)}$	$\alpha_{oo}^{(0,-1)}$	$\alpha_{oo}^{(1,-1)}$...	$\alpha_{oo}^{(N-1,-1)}$	$\alpha_{oo}^{(N,-1)}$	$\alpha_{oo}^{(N+1,-1)}$

Э т а п 2. Вычисления начинаем с построения кубических многозвенников на множестве точек Δ_x (2.1a) по внутренним строкам табл. I с граничными условиями в окаймляющих столбцах. Дело сводится к решению $M+1$ независимых друг от друга систем уравнений ([8], (2.1)). Результаты снова размещаем в виде табл.2, элементы которой представляют собой значения $\alpha_{oo}^{(i,j)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$ в узлах сетки P_{ij} ($i=0,1,\dots,N; j=0,1,\dots,M$), расположенные по тому же правилу, что и z_{ij} в табл. I.

Э т а п 3. Далее строим кубические многозвенники на множестве точек Δ_y (2.1б) по всем столбцам табл. I, включая окаймляющие, если они имеются. Снова приходится решить $N+3$ независимых системы уравнений в неперидическом случае и $N+1$ систему для периодических по x функций. Результаты этого этапа сводим в табл.3, внутренние элементы которой представляют собой коэффициенты $\alpha_{oo}^{(i,j)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}$ в узлах сетки P_{ij} ($i=0,1,\dots,N; j=0,1,\dots,M$). В окаймляющих столбцах полу-

Таблица 2

	$\alpha_{20}^{(0M)}$	$\alpha_{20}^{(1M)}$...	$\alpha_{20}^{(N-1M)}$	$\alpha_{20}^{(NM)}$
	$\alpha_{20}^{(0M-1)}$	$\alpha_{20}^{(1M-1)}$...	$\alpha_{20}^{(N-1M-1)}$	$\alpha_{20}^{(NM-1)}$

	$\alpha_{20}^{(01)}$	$\alpha_{20}^{(1,1)}$...	$\alpha_{20}^{(N-1,1)}$	$\alpha_{20}^{(N1)}$
	$\alpha_{20}^{(00)}$	$\alpha_{20}^{(1,0)}$...	$\alpha_{20}^{(N-1,0)}$	$\alpha_{20}^{(N0)}$

чаются величины:

$$\alpha_{02}^{(i,j)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial P_0 S}{\partial x} \right) (P_0 \leq 2); \quad \alpha_{02}^{(N+1,j)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial P_N S}{\partial x} \right) (P_N \leq 2),$$

$$(j = 0, 1, \dots, M).$$

Таблица 3

$\alpha_{02}^{(-1M)}$	$\alpha_{02}^{(0M)}$	$\alpha_{02}^{(1M)}$...	$\alpha_{02}^{(N-1M)}$	$\alpha_{02}^{(NM)}$	$\alpha_{02}^{(N+1M)}$
$\alpha_{02}^{(-1M-1)}$	$\alpha_{02}^{(0M-1)}$	$\alpha_{02}^{(1M-1)}$...	$\alpha_{02}^{(N-1M-1)}$	$\alpha_{02}^{(NM-1)}$	$\alpha_{02}^{(N+1M-1)}$
...
$\alpha_{02}^{(-1,1)}$	$\alpha_{02}^{(0,1)}$	$\alpha_{02}^{(1,1)}$...	$\alpha_{02}^{(N-1,1)}$	$\alpha_{02}^{(N1)}$	$\alpha_{02}^{(N+1,1)}$
$\alpha_{02}^{(-1,0)}$	$\alpha_{02}^{(0,0)}$	$\alpha_{02}^{(1,0)}$...	$\alpha_{02}^{(N-1,0)}$	$\alpha_{02}^{(N0)}$	$\alpha_{02}^{(N+1,0)}$

Этап 4. Если в последних формулах переставить порядок дифференцирования по x и y , то нетрудно видеть, что строки табл.3 содержат информацию для построения функций

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 S(x, y_j)}{\partial y^2} \quad (j = 0, 1, \dots, M) \text{ в виде кубических многозвенников по } x. \text{ На этом этапе приходится решить } M+1 \text{ систему уравнений. Результаты вычислений составляют табл.4, в которой}$$

$$\alpha_{22}^{(i,j)} = \frac{1}{4} \frac{\partial^4 S}{\partial x^2 \partial y^2} \text{ в узлах } P_{ij}.$$

Таблица 4

	$\alpha_{22}^{(0M)}$	$\alpha_{22}^{(1M)}$...	$\alpha_{22}^{(N-1M)}$	$\alpha_{22}^{(NM)}$
	$\alpha_{22}^{(0M-1)}$	$\alpha_{22}^{(1M-1)}$...	$\alpha_{22}^{(N-1M-1)}$	$\alpha_{22}^{(NM-1)}$

	$\alpha_{22}^{(01)}$	$\alpha_{22}^{(1,1)}$...	$\alpha_{22}^{(N-1,1)}$	$\alpha_{22}^{(N1)}$
	$\alpha_{22}^{(0,0)}$	$\alpha_{22}^{(1,0)}$...	$\alpha_{22}^{(N-1,0)}$	$\alpha_{22}^{(N0)}$

Этап 5. Знания величин, стоящих во внутренних частях таблицы I-4, достаточно для вычисления в каждой ячейке $[x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}]$ всех 16 коэффициентов $\alpha_{\lambda\mu}^{(i,j)}$. Действительно, бикубический многозвенник при $y = y_j$ превращается в кубический с уравнением i -го звена

$$z^{(i,j)}(x, y_j) = \sum_{\lambda=0}^3 \alpha_{\lambda 0}^{(i,j)} (x - x_i)^\lambda \quad (j = 0, 1, \dots, N). \quad (3.1)$$

Но тогда таблицы I и 2 содержат нулевые и вторые коэффициенты этих кубических многозвенников. Как было показано ранее, можно найти и два других коэффициента (см. [8], формулы (I.9) и (I.10)):

$$\alpha_{30}^{(ij)} = \frac{\alpha_{20}^{(i+1,j)} - \alpha_{20}^{(i,j)}}{3h_i}, \quad (3.2)$$

$$\alpha_{20}^{(ij)} = \frac{\alpha_{00}^{(i+1,j)} - \alpha_{00}^{(i,j)}}{h_i} - \frac{h_i}{3} (\alpha_{20}^{(i+1,j)} + 2\alpha_{20}^{(i,j)}), \quad (3.3)$$

$(i = 0, 1, \dots, N-1; j = 0, 1, \dots, M).$

Вычисляются две группы по $N(M+1)$ величин в каждой, причем все эти величины определяются независимо одна от другой.

Точно также таблицы 3 и 4 содержат нулевые и вторые коэффициенты кубических многозвенников - функций $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 S(x, y)}{\partial y^2}$

$(j = 0, 1, \dots, M)$. Коэффициенты $\alpha_{32}^{(ij)}$ и $\alpha_{12}^{(ij)}$ снова вычисляются по формулам (3.2) и (3.3), где индекс μ у $\alpha_{\lambda\mu}^{(ij)}$ равен 2.

Т а б л и ц а 6. Таким образом, найдены $\alpha_{\lambda 0}^{(ij)}$ и $\alpha_{\lambda 2}^{(ij)}$ ($\lambda = 0, 1, 2, 3$). При фиксированном λ они представляют собой нулевые и вторые коэффициенты кубических многозвенников - функций $\frac{1}{\lambda!} \frac{\partial^\lambda S(x, y)}{\partial x^\lambda}$ ($\lambda = 0, 1, 2, 3$) ($i = 0, 1, \dots, N-1$). Значения остальных коэффициентов находятся по формулам, аналогичным (3.2) и (3.3):

$$\alpha_{\lambda 3}^{(ij)} = \frac{\alpha_{\lambda 2}^{(i+1,j)} - \alpha_{\lambda 2}^{(i,j)}}{3l_j}, \quad (3.4)$$

$$\alpha_{\lambda 1}^{(ij)} = \frac{\alpha_{\lambda 0}^{(i+1,j)} - \alpha_{\lambda 0}^{(i,j)}}{l_j} - \frac{l_j}{3} (\alpha_{\lambda 2}^{(i+1,j)} + 2\alpha_{\lambda 2}^{(i,j)}), \quad (3.5)$$

где $l_j = y_{j+1} - y_j$ ($i = 0, 1, \dots, N-1; j = 0, 1, \dots, M-1$).

Этим закончено построение интерполяционного бикубического многозвенника. В процессе образования таблиц 2, 3 и 4 нам пришлось многократно находить решения для кубических многозвенников, всего $2M + N + 5$ раз в непериодическом и $2M + N + 3$ раз в периодическом по x случаях. В этом смысле рассмотренный алгоритм аналогичен алгоритму работы [2]. Однако в последней рассмотрен лишь случай граничных условий, когда на границах области заданы первые частные производные и соответственно вторые смешанные частные производные в условных точ-

ках. Преимущество же нашего алгоритма в том, что он решает задачу для всех типов граничных условий одновременно. После формирования таблицы I можно, вообще, не интересоваться их характером.

При проведении расчетов, связанных с бикубическими многозвенниками, кроме массивов x -ов и y -ов (2.1), достаточно хранить внутренние части таблиц I-4, вычисляя остальные коэффициенты по формулам (3.2)-(3.5).

Выполнение этапов 2-4 свелось к многократному решению независимых одна от другой на данном этапе задач интерполирования бикубическими многозвенниками. Следовательно, каждый из этих этапов представляет собой часть алгоритма с независимыми ветвями. На этапах 5 и 6 производится расчеты по формулам (3.2)-(3.3) и (3.4)-(3.5) соответственно. Они также состоят в многократном повторении независимо одно от другого одинаковых вычислений.

Итак, весь алгоритм интерполирования состоит из шести блоков, каждый из которых распараллеливается на независимые ветви, и в этом смысле называется параллельным алгоритмом [7] (гл. 7). Он может быть реализован на вычислительной системе, состоящей из ℓ машин, следующим образом.

На первом этапе в каждую ЭЦВМ заносятся массивы x -ов и y -ов (2.1). Формируется таблица I, имеющая N' столбцов ($N' = N + 3$ или $N + 1$) и M' строк ($M' = M + 3$ или $M + 1$), и строки распределяются между машинами. Пусть ζ_1 и η_1 - целые числа такие, что $N' = \zeta_1 \ell + \eta_1$ и $\eta_1 < \ell$. Тогда в первые $\ell - \eta_1$ машин заносятся по ζ_1 строк, а в остальные η_1 машин по $\zeta_1 + 1$ строке таблицы I.

На втором этапе каждая машина выполняет построение интерполяционных кубических многозвенников для своих строк из таблицы I, кроме окаймляющих строк этой таблицы, и результаты записываются в её памяти как часть таблицы 2.

Третьему этапу предшествует обмен информацией между машинами. Пусть снова ζ_2 и η_2 - целые числа и $N' = \zeta_2 \ell + \eta_2$, $\eta_2 < \ell$. Обмен состоит в том, что, помимо уже хранящейся информации, в первые $\ell - \eta_2$ машин вызываются по ζ_2 столбцов таблицы I, а остальные η_2 машин по $\zeta_2 + 1$ столбцу. Затем в каждой машине производится расчет интерполяционных кубических

многозвенников по этим столбцам, и результаты записываются на место информации, вызванной для производства третьего этапа, как части - столбцы-таблицы 3.

Перед началом четвертого этапа снова необходим обмен информацией такой, чтобы машины содержали части таблицы 3, выписанные по строкам, число которых $M+1$. В каждую машину заносятся те же строки таблицы 3, что и хранящиеся там строки таблицы 2. Затем по этим строкам производится расчет интерполяционных кубических многозвенников, и результаты записываются в памяти машин как части таблицы 4.

Таким образом, в каждой машине системы записаны одни и те же внутренние строки таблиц I-4, а в первой и последней еще и окаймляющие строки таблицы I.

На пятом этапе по имеющимся в машине элементам таблиц I и 2 по формулам (3.2) и (3.3) вычисляются соответствующие коэффициенты. Затем то же самое повторяется по элементам таблиц 3 и 4. Результаты записываются в памяти машины. Таким образом, получаются еще четыре таблицы: 5 из коэффициентов $\alpha_{30}^{(ij)}$, 6 - из $\alpha_{31}^{(ij)}$, 7 - из $\alpha_{32}^{(ij)}$ и 8 - из $\alpha_{33}^{(ij)}$, имеющие на один столбец меньше, чем таблицы 3-4. Таким образом, в памяти каждой машины окажутся строки с одинаковыми номерами из таблиц I-8.

Последнему шестому этапу предшествует обмен информацией между машинами. Из каждой последующей машины в предыдущую передается первая из хранящихся в ней строк таблиц I-8. После этого по формулам (3.4) и (3.5) в каждой машине вычисляются соответствующие части - строки - таблицы 9-16, а именно:

из таблиц I и 3 таблицы 9 и 10 коэффициентов $\alpha_{25}^{(ij)}$ и $\alpha_{26}^{(ij)}$;
из таблиц 6 и 8 таблицы 11 и 12 коэффициентов $\alpha_{13}^{(ij)}$ и $\alpha_{14}^{(ij)}$;
из таблиц 2 и 4 таблицы 13 и 14 коэффициентов $\alpha_{23}^{(ij)}$ и $\alpha_{24}^{(ij)}$;
из таблиц 5 и 7 таблицы 15 и 16 коэффициентов $\alpha_{33}^{(ij)}$ и $\alpha_{34}^{(ij)}$;
Таблицы 9-16 имеют на одну строку меньше, чем предыдущие таблицы.

Окончательно в памяти каждой ЭЦВМ системы оказываются из таблиц I-16 строки с одинаковыми номерами, только в первой и последних машинах число строк изменяется за счет их сокращения на одну или две. Имеется, таким образом, полная информация об интерполяционном бикубическом многозвеннике.

§ 4. Сходимость интерполяции бикубическими многозвенниками

I. Предварительные замечания. Сходимость интерполяционного процесса в двумерном случае изучалась в работах [3,4], где указан прием распространения результатов для кубических многозвенников на бикубические, основанный на связи последних с полумногозвенниками. Таким способом в [3,4] определен порядок сходимости для функций $f(x,y) \in C^{22}$ и $f(x,y) \in C^{44}$ без явных оценок остаточных членов. Мы воспользуемся указанной идеей, чтобы перенести все выводы о свойствах сходимости интерполирования кубическими многозвенниками [8] (§§ 4,5) на функции двух переменных.

Пусть $\Delta_{nm} = (\Delta_x)_n (\Delta_y)_m$ - последовательность разбиений области R на ячейки, где

$$(\Delta_x)_n: \alpha = x_{n,0} < x_{n,1} < \dots < x_{n,i} < \dots < x_{n,n_2} = \beta, \quad (4.1a)$$

$$(\Delta_y)_m: c = y_{m,0} < y_{m,1} < \dots < y_{m,j} < \dots < y_{m,j_2} = d. \quad (4.1b)$$

Обозначим:

$$h_{n,i} = x_{n,i+1} - x_{n,i}, \quad l_{m,j} = y_{m,j+1} - y_{m,j}, \\ h_n = \max_i h_{n,i}, \quad l_m = \max_j l_{m,j}.$$

На расстояния h могут налагаться некоторые условия ([8], формулы (4.4), (4.5)). Аналогичные условия могут вводиться и для $l_{m,j}$.

Функция $f(x,y)$ будет рассматриваться в областях R^{10} , R^{01} и R^{00} . Они совпадают с R - если $f(x,y)$ по каждой из переменных либо периодическая, либо с граничными условиями типов I и II. Если же по переменной x она подчиняется условиям типа III, то R^{10} есть расширенный по x прямоугольник $[\alpha' \leq x \leq \beta']$; $c \leq y \leq d$, где $\alpha' = x_{n,0}$ или $x_{n,1}$, $\beta' = x_{n,n_2}$ или x_{n,n_2+1} . Аналогично, если условия типа III имеют место по y , то R^{01} - расширенный прямоугольник $[\alpha \leq x \leq \beta; c' \leq y \leq d']$. R^{00} представляет область $[\alpha' \leq x \leq \beta'; c' \leq y \leq d']$, расширенную по одной или обоим переменным.

Далее нам придется пользоваться некоторыми понятиями теории функций двух переменных.

Модуль непрерывности непрерывной функции $f(x, y)$ как функции одной переменной x , считая другую параметром, запишем так:

$$\omega_{00}(H_n; y) = \max_{|x'' - x'| \leq H_n} |f(x'', y) - f(x', y)|. \quad (4.2a)$$

В силу равномерной непрерывности функции $f(x, y)$ в области R $\omega_{00}(H_n; y)$ — непрерывная функция H_n и y , монотонно возрастающая по H_n . Аналогичными свойствами обладает и функция

$$\omega_{00}(x; L_m) = \max_{|y'' - y'| \leq L_m} |f(x, y'') - f(x, y')|. \quad (4.2b)$$

Если обозначать через R_{nm} произвольную прямоугольную под-область области R с длиной сторон, не превышающей H_n по x и L_m по y , то аналог модуля непрерывности для функции двух переменных представится в виде:

$$\omega_{00}(H_n, L_m) = \max_{(x', y'), (x'', y') \in R_{nm}} |f(x'', y'') - f(x', y'') + f(x', y') - f(x'', y')|. \quad (4.3)$$

$\omega_{00}(L_m, H_n)$ есть непрерывная функция двух переменных H_n , L_m , монотонно возрастающая по каждой из них. Индексы у модулей непрерывности будут использоваться для указания порядка дифференцирования функции $f(x, y)$ по x и y .

2. Сходимость для функций f класса $C^{v, \sigma}$ ($v \leq 3, \sigma \leq 3$). Пусть функция $f(x, y) \in C^{v, \sigma}[R^{10}]$ ($v \leq 3$). При любом фиксированном $y = y^*$ её можно интерполировать кубическим многозвенником $S_n(x; y^*)$ с выполнением тех или иных граничных условий. Согласно выводам работы [8] (§ 4, 5) могут быть сделаны оценки остаточных членов, из которых при определенных ограничениях на промежутки h_{ni} вытекают теоремы вида:

$$\left| \frac{\partial^z f(x, y^*)}{\partial x^z} - \frac{\partial^z S_n(x, y^*)}{\partial x^z} \right| \leq B_{vz} \omega_{v0}(H_n; y^*) H_n^{v-z} \quad (4.4a)$$

$(z \leq v)$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по x на $[\alpha, \beta]$.

Здесь $B_{vz} = A_v C_{vz}$, причем A_v может зависеть от относительных промежутков h_{ni} , а C_{vz} — константы в оценочных формулах ([8], формулы (4.13), (4.30), (4.44), (4.69)).

Аналогично, если $f(x, y) \in C^{v, \sigma}[R^{01}]$ ($\sigma \leq 3$), при соответствующих ограничениях на $L_{m,j}$ имеет место:

$$\left| \frac{\partial^t f(x^*, y)}{\partial y^t} - \frac{\partial^t S_n(x^*; y)}{\partial y^t} \right| \leq B_{\sigma t} \omega_{0t}(L_m) L_m^{\sigma-t} \quad (4.4b)$$

$(t \leq \sigma)$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по y на $[\alpha, \beta]$.

Рассмотрим оценки и отвечающие им теоремы сходимости для двух независимых переменных.

ЛЕММА 4.1. Пусть $f(x, y) \in C^{v, \sigma}[R^{10}]$ ($v \leq 3$) и пусть $S(x; \{f_{n,i}(y)\})$ — полумногозвенник, интерполирующий $f(x, y)$ на множестве линий $(\Delta_x)_n$. Тогда если $H_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и выполняется предложение (4.4a), то

$$\left| \frac{\partial^{z+t} f(x, y)}{\partial x^z \partial y^t} - \frac{\partial^{z+t} S(x; \{f_{n,i}(y)\})}{\partial x^z \partial y^t} \right| \leq B_{vz} \omega_{vt}(H_n; y) H_n^{v-z-t} \quad (4.5)$$

$(z \leq v, t \leq \sigma)$

равномерно по (x, y) в R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции $f(x, y^*)$, интерполируемой кубическим многозвенником $S_n(x; y^*)$, верна оценка (4.4a). Будем далее рассматривать y как переменный параметр. При этом, очевидно, кубический многозвенник перейдет в полумногозвенник $S(x; \{f_{n,i}(y)\})$ (1.3) с условиями (1.5). Тогда оценка (4.4a) переходит в неравенство

$$\left| \frac{\partial^z f(x, y)}{\partial x^z} - \frac{\partial^z S(x; \{f_{n,i}(y)\})}{\partial x^z} \right| \leq B_{vz} \omega_{v0}(H_n; y) H_n^{v-z} \quad (z \leq v).$$

Подобное же неравенство будет иметь место и для функции $\frac{\partial^t f(x, y)}{\partial y^t}$ ($t \leq \sigma$). Но, тогда, используя свойство (1.4), получаем оценку (4.5).

Так как функция $\omega_{vt}(H_n; y)$ — непрерывная в замкнутой области $[0 \leq H_n \leq \beta - \alpha; \alpha \leq y \leq \beta]$, то при $H_n \rightarrow 0$ $\omega_{vt}(H_n; y) \rightarrow 0$ равномерно по y . Следовательно, правая часть (4.5) стремится к нулю равномерно в R .

Лемма остается верной, если x и y поменять ролями.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $f(x, y) \in C^{v, \sigma}[R^{10}]$ ($v, \sigma \leq 3$) и пусть $S_{nm}(x, y)$ — бикубический многозвенник, интерполирующий $f(x, y)$ на множестве $\Delta_{nm} = (\Delta_x)_n (\Delta_y)_m$. Тогда, если $H_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и выполняется предложение (4.4a), а $L_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, и выполняется предложение (4.4b), то

$$\left| \frac{\partial^{2+t} f(x, y)}{\partial x^2 \partial y^t} - \frac{\partial^{2+t} S_{nm}(x, y)}{\partial x^2 \partial y^t} \right| \leq B_{\nu_2} \omega_{\nu_2}(H_n; y) H_n^{\nu-2} +$$

$$+ B_{\sigma_2} \omega_{\sigma_2}(L_m; x) L_m^{\sigma-t} + B_{\nu_2} B_{\sigma_2} \omega_{\nu\sigma}(H_n, L_m) H_n^{\nu-2} L_m^{\sigma-t} \rightarrow 0$$

$$(z \leq \nu; t \leq \sigma) \quad (4.6)$$

равномерно по (x, y) в R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S(x; \{f_{n,i}(y)\})$ - полумногозвенник, интерполирующий $f(x, y)$ на $(\Delta_x)_n$. Тогда можно записать

$$\left| \frac{\partial^{2+t} f(x, y)}{\partial x^2 \partial y^t} - \frac{\partial^{2+t} S_{nm}(x, y)}{\partial x^2 \partial y^t} \right| \leq \left| \frac{\partial^{2+t} f(x, y)}{\partial x^2 \partial y^t} - \frac{\partial^{2+t} S(x; \{f_{n,i}(y)\})}{\partial x^2 \partial y^t} \right| + \left| \frac{\partial^{2+t} S(x; \{f_{n,i}(y)\})}{\partial x^2 \partial y^t} - \frac{\partial^{2+t} S_{nm}(x, y)}{\partial x^2 \partial y^t} \right| \quad (4.7)$$

Для первого члена справа верна оценка (4.5). Во втором члене, обозначаемом через Φ_{nm} , $S_{nm}(x, y)$ можно рассматривать как полумногозвенник по y , интерполирующий функцию $S(x; \{f_{n,i}(y)\})$, которая вместе с $f(x, y)$ удовлетворяет условиям леммы 4.1 по переменной y . Поэтому имеет место оценка, аналогичная (4.5):

$$\Phi_{nm} \leq B_{\sigma_2} L_m^{\sigma-t} \max_{|y''-y'| \leq L_m} \left| \frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma} \left(\frac{\partial^2 S(x; \{f_{n,i}(y'')\})}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma} \left(\frac{\partial^2 S(x; \{f_{n,i}(y')\})}{\partial x^2} \right) \right|$$

Отсюда, учитывая (I.4), получаем

$$\Phi_{nm} \leq B_{\sigma_2} L_m^{\sigma-t} \max_{|y''-y'| \leq L_m} \left\{ \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} [S(x; \{f_{n,i}^{(0)}(y'')\}) - S(x; \{f_{n,i}^{(0)}(y')\})] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^\sigma f(x, y'')}{\partial y^\sigma} - \frac{\partial^\sigma f(x, y')}{\partial y^\sigma} \right] \right\} \right\|$$

В этой формуле максимум второго члена в фигурной скобке есть модуль непрерывности (4.2б). Первый же член представляет собой остаточный член z -й производной по x интерполирования функции $\frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma} [f(x, y'') - f(x, y')]$ полумногозвенником в виде разности полумногозвенников. Применяя к нему оценку (4.5) и учитывая (4.3), имеем

$$\Phi_{nm} \leq B_{\sigma_2} L_m^{\sigma-t} \{ \omega_{\sigma_2}(L_m; x) + B_{\nu_2} H_n^{\nu-2} \omega_{\nu\sigma}(H_n, L_m) \}. \quad (4.8)$$

Возвращаясь к неравенству (4.7), с помощью (4.5) и (4.8) получаем оценку (4.6). Равномерность её вытекает из равномерности оценки (4.5). Теорема доказана.

Пусть функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям (аналоги условия Гёльдера):

$$|f(x'', y) - f(x', y)| \leq G'_{\sigma_0}(y) |x'' - x'|^{\sigma_1}; \quad x', x'' \in [\alpha, \beta]; \quad (4.9a)$$

$$|f(x, y'') - f(x, y')| \leq G''_{\sigma_0}(x) |y'' - y'|^{\sigma_2}; \quad y', y'' \in [c, d]; \quad (4.9b)$$

где $0 < \sigma_1 \leq 1$, $0 < \sigma_2 \leq 1$, а $G'_{\sigma_0}(x)$ и $G''_{\sigma_0}(y)$ - непрерывные положительные функции. Тогда нетрудно видеть, что справедливо еще одно неравенство:

$$|f(x'', y'') - f(x'', y') - f(x', y'') + f(x', y')| \leq G_{\sigma_0} |x'' - x'|^{\sigma_1} |y'' - y'|^{\sigma_2}, \quad (4.10)$$

где G_{σ_0} - постоянная. Индексы у величин G обозначают порядок дифференцирования функции $f(x, y)$ по x, y .

Из теоремы (4.1) с учетом (4.2), (4.3) и неравенств (4.9) и (4.10) вытекает:

СЛЕДСТВИЕ 4.1. В условиях теоремы 4.1, если выполняются неравенства (4.9)

для $\frac{\partial^{\nu+\sigma}}{\partial x^\nu \partial y^\sigma} f(x, y)$ и $n, m \rightarrow \infty$, то

$$\left| \frac{\partial^{2+t} f(x, y)}{\partial x^2 \partial y^t} - \frac{\partial^{2+t} S_{nm}(x, y)}{\partial x^2 \partial y^t} \right| \leq B_{\nu_2} G'_{2t}(y) H_n^{\nu-2+\sigma_1} +$$

$$+ B_{\sigma_2} G''_{2t}(x) L_m^{\sigma-t+\sigma_2} + B_{\nu_2} B_{\sigma_2} G_{2t} H_n^{\nu-2+\sigma_1} L_m^{\sigma-t+\sigma_2} \rightarrow 0 \quad (4.11)$$

равномерно по (x, y) в R .

3. СХОДИМОСТЬ ДЛЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА $C^{k,k}[R]$. Если $f(x, y) \in C^{k,k}[R^*]$, то

$$\omega_{3,t}(H_n; y) \leq \max_{\alpha \leq \xi \leq \beta} \left| \frac{\partial^{2+t} f(\xi, y)}{\partial x^2 \partial y^t} \right| H_n,$$

аналогично $\omega_{2,3}(x; L_m)$;

$$\omega_{3,3}(H_n, L_m) \leq \max_{(\xi, \eta) \in R^*} \left| \frac{\partial^3 f(\xi, \eta)}{\partial x^2 \partial y^1} \right|$$

Теорема 4.1. имеет еще одно

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть $f(x, y) \in C^{k,k}[R^*]$. Тогда в условиях теоремы 4.1

при $n, m \rightarrow \infty$

$$\left| \frac{\partial^{2+t} f(x, y)}{\partial x^2 \partial y^t} - \frac{\partial^{2+t} S_{nm}(x, y)}{\partial x^2 \partial y^t} \right| \leq B_{32} \max_{a' \leq \xi \leq b'} \left| \frac{\partial^{4+t} f(\xi, y)}{\partial x^4 \partial y^t} \right| H^{4-t} + B_{3t} \max_{c' \leq \eta \leq d'} \left| \frac{\partial^{2+4} f(x, \eta)}{\partial x^2 \partial y^4} \right| L_m^{4-t} B_{32} \max_{\xi \in R} \left| \frac{\partial^8 f(\xi, \eta)}{\partial x^4 \partial y^4} \right| H_n^{4-t} L_m^{4-t} \quad (4.12)$$

$(2 \leq 3; t \leq 3)$

равномерно по (x, y) в R .

Наконец, рассмотрим теорему, являющуюся двумерным аналогом теоремы 5.5 из [8] о связи разрывов третьих производных кубического многозвенника и четвертых производных интерполируемой функции.

На расстояния между узлами наложим ограничения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_{n,i}}{h_{n,i-1}} = 1 \quad (i=1, 2, \dots, N_n-1), \quad (4.13)$$

ЛЕММА 4.2. Пусть $f(x, y) \in C^{4,4} [R]$ и пусть $S(x; \{f_{n,i}(y)\})$ - полумногозвенник, интерполирующий $f(x, y)$ на $(\Delta_x)_n$, либо периодический по переменной x , либо с граничными условиями типа I. Если $H_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и выполняются условия (4.13), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\max_i \left| \frac{1}{H_n} \left(\frac{\partial^{3+t} S(x_{n,i+1}; \{f_{n,i}(y)\})}{\partial x^3 \partial y^t} - \frac{\partial^{3+t} S(x_{n,i}; \{f_{n,i}(y)\})}{\partial x^3 \partial y^t} \right) - \frac{\partial^{4+t} f(x_{n,i}, y)}{\partial x^4 \partial y^t} \right| \right] = 0 \quad (t \leq 3). \quad (4.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для фиксированного $y = y^*$ полумногозвенник $S(x; \{f_{n,i}(y)\})$ переходит в кубический многозвенник, интерполирующий $f(x, y^*)$, для которого по теореме 5.5 из [8] имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\max_i \left| \frac{1}{H_n} \left(\frac{\partial^3 S(x_{n,i+1}; \{f_{n,i}(y^*)\})}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 S(x_{n,i}; \{f_{n,i}(y^*)\})}{\partial x^3} \right) - \frac{\partial^4 f(x_{n,i}, y^*)}{\partial x^4} \right| \right] = 0 \quad (4.15)$$

Будем рассматривать здесь y^* как переменных параметр. Построим полумногозвенник $S(x; \{f_{n,i}^{(t)}(y)\})$ интерполирующий функцию $\frac{\partial^t f(x, y)}{\partial y^t}$ на множестве $(\Delta_x)_n$ с граничными условиями того же типа, что и $S(x; \{f_{n,i}(y)\})$. Равенство (4.16) будет, очевидно, по-прежнему, выполняться и для нового полумногозвенника. Из него в силу формулы (I.4) получаем равенство (4.14), что и доказывает лемму.

Она остается справедливой и в случае, если x и y поменять ролями.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $f(x, y) \in C^{4,4} [R^n]$ и пусть $S_{nm}(x, y)$ - бикубический многозвенник, интерполирующий $f(x, y)$ и по каждой из переменных либо периодический, либо с граничными условиями типа I. Если $H_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и для $h_{n,i}$ выполняются условия (4.13), а $L_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ и для $l_{m,j}$ выполняются аналогичные условия, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\max_{i,j} \left| \frac{1}{H_n L_m} \left(\frac{\partial^6 S(x_{n,i+1}, y_{m,j+1})}{\partial x^3 \partial y^3} - \frac{\partial^6 S(x_{n,i+1}, y_{m,j})}{\partial x^3 \partial y^3} - \frac{\partial^6 S(x_{n,i}, y_{m,j+1})}{\partial x^3 \partial y^3} + \frac{\partial^6 S(x_{n,i}, y_{m,j})}{\partial x^3 \partial y^3} \right) - \frac{\partial^4 f(x_{n,i}, y_{m,j})}{\partial x^4 \partial y^4} \right| \right] = 0 \quad (4.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S(x; \{f_{n,i}(y)\})$ - полумногозвенник, интерполирующий $f(x, y)$ на множестве линий $(\Delta_x)_n$ и с теми же граничными условиями, что и $S(x, y)$. Как уже отмечалось, $S(x, y)$ можно рассматривать как полумногозвенник, интерполирующий $S(x; \{f_{n,i}(y)\})$ на множестве $(\Delta_y)_m$. Тогда, обозначая комбинацию четырех значений $\frac{1}{H_n L_m} \frac{\partial^6 S}{\partial x^3 \partial y^3}$ через Φ_{nm} , по лемме 4.2 получим

$$\Phi_{nm} = \frac{1}{H_n} \left[\frac{\partial^3 S(x_{n,i+1}; \{f_{n,i}(y)\})}{\partial x^3 \partial y^4} - \frac{\partial^3 S(x_{n,i}; \{f_{n,i}(y)\})}{\partial x^3 \partial y^4} \right] + \varepsilon'_{nm},$$

где $\varepsilon'_{nm} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ и любом n . По этой же лемме

$$\Phi_{nm} = \frac{\partial^4 f(x_{n,i}, y_{m,j})}{\partial x^4 \partial y^4} + \varepsilon'_{nm} - \varepsilon_{nm},$$

где $\varepsilon''_{nm} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и любом m . Но отсюда следует существование двойного предела (4.16), и теорема доказана.

Ради сокращения изложения в теореме 4.I мы дали оценки остаточных членов сразу через модули непрерывности функций. Однако, как и в одномерном случае, для фактического вычисления погрешностей интерполяции достаточно вместо модулей непрерывности определять вариации функций в ячейках и находить их наибольшие значения по всем ячейкам.

Тем не менее практическое использование полученных оценок весьма затруднительно. Так, например, при выборе сетки узлов интерполирования аналогично тому, как это делалось в [8](§ 4) для одномерного случая, пришлось бы провести большие вычисления. Поэтому целесообразно проводить разбижку узлов в нескольких характерных сечениях $x = x_i$ и $y = y_l$, а затем выбрать такое разбиение, которое удовлетворяло бы требованиям во всех характерных сечениях.

§ 5. Прямоугольные области

До сих пор мы рассматривали функции двух переменных на прямоугольной плоской области. Однако в практике интерполирования приходится иметь дело и с плоскими прямоугольными областями и с более сложным случаем, когда поверхность не может быть построена как функция на плоской области.

1. Объединения прямоугольников. Пусть плоская односвязная область имеет границы, параллельные координатным осям, т.е. состоит из объединения конечного числа прямоугольников. Для таких областей рассматриваются только непериодические функции. Типичный пример, на котором выявляются особенности задачи интерполирования, изображен на рис. 2. Как и в случае прямоугольной области, помимо значений функции в узлах $z_{ij} = f(x_i, y_j)$ задаются граничные условия типов I-III в граничных узлах или на продолжениях линий сетки. Исключение составляет угловая точка выреза P_{N_1, M_1} , где ни частные производные, ни смешанные не задаются. Этой особенности нет, если по обоим переменным заданы условия типа III ($\rho = 0$).

Этап I. Исходная информация о функции $f(x, y)$ сводится в таблицу I', аналогичную таблице I § 3. В угловой клетке выреза таблицы помещаются два числа α и β - граничные условия в $(M_1 + 1)$ -ой строке и $(N_1 + 1)$ -м столбце соответствен-

$\alpha_{00}^{(-1, M_1)}$	$\alpha_{00}^{(0, M_1+1)}$	$\alpha_{00}^{(N_1, M_1+1)}$	$\alpha_{00}^{(N_1+1, M_1)}$		
$\alpha_{00}^{(-1, M)}$	$\alpha_{00}^{(0, M)}$	$\alpha_{00}^{(N_1, M)}$	$\alpha_{00}^{(N_1+1, M)}$		
$\alpha_{00}^{(-1, M_1+1)}$	$\alpha_{00}^{(0, M_1+1)}$	$\alpha_{00}^{(N_1, M_1+1)}$	$\alpha_{00}^{(N_1+1, M_1)}$	α	β
$\alpha_{00}^{(-1, M_1)}$	$\alpha_{00}^{(0, M_1)}$	$\alpha_{00}^{(N_1, M_1)}$	$\alpha_{00}^{(N_1+1, M_1)}$	$\alpha_{00}^{(N_1, M_1+1)}$	$\alpha_{00}^{(N_1+1, M_1)}$
$\alpha_{00}^{(-1, 0)}$	$\alpha_{00}^{(0, 0)}$	$\alpha_{00}^{(N_1, 0)}$	$\alpha_{00}^{(N_1+1, 0)}$	$\alpha_{00}^{(N_1, 0)}$	$\alpha_{00}^{(N_1+1, 0)}$
$\alpha_{00}^{(-1, -1)}$	$\alpha_{00}^{(0, -1)}$	$\alpha_{00}^{(N_1, -1)}$	$\alpha_{00}^{(N_1+1, -1)}$	$\alpha_{00}^{(N_1, -1)}$	$\alpha_{00}^{(N_1+1, -1)}$

но; $\alpha = \beta = z_{N_1+1, M_1+1}$ для условий типа III ($\rho = 0$) по обоим переменным.

Этап 2. Как обычно, решаются задачи интерполирования кубическими многозвенниками для внутренних строк таблицы I. Коэффициенты $\alpha_{00}^{(i,j)}$ размещаются в виде таблицы 2' (здесь не приводится), которая имеет вид внутренней части таблицы I. В конце этапа вычисляется недостающее значение частной производной $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$ в точке P_{N_1, M_1} (или на продолжении линии $y = y_{M_1}$ в точке P_{N_1+1, M_1}).

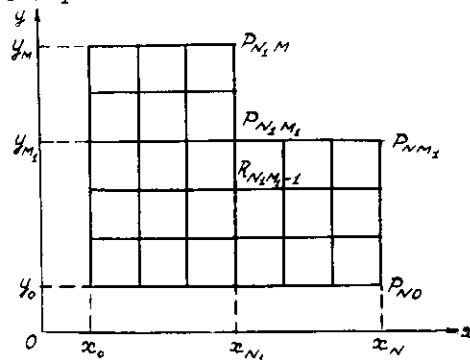


Рис. 2

Этап 3. По всем столбцам таблицы I' строятся кубические многозвенники и результаты - коэффициенты $\alpha_{02}^{(i,j)}$ сводятся в таблицу 3', у которой по сравнению с таблицей I нет окаймляющих строк. Многозвенник, в общем случае нельзя построить по элементам окаймляющего столбца выреза таблицы I', так как

не хватает граничного условия в точке P_{N_1, M_1} (или P_{N_1+1, M_1}). Это можно сделать лишь в отмеченном выше случае условий типа III ($\rho = 0$).

Э т а п 4. По строкам таблицы 3' строятся кубические многоугольники и результаты - коэффициенты $\alpha_{22}^{(ij)}$ - сводятся в таблицу 4'. Однако в общем случае, кроме отмеченного выше, многоугольники можно построить только для нижних строк таблицы 3' для ($j = 0, 1, \dots, M_1$). Но тогда в вершинах ячейки R_{N_1, M_1} известны коэффициенты $\alpha_{00}, \alpha_{20}, \alpha_{02}, \alpha_{22}$, по которым с помощью формул (3.2) - (3.5) вычисляются все остальные коэффициенты этой ячейки. Теперь можно вычислить недостающую смешанную производную в точке P_{N_1, M_1} (или P_{N_1+1, M_1}). После этого рассчитывается окаймляющий столбец выреза таблицы 3' и затем заканчивается формирование таблицы 4'.

Э т а п 5. По формулам (3.2) - (3.5) для каждой ячейки вычисляются остальные 12 коэффициентов.

Изложенный алгоритм приводит к цели во всех случаях, когда для части области можно выполнить этап 4, а примыкающие к ней участки имеют на границах $y = const$ не более одной точки с неопределенной смешанной производной.

Алгоритм не применим в более сложных ситуациях, например, для области на рис. 3. Для этой области этап 4 нельзя выполнить ни для какой её части ни по переменной x , ни по y . Здесь можно рекомендовать такой прием. В точке P_{N_1, M_1} задается значение соответствующей смешанной производной $S_{x^2 y^2} = f_{x^2 y^2}$, и строится окаймляющий столбец $P_{N_1, 0} \dots P_{N_1, M_1}$ таблицы 3'. После этого в подобласти, ограниченной линиями $x = x_0, x = x_{N_1}, y = y_0$ и $y = y_{N_2}$, выполняется этап 4. Далее выполняем этап 4 для сечения $y = y_{N_2}$. Определяя теперь смешанную производную $S_{x^2 y^2}$, сравним её с первоначальным значением. Если они совпадают с требуемой точностью, то вычисления продолжают и приводят к решению задачи. Если не совпадают, то процесс повторяется с новым значением смешанной производной, полученным на первой итерации. Продолжая таким образом, можно рассчитывать на нахождение точного значения смешанной производной в точке P_{N_1, M_1} , после чего процесс вычислений проводится до конца. В более сложных задачах может оказаться, что описанную процедуру вычислений придется проводить для нескольких точек, аналогичных P_{N_1, M_1} .

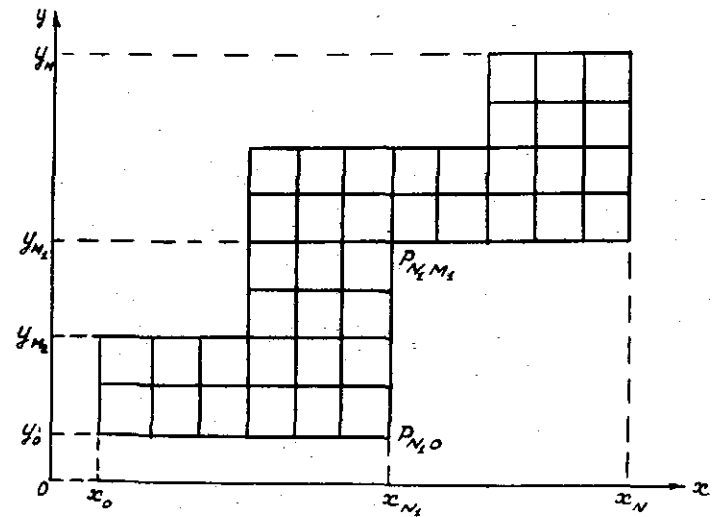


Рис. 3

2. Области с криволинейной границей. Если имеем дело с плоской областью с криволинейной границей (рис. 4), то можно поступать несколькими способами.

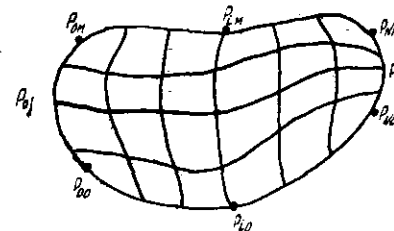


Рис. 4.

Во-первых, в простых случаях можно приближенно заменять криволинейную границу ступенчатой линией, так что область заменится объединением прямоугольников, рассмотренным в п⁰1.

Во-вторых, область Σ можно параметризовать введением параметров u и v (рис. 4). Для этого область Σ покрывается двумя семействами гладких кривых так, что через каждую точку P проходит одна и только одна кривая каждого семейства, т.е. между координатами x, y и параметрами u, v устанавливается взаимно однозначное соответствие. В точке P_{00} принимается $u = 0, v = 0$, а в точках P_{0M}, P_{NM}

и P_{No} имеем пары значений $(0,1)$, $(1,1)$ и $(1,0)$ соответственно. Таким образом, область Σ плоскости (x,y) отображается на единичный квадрат в плоскости (u,v) .

Связи между переменными, т.е. $x = x(u,v)$ и $y = y(u,v)$, могут быть самыми различными. Наиболее часто применяется параметризация по длине дуг. В нашем случае это означало бы, что каждая кривая семейства, например, P_{10}, P_{1M} делит граничные дуги P_{00}, P_{No} и P_{0M}, P_{NM} на пропорциональные части, и аналогично кривая другого семейства P_{0j}, P_{Nj} делит на пропорциональные части две другие границы. В точке P с координатами x,y имеем

$$u_i = \frac{\alpha(P_{00}, P_{10})}{\alpha(P_{00}, P_{No})}, \quad v_j = \frac{\alpha(P_{00}, P_{0j})}{\alpha(P_{00}, P_{0M})},$$

где α - символ длины дуги между двумя точками.

В книге [4] предложено несколько оригинальных параметризаций такого рода, но с неоднозначным отображением в плоскость образа (u,v) и однозначным обратным отображением. Одно из них получается из вышеописанного, если точки P_{00}, P_{0M} и P_{No}, P_{NM} попарно стягиваются в точки P_0 и Q_0 соответственно. В этом случае точкам P_0 и Q_0 соответствуют целые ребра квадрата $u=0$ и $u=1$. Другой случай получается из предыдущего, если сначала точки P_0 и Q_0 сблизить до совпадения, а затем одну из них втянуть внутрь области, как показано на рис. 5. Здесь каждая точка

линии $P_0 Q_0$ отображается в две с координатами $(0,v)$ и $(1,v)$. Обратные отображения уже однозначны.

Если область Σ имеет стандартную форму, например окружность, эллипс, то удобно применять какие-либо криволинейные координаты (специальные виды параметризации), например полярные или эллиптические.

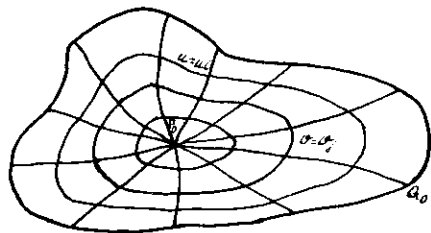


Рис. 5.

В плоскости параметров (u,v) на единичном квадрате образуется прямоугольная сетка с линиями $u = u_i$ ($i = 0, 1, \dots, M$) и $v = v_j$ ($j = 0, 1, \dots, N$). В узлах определяются $x_{ij} = x(u_i, v_j)$, $y_{ij} = y(u_i, v_j)$, $z_{ij} = z(u_i, v_j)$.

На границах можно задать условия какого-либо типа I-III, например, типа I. При этом

$$\frac{\partial x(u_i, v_j)}{\partial u} = \frac{\partial S_1(u_i, v_j)}{\partial u}, \quad \frac{\partial y(u_i, v_j)}{\partial u} = \frac{\partial S_2(u_i, v_j)}{\partial u},$$

$$\frac{\partial f(x_{ij}, y_{ij})}{\partial x} \frac{\partial x(u_i, v_j)}{\partial u} + \frac{\partial f(x_{ij}, y_{ij})}{\partial y} \frac{\partial y(u_i, v_j)}{\partial u} = \frac{\partial S_3(u_i, v_j)}{\partial u} \quad (i = 0, 1, \dots, M),$$

и аналогично определяются частные производные по v на линиях $v=0$ и $v=1$, а также смешанные производные в угловых точках области. Для случая, изображенного на рис. 5, функции будут периодическими по параметру v . Таким образом, получаются стандартные постановки задач интерполирования. Решив их для каждого бикубического многозвенника $S_k(u,v)$ ($k=1,2,3$), получаем параметрическое представление интерполяционной функции $x = S_1(u,v)$, $y = S_2(u,v)$, $z = S_3(u,v)$.

3. Представление поверхностей.

Если поверхность нельзя рассматривать как однозначную функцию двух независимых переменных, то параметризация осуществляется непосредственно на поверхности и устанавливаются зависимости $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ и $z = z(u,v)$. Если соблюдать указанные в п.2 требования, то они отображают поверхность на единичный квадрат плоскости u,v . Часто удобные параметризации оказываются неоднозначными при переходе на плоскость u,v , но они должны быть однозначными для обратного преобразования. В [4] рассмотрены параметризации поверхностей, гомеоморфных сфере, тору и конечному цилиндру. В большинстве случаев для последних примеров удобнее просто пользоваться сферическими, тороидальными или цилиндрическими координатами. Например, фюзеляж самолета или корпус ракеты естественно проектировать в цилиндрических координатах, а вполне гладкий (без ребер) кузов легкового автомобиля - в сферических. В цилиндрических координатах и для незамкнутых поверхностей в сферических координатах функции $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ и

$z = z(u, v)$ будут периодическими по одной переменной, а для поверхностей, гомеоморфных полной сфере и тору, эти функции будут периодическими по обоим параметрам.

Каких-либо особенностей в постановке задачи интерполирования здесь нет, и после построения бикубических многозвенников

$S_k(u, v)$ ($k=1, 2, 3$) получаем представление поверхности в параметрической форме с помощью трех бикубических многозвенников, как и в п.2.

Совершенно очевидно, что все это сохраняет силу и для вырожденных случаев плоских и пространственных кривых. Они могут быть представлены функциями одного параметра u , т.е.

$x = x(u), y = y(u)$ и $z = z(u)$. Последние можно интерполировать кубическими многозвенниками $S_k(u)$ ($k=1, 2, 3$).

4. З а м е ч а н и я о с в о й с т в а х и н т е р п о л я ц и о н н ы х п р о ц е с с о в . Отличие области от плоской прямоугольной формы не влечет за собой изменения основных свойств интерполяционных бикубических многозвенников. Во-первых, видоизмененные алгоритмы по-прежнему дают единственный многозвенник в пространстве x, y, z . Возможная неоднозначность отображения в плоскость параметров u, v не мешает этому: достаточно, что обратное отображение однозначно. Во-вторых, интерполяционный процесс будет также сходиться. Особенность в задании граничных условий для областей в виде объединения прямоугольников не препятствует сходимости. Действительно, недостающие граничные условия вычисляются в результате сходящихся интерполяционных процессов на этапах 2 и 4 (п⁰.1). Поэтому последующие интерполяции, в которых они используются, будут сходиться к заданной функции или её производным.

1. G. BIRKHOFF, H. GARABEDIAN. Smooth surface interpolation. J. Math. Phys., 1960, vol. 39, N 3, 258-268.
2. C. de BOOR. Bicubic spline interpolation. - J. Math. Phys. 1962, vol. 41, N 3, p. 212-218.
3. J.H. AHLBERG, E.N. NILSON, Y.L. WALSH. Extremal, orthogonal lines. - J. Math. Anal. Appl., 1965, vol. 12, N 1, p. 27-48.
4. J.H. AHLBERG, E.N. NILSON, Y.L. WALSH. The theory of splines and their applications. Acad. Press, New York - London, 1967.
5. Ю.С. ЗАВЬЯЛОВ. Интерполирование кусочно-полиномиальными функциями одной и двух переменных. - В сб.: "Математические вопросы геофизики", вып. I, 1969, стр. 125 - 141.
6. И.С. БЕРЕЗИН, Н.П. ЖИДКОВ. Методы вычислений, т. I. "Наука", М., 1966 г.
7. Э.В. ЕВРЕЙНОВ, Ю.Г. КОСАРЕВ. Однородные вычислительные системы высокой производительности. "Наука", Новосибирск, 1966 г.
8. Ю.С. ЗАВЬЯЛОВ. Интерполирование кубическими многозвенниками. Данный сборник, стр. 23-73.

Поступила в редакцию
15/IX - 1969 г.